НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

В.Ю. Зайцев, В.Е. Назаров, И.Ю. Беляева

Институт прикладной физики РАН

Для широкого класса микронеоднородных сред получены нелинейные динамическое уравнение состояния и волновое уравнение, обобщающие уравнения нелинейной акустики однородных сред (уравнения КдВ-Бюргерса и нелинейные уравнения с линейной релаксацией [1]). Аналитическое описание проводится в рамках реологической модели микронеоднородной среды в виде упругой цепочки, содержащей дефекты, проявляющие релаксационные свойства и нелинейную зависимость “напряжение-деформация” [2-8]. В реальных средах такие дефекты соответствуют, трещинам, межзеренным контактам и другим подобным дефектам.

Уравнения состояния идеально - упругих звеньев и вязко - упругих нелинейных дефектов, соответственно, имеют вид:

$$\sigma = E\varepsilon_0 , \tag{1}$$

$$\sigma = \varsigma \cdot E[\varepsilon_1 - F(\varepsilon_1)] + gd\varepsilon_1 / dt , \tag{2}$$

где E - упругий модуль однородной среды-матрицы, ε_0 и ε_1 - деформации упругих элементов и мягких включений соответственно, g - коэффициент эффективной вязкости, ζ – безразмерный коэффициент, характеризующий относительную упругость дефектов по сравнению в однородной средой, $F(\varepsilon_1)$ - малая упругая нелинейная поправка. Считая, что линейная (на единицу длины цепочки) концентрация дефектов равна ν, для деформации ε среды можно записать следующее выражение:

$$\varepsilon = (1-\nu)\varepsilon_0 + \nu\varepsilon_1 . \tag{3}$$

Используя метод последовательных приближений, из уравнений (1)-(3) можно получить уравнение состояния среды, которое при малой концентрации дефектов можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\sigma(\varepsilon) = E\Bigg\{\varepsilon - \nu\Omega \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\tau) e^{-\varsigma_i \Omega (t-t_1)} dt_1 \\ + \nu\Omega\varsigma \int_{-\infty}^{t} e^{-\varsigma_i \Omega (t-t_1)} F\left(\Omega \int_{-\infty}^{t_1} \varepsilon(t_2) e^{-\varsigma_i \Omega (t_1-t_2)} dt_2\right) dt_1\Bigg\},\end{aligned} \tag{4}$$

где введено обозначение $\Omega = E/g$, так что величина $\Omega\zeta$ соответствует релаксацион-

ной частоте дефекта. В реальных микронеоднородных средах дефекты не идентичны и характеризуются некоторой функцией $\nu(\zeta,\Omega)$ распределения по своим параметрам, поэтому учет их влияния должен быть проведен с помощью суммирования вклада дефектов по такому распределению. Введем для удобства дальнейших преобразований релаксационный оператор $R[..]$ и интегральные операторы $I[..]$ и $J[..]$, соответствующие учету общего вклада различных дефектов:

$$R[...] = \Omega \int_{-\infty}^{+\infty} [...] H(t-t_1) e^{-\varsigma\Omega(t-t_1)} dt_1 \ , \tag{5}$$

$$I[...] = \iint [...] \nu(\Omega,\varsigma) d\Omega d\varsigma \ , \tag{6}$$

$$J[...] = \iint [...] \nu(\Omega,\varsigma) \varsigma d\Omega d\varsigma \ , \tag{7}$$

где $H(t)$ - функция Хевисайда. Во введенных обозначениях (6)-(8) уравнение состояния (5) может быть записано в следующей компактной форме:

$$\sigma(\varepsilon) = E\{\varepsilon - I[R(\varepsilon)] - J[R(F[R(\varepsilon)])]\}. \tag{8}$$

Подставляя (9) в уравнение движения ($\rho U_{tt} = \sigma_x$, где ρ - плотность среды, $U_x = \varepsilon$, получим волновое уравнение для смещения $U(x,t)$:

$$U_{tt} - C^2 U_{xx} = -C^2 \{ I[R(U_{xx})] + J[R(F_x[R(U_x)])] \}, \tag{9}$$

где $C=(E/\rho)^{1/2}$ имеет смысл скорости волны в бездефектной цепочке, что соответствует высокочастотному пределу скорости в среде с дефектами. Далее, при переходе к медленным переменным $\tau = t\text{-}x/C$, x и использовании метода медленно меняющихся амплитуд, уравнение (10) может быть преобразовано в следующее уравнение для медленно меняющейся скорости $V = U_\tau$:

$$V_x + \frac{1}{2C} I[R(V_\tau)] - \frac{1}{2C} J\{R[F_\tau(-R(V)/C)]\} = 0 \ . \tag{10}$$

Для дефектов с квадратичной нелинейностью ($F(\varepsilon)=\gamma\varepsilon^2$)) уравнение (10) имеет вид:

$$V_x + \frac{1}{2C} I[R(V_\tau)] + \frac{\gamma}{C^2} J\{R[R(V)R(V_\tau)]\} = 0 \ . \tag{11}$$

Предложенная модель может быть применена к описанию широкого класса микронеоднородных сред, таких как земные породы, конструкционные материалы, металлы с дефектами и т.п. Полученные уравнения согласованно учитывают следующие свойства среды: микроструктурно-обусловленное линейное поглощение (включая частотно-независимую добротность), сопутствующую такому поглощению дисперсию скорости звука, повышенный уровень упругой нелинейности и дисперсию нелинейности материала. Уравнения (8)-(10), показывают, что в нелинейном отклике среды релаксация дефектов проявляет себя двояким образом. Во-первых, релаксация влияет на линейный отклик среды, являющийся аргументом нелинейной функции $F(..)$ (это утверждение не зависит от типа нелинейного процесса и конкретного вида функции $F(..)$). Во-вторых, релаксация влияет на “выход” функции нелинейности (см. релаксационный оператор снаружи функции $F(..)$ в (8)-(11)). Результат влияния релаксации на этом этапе существенно определяется ти-

пом конкретного нелинейного процесса. Например, имеется значительная разница между процессами, идущими с повышением или понижением частоты, так что результирующие частотные зависимости оказываются различными, и отклик материала в этих случаях не может быть охарактеризован одним и тем же нелинейным параметром в отличие от однородных сред без релаксации. Таким образом, полученное эволюционное уравнение вида (11) последовательно учитывает проявление релаксационных свойств дефектов как в линейных, так и нелинейных свойствах, и является для микронеоднородных материалов аналогом и обобщением уравнения КдВ-Бюргерса, используемого в нелинейной акустике однородных сред.

Для иллюстрации влияния микроструктурно-обусловленной частотной зависимости нелинейности в рамках полученных уравнений проанализированы основные нелинейные эффекты (генерация волн разностной частоты и второй гармоники, самодемодуляция высокочастотных импульсов). Показано, что в дополнение к обычно учитываемому изменению линейных диссипативно-дисперсионных свойств, релаксация дефектов приводит и к появлению частотно-зависимой нелинейности, существенно влияющей как на количественные соотношения, так и на сам характер нелинейных процессов по сравнению со случаем однородных сред, обладающих “классической” (атомарной) нелинейностью, не зависящей от частоты акустических волн.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты No 01-05-64417, No 02-02-16237 и No 00-15-96741).

Литература

1. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики - М: Наука, 1975.
2. Zaitsev V. Yu. A model of anomalous acoustic nonlinearity of micro-inhomogeneous Microinhomogeneous Media // Acoustics Letters, 1996,V. 19, No 9, 171-176.
3. Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю. Нелинейные упругие свойства микронеоднороднх сред с иерархической структурой // Акуст. журн., 1997, Т. 43, № 5, 594-599.
4. Беляева И. Ю., Зайцев В.Ю. О предельной величине параметра упругой нелинейности структурно-неоднородных сред // Акуст. журн., 1998, Т.44, № 6, 731-737.
5. Zaitsev V. Yu., Nazarov V.E. On the Frequency-Independent Acoustic Q-factor of Microinhomogeneous Solids // Acoustics Letters 1999,V. 21, No 1, 11-15.
6. Зайцев В.Ю., Назаров В.Е., Шульга А.Е. О дисперсионных и диссипативных свойствах микронеоднородных сред // Акуст. журн., 2000. Т. 46, 348-355.
7. Nazarov V. E.,. Zaitsev V. Yu, Belyaeva I. Yu. The equation of state of micro-inhomogeneous media and the frequency dependence of their elastic nonlinearity // Acoustics Letters, 1999. V.22, No 12, 236-241.
8. Зайцев В. Ю., Назаров В. Е., Беляева И. Ю. Уравнение состояния микронеоднородных сред и частотная зависимость их упругой нелинейности // Акуст. журн., 2001. Т. 47, No 2, 220-226.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ВЫСОКОИНТЕНСИВНОМ УЛЬТРАЗВУКОВОМ НАГРЕВАНИИ БИОТКАНИ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ ЕЕ СВОЙСТВ

Ю.Н. Маков

Физический факультет Московского госуниверситета

Наряду с традиционным применением ультразвука (УЗ) для диагностических целей (сонография), исключающим любое возможное влияние или последействие УЗ на отдельные клетки и биоткань в целом (что ограничивает интенсивность диагностического УЗ величиной $I \leq 0.1$ Вт/см^2), в последнее время все шире используется активное (достаточно высокоинтенсивное) ультразвуковое воздействие на биоструктуры (отдельные клетки, ткани, органы) с целью управляемого изменения их функциональных или физических свойств. Такое воздействие основано либо на тепловых (за счет поглощения акустических волн в биотканях), либо на нетепловых (прямых механических, вторичных кавитационных, сонохимических) проявлениях проходящего через биоткань УЗ. Так, например, ультразвуковая термодеструкция (УЗ хирургия) патологически измененных областей биоткани обеспечивается возможностью концентрации волновой энергии фокусированным ультразвуковым пучком с достижением в фокальной области больших интенсивностей ($I > 1000$ Вт/см^2), приводящих к повышению температуры в этой области до 90 – 100 ^{0}C за единицы секунд, что приводит к термонекрозу биоткани. При указанных высоких интенсивностях (и температурах) естественно проявление тех или иных нелинейных эффектов, в различной степени влияющих на результат термовоздействия. Важно отметить, что для прогнозирования и анализа зоны терморазрушения необходимо решить две связанные задачи: во-первых, из акустического волнового уравнения найти пространственное распределение акустического поля (например, поля давления) в фокусированном пучке с последующим подсчетом пространственной плотности тепловых источников за счет поглощения УЗ и, во-вторых, используя эти источники, решить «тепловую» задачу (уравнение теплопроводности), что даст пространственно-временное распределение теплового поля в биоткани. Анализ специфических для каждой из двух задач нелинейных эффектов важен для прогнозных оценок зоны и степени терморазрушения биоткани.

Обычно специалисты-акустики, занимающиеся проблемой терморазрушения биоткани с помощью высокоинтенсивного сфокусированного УЗ, рассматривают только влияние акустической нелинейности на этот процесс, когда за счет образования ударных фронтов в профиле волны происходит увеличение поглощения этой волны (так наз. нелинейное поглощение) и, соответственно, теоретически растет температура нагрева в фокальной области. Этот процесс исследуется на основе численного решения обобщенного уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова, учитывающего почти линейную зависимость коэффициента поглощения УЗ в биоткани от частоты

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\varepsilon}{c^3\rho}p\frac{\partial p}{\partial\tau}-\int_0^\infty K(t)p(z,\tau-t)dt\right)=\frac{c}{2}\Delta_\perp p\,, \qquad (1)$$

где p – акустическое давление, z – осевая координата пучка, c – скорость звука, ρ - плотность, ε – коэффициент нелинейности ткани, $\tau = t - z/c$ – «запаздывающее» время, $\Delta_\perp$ - лапласиан по поперечным координатам пучка, $K(t)$ – релаксационное ядро, дающее нужную зависимость коэффициента затухания УЗ от частоты.

Численное решение нелинейной акустической задачи (1) для нахождения поля $p(z, r, \tau)$ с последующим пересчетом в плотность тепловых источников

$$q(z,r)=2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha(nf)I_n(z,r)\,, \qquad (2)$$

где I_n – интенсивность n-ой гармоники, $\alpha(nf)$ – значение коэффициента поглощения на n-ой гармонике рабочей частоты f, обычно соединяется далее с решением линейного уравнения теплопроводности (биотеплового уравнения)

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\kappa\,\Delta T=\frac{q}{\rho C}\,, \qquad (3)$$

где T – температура, ρ,C, κ - плотность теплоемкость и коэффициент температуропроводности биоткани, Δ – лапласиан.

Результаты такой совместной задачи (нелинейной акустической и линейной тепловой) дают (см., например, [1]) высокие максимальные значения температур в малой окрестности точки фокуса (T_{max} = 250 – 300 ^oC) и практически не изменяют по сравнению с результатами линейной акустической задачи размеры, форму и местоположение общей зоны терморазрушения (термонекроза) в биоткани при УЗ воздействии. В связи с этим отметим следующее. С одной стороны, при использовании реальных медицинских аппаратов для УЗ терморазрушения и в специальных экспериментах никогда не была зафиксирована (с помощью термодатчиков) температура в фокальной области УЗ пучка, превышающая 100 ^oC.

Рис.1

С другой стороны уже при температурах 90 –100° С происходит вскипание внутритканевой жидкости, что приводит к эффекту «свариваемости» биоткани с проявлением характерных признаков (резкое изменение цвета в сторону белого, высушивание с разрушением межволоконных связей и т.п.). Это хорошо иллюстрируют результаты наших экспериментов по воздействию УЗ на свежий кусок мяса, выполненных с помощью аппарата «Sonablate – 200» (см. Рис. 1). Отметим также конусообразную (с вершиной в фокусе) форму полученных областей термодеструкции. Таким образом, весьма существенным фактором в процессе высокотемпературного (T >

60 ^{o} C за 1-2 сек. для обеспечения необратимой денатурации белков) нагрева биоткани является изменение ее структурных свойств, обуславливающее проявление зависимости основных характеристик нагреваемой биоткани от температуры. Это приводит, прежде всего, к нелинейной тепловой задаче.

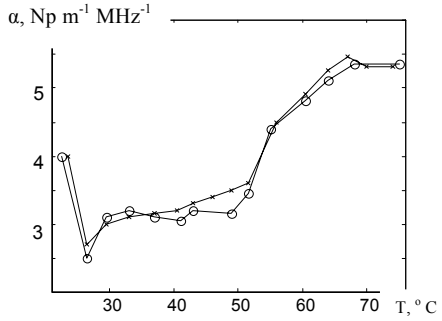


Рис. 2.

Экспериментальные данные (см. Рис.2 из работы [2]) показывают довольно резкое возрастание (в 1.8 раз) коэффициента поглощения УЗ в биоткани при повышении температуры от 50 до 65° C. Меняются при нагревании (менее существенно) плотность, теплопроводность и коэффициент температуропроводности биоткани. С учетом этих факторов линейное уравнение (3) преобразуется в следующее нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla(\kappa \nabla T) = \frac{q(T) - div\,\vec{Q}(S)}{\rho(T)\,C(T)} \qquad (4)$$

В уравнении (4) последнее слагаемое в знаменателе правой части учитывает теплозатраты на вскипание и испарение (выпаривание) внутритканевой жидкости на поверхности (границе), где $T = T_o$ (T_o - температура вскипания внутритканевой жидкости). В процессе УЗ воздействия эта граница будет двигаться с определенной скоростью, соответственно формируя (и увеличивая) область явной термодеструкции (см. Рис. 1). Таким образом, возникает еще одна, связанная с двумя предыдущими задача типа задачи Стефана о нахождении движущейся межфазной границы, должным образом согласованной с температурным полем, которое, в свою очередь, определяется воздействующим УЗ пучком. Аналитическое решение подобной задачи известно лишь для единичных случаев в простейшей геометрии. Как показал наш эксперимент (см. Рис. 1), при определенных условиях воздействующий высокоинтенсивный сфокусированный УЗ пучок формирует конусообразную зону термодеструкции, которая «зарождается» в фокусе (в области самых высоких температур) и далее динамически увеличивается (продвигается) в сторону излучателя.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-02-16655)

Литература

1. Филоненко Е.А., Хохлова В.А. //Акустический журнал, 2001, т.**47**, №4, с. 541.
2. Damianou C.A., et al. // J. Acoust. Soc. Am., 1997, v.**102** (1), p. 628.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964, с.276.

О ЗАТУХАНИИ ИНТЕНСИВНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ШУМОВ

С.Н.Гурбатов, Б.О.Энфло[1], Вал.В.Черепенников

Нижегородский госуниверситет,

[1]Королевский технологический институт, Стокгольм

Задача о распространении интенсивных сигналов в средах без дисперсии является одной из наиболее актуальных для современной нелинейной акустики. Достаточно большое число работ, посвященных данной теме опубликовано за последние 25 лет. Часть указанных статей посвящена анализу поведения регулярных форм (синус, N – волна) в случае цилиндрической и сферической геометрии. В этих работах описано асимптотическое поведение волн на больших удалениях от источника. Другая часть работ к которым можно отнести книгу [3] дает достаточно полный анализ распространения плоских шумовых волн. Целью же данного исследования является асимптотический статистический анализ поведения шумовых сферических и цилиндрических волн на больших удалениях от источника сигнала. Для описания распространения волны используется так называемое обобщенное уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{nV}{2r}-\frac{\beta}{c^2}V\frac{\partial V}{\partial \tau}=\frac{b}{2c^3\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} \qquad (1)$$

Здесь V имеет смысл колебательной скорости, r- расстояние от центра симметрии системы, t - время записанное в системе координат распространяющейся вместе с волной, β-коэффициент нелинейности, b- коэффициент вязкости, ρ и с –скорость звука и плотность среды соответственно. Параметр определяет геометрию задачи: n =0,1,2 для плоских цилиндрических и сферических волн. Граничное условие для уравнения (1) ставится в виде:

$$V(t, r=r_0)=\xi(t)\,, \qquad (2)$$

где r_0 - радиус источника сигнала. ξ - случайный процесс, статистические характеристики которого мы полагаем гауссовыми. Спектральную плотность энергии этого случайного процесса мы рассматривали в виде произведения:

$$E(\omega) = \omega^n b(\omega), \qquad (3)$$

где ω^n – описывает спектр в области низких частот, а быстро спадающая с ростом частоты функция b – в области высоких.

Обобщенное уравнение Бюргерса описывает три физических эффекта, влияющих на форму и интенсивность распространяющейся волны: динамическую (конвективную) нелинейность, вязкое затухание и геометрическую расходимость. Характерные расстояния проявления всех трех эффектов могут быть непосредственно оценены из вида самого уравнения и граничного условия как:

$$r_{nl}=\frac{c^2}{\beta\omega_0 V_0}, \qquad r_l=\frac{2c^3\rho}{b\omega_0^{\ 2}}, \quad r_{sp}=r_0\,, \qquad (4)$$

где через V_0 и ω_0 обозначены характерные амплитуда и частота излучаемого источником сигнала. Таким образом мы можем ввести два безразмерных управляющих параметра обратное акустическое число Рейнольдса ε и безразмерный радиус R_0 как отношения характерных масштабов:

$$\varepsilon = \frac{1}{\mathrm{Re}} = \frac{r_{nl}}{r_l}, \qquad R_0 = \frac{r_0}{r_{nl}} \tag{5}$$

и переписать уравнение (1) в безразмерном виде удобном для численного моделирования:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{R_0}{x}\right)^{\frac{n}{2}} u \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \tag{6}$$

Для аналитических оценок удобнее часто бывает другая форма, которая получается из (6) путем нелинейной замены пространственной координаты:

$$\frac{\partial u}{\partial R} - u \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon g(R) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \tag{7}$$

Здесь $g(R)=1$ - для плоских волн, $g(R)=1+R/2R_0$ для цилиндрических и $g(R)=exp(R/R_0)$ для сферических.

Из уравнения (7) очевидно что линейный член растет по отношению к нелинейному по мере удаления от источника сигнала, поскольку амплитуда волны убывает, а также потому, что $g(R)$ является монотонно неубывающей функцией координаты. Таким образом, мы приходим к выводу что на больших расстояниях от источника, когда нелинейное слагаемое становится пренебрежимо мало распространение волны может быть описано линейным уравнением типа уравнения диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial R} = \varepsilon g(R) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \tag{8}$$

Таким образом, можно заключить, что высокочастотная часть спектра интенсивно подавляется. Форму низкочастотной части, также сравнительно нетрудно определить. Поскольку нелинейное слагаемое, ответственное за перераспределение энергии по частотам, входит в (7) под знаком производной по времени интенсивность накачки в область низкой частоты пропорциональна ω^2 . Это означает, что мы можем разбить все спектры, задаваемые уравнением (3) на два больших подтипа: сигналы для которых $n<2$ и сигналы с $n>2$. Для первого подтипа показатель степени в спектре низких частот сохраняется на больших удалениях от источника, а для второго спектр приобретает универсальную форму:

$$E(\omega, R) = D(\varepsilon, R_0)\omega^2 \exp\left(-\varepsilon\omega^2 \int_0^R g\left(\frac{x}{R_0}\right)dx\right) \tag{9}$$

В выражении (9) множитель $D(\varepsilon,R_0)$ описывает “интегральную” интенсивность накачки в область низкой частоты вдоль всего пути распространения волны. Задачу определения зависимости D от безразмерных параметров задачи ε и R_0 в общем случае решить не удается. Однако достаточно эффективной оказывается предло-

женная Скоттом процедура разбиения параметрической плоскости *(ε,R₀)* на регионы существования асимптотик. Общий вид разбиения представлен на рисунке 1.

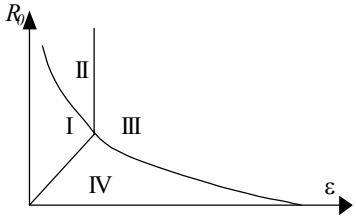


Рис.1

Здесь I является регионом сильнонелинейных расходящихся волн, II- нелинейных квазиплоских волн, III – квазиплоские волны с сильным вязким затуханием, а в регионе IV –волна распространяется почти без искажения формы, а ее амплитуда быстро убывает за счет геометрической расходимости. В каждом из этих регионов можно найти асимптотическую форму $D(\varepsilon,R_0)$. Проблема состоит в том, что в некоторых из этих регионов выражение для $D(\varepsilon,R_0)$ содержит неизвестные константы допускающие только численное определение.

Для того чтобы определить эти множители, а также для того чтобы проверить теоретические оценки было проведено численное моделирование обобщенного уравнения Бюргерса. За основу было принято уравнение (6). Его достоинством по сравнению с (7) является то что (6) не содержит быстрорастущего множителя при диссипативном члене. Переписывая уравнение (6) в виде уравнения для фурье-образов получим:

$$\frac{\partial F[u(x,t)]}{\partial x}+\frac{j\omega}{2}\left(\frac{R_0}{x}\right)^{\frac{n}{2}}F(u^2(x,t))=-\mathring{a}\omega^2F[u(x,t)] \qquad 10)$$

Или проводя дискретизацию по пространственной координате:

$$\frac{C_{x+h}(\omega)-C_x(\omega)}{h}+\frac{j\omega}{2}\left(\frac{R_0}{x}\right)^{\frac{n}{2}}F((F^{-1}[C_x(\omega)])^2)=-\mathring{a}\omega^2C_x(\omega) \qquad (11)$$

Уравнение (11) и является основой схемы численного моделирования. Преимущество описанного метода численного моделирования перед обычной схемой решения уравнений параболического типа состоит в том, что он гораздо лучше подходит для расчета распространения в случае больших чисел Рейнольдса. Поскольку в волне образуются разрывы – участки с большими градиентами поля, которые приводят к большим погрешностям в численном расчете.

Таким образом, с помощью численного моделирования мы можем определить неизвестные константы входящие в выражение для $D(\varepsilon,R_0)$ и получить достаточно полную картину поведения нелинейных волн на больших удалениях от источника.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №00-15-96619, №02-02-17374 и гранта “Университеты России”.

Литература

1. J.F.Scott Uniform asymptotic of spherical and cylindrical waves generated by a sinusoidal source // Proc. R. Soc. Lond, A375(1981)
2. B.O.Enflo Saturation of nonlinear spherical and cylindrical sound waves // JASA, 99(1996).
3. С.Н.Гурбатов, А.Н.Малахов, А.И.Саичев Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии - М: Наука, 1991.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ С УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

И.В.Милосердова

Нижегородский филиал Института машиноведения РАН

Интерес к исследованию импульсных колебаний в линейных системах с нелинейными границами обусловлен широким практическим использованием этих систем с целью преобразования спектра сигнала и формирования коротких импульсов. В частности, такие системы представляют интерес для изучения импульсных режимов работы стержневых элементов виброударных и ультразвуковых устройств, для которых существенны нелинейные эффекты, обусловленные конструктивными особенностями концевых закреплений [1]. К рассматриваемому классу систем относятся также периодические слоистые среды с нелинейными границами, например, трещинами [2].

Рассмотрим периодические колебания в классе систем, которые описываются следующей нелинейной краевой задачей:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 , \tag{1}$$

$$\beta_1 u_x - \left(u + \alpha_1 \Phi_1(u)\right)\Big|_{x=0} = 0 , \tag{2}$$

$$\beta_2 u_x - \left(u + \alpha_2 \Phi_2(u)\right)\Big|_{x=1} = 0 . \tag{3}$$

Здесь $u(x,t)$ - искомая волновая функция, зависящая от безразмерных координаты и времени; $\Phi_{1,2}$ - нелинейные функции; $\alpha_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$ - малые коэффициенты.

Локализованные (импульсные) колебания в рассматриваемой системе могут существовать только при слабой дисперсии границ, величина которой характеризуется коэффициентами $\beta_{1,2}$. Это возможно в двух предельных случаях: при ($\beta_{1,2} >> 1$) и при ($\beta_{1,2} << 1$). Ниже рассмотрен второй случай ($\beta_{1,2} << 1$).

Будем искать стационарные периодические волны, которые не изменяют своей формы при отражении от границ системы и испытывают лишь общую задержку

(сдвиг фаз) на время взаимодействия с упругой границей. Период решений $u(x,t)$ представляется в виде $T = T_k(1+\kappa)$, где T_k -период волны в линейном приближении, а κ - нелинейная расстройка. В линейной системе T_k совпадает с периодом одного из собственных колебаний $T_k = 2\pi/\omega_k$, где ω_k - собственные частоты системы, определяемые из трансцендентного уравнения $tg\omega = -\omega(\beta_1+\beta_2)/(1-\beta_1\beta_2\omega^2)$. Если $\omega(\beta_1+\beta_2) << 1$, то собственные частоты с большой точностью можно считать кратными друг другу $\omega_k \cong \pi k/(1+\beta_1+\beta_2)$, $k = 1,2,...N$, $N = E\{(1+\beta_1+\beta_2)/\pi\}$. Последнее приводит к возникновению внутренних резонансов, что способствует возбуждению в системе синхронизованных между собой гармоник и образованию установившихся несинусоидальных колебаний релаксационного типа. Решение $u(x,t)$ представим в виде суперпозиции двух волн

$$u(x,t) = f_1(t+x) + f_2(t-x). \tag{4}$$

Условие периодичности $u(x,t)$ приводит к тому, что f_1 и f_2 также должны быть периодическими функциями и иметь кратные периоды $T_1 = T_k(1+\kappa_1), T_2 = T_m(1+\kappa_2), m = k\cdot\ell$ $(m,k,\ell = 1,2,...)$. Из кратности периодов следует, что $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, и, в частности, в системе с симметричными нелинейностями периодические процессы возможны только при одинаковых знаках нелинейностей ($\alpha_1\cdot\alpha_2 > 0$). Подставляя (.4) в (1)-(.3), перейдем от исходной краевой задачи в частных производных к системе нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

$$\begin{aligned} &f_1(t)+f_2(t)-\beta_1[f_1'(t)-f_2'(t)]+\alpha_1\Phi_1[f_1(t)+f_2(t)]=0,\\ &f_1(t+1)+f_2(t-1)-\beta_2[f_1'(t+1)-f_2'(t-1)]+\alpha_2\Phi_2[f_1(t+1)+f_2(t-1)]=0. \end{aligned} \tag{5}$$

Перейдем к новому времени $\xi = t + kT_1/2 = t + kT_2/2$ и воспользуемся условием периодичности функций $f_1(t) = f_1(t+kT_1)$ и $f_2(t) = f_2(t+mT_2)$. Это позволяет свести систему (5) к уравнениям с малым отклонением аргумента

$$\Delta = \frac{kT_1}{2} - 1 = \frac{mT_2}{2} - 1 = \beta_1 + \beta_2 + \kappa(1+\beta_1+\beta_2). \tag{6}$$

Введем обозначения: $f_1(\xi)+f_2(\xi) = V(\xi)$, $f_1(\xi)-f_2(\xi) = W'(\xi)$, где функция $V(\xi)$ описывает смещение на границе *x=0*. Связь между переменными V и W при произвольном значении аргумента ξ имеет вид $W'(\xi) = [V(\xi)+\alpha_1\Phi_1(V)]/\beta_1$. Раскладывая уравнения в ряд по малому запазды-

ванию Δ и ограничиваясь в разложении членами порядка Δ^2, получаем уравнение нелинейного осциллятора для функции $V(\xi)$ и

$$V'' + \alpha V + b_1\Phi_1(V) + b_2\Phi_2\left[V\left(\frac{\beta_1 - \Delta}{\beta_1}\right)\right] = 0\,, \qquad (7)$$

$$a = 2(\beta_1 + \beta_2 - \Delta)/z\,,\quad b_1 = 2\alpha_1(\beta_2 - \Delta)/z\,,\quad b_2 = 2\alpha_2\beta_1/z\,,\quad z = \Delta^2(\beta_1 + \beta_2) - 2\Delta\beta_1\beta_2\,.$$

В частном случае при α_2=0, β_2=0 уравнение (7) описывает периодические процессы в системе с одной нелинейно-упругой (x=0) и одной жесткой (x=1) границами.

В качестве примера рассмотрим процессы в системе с кубическими нелинейностями $\Phi_1=\Phi_2=U^3$. В этом случае (7) имеет вид уравнения Дуффинга, решения которого выражаются в эллиптических функциях. Коэффициенты уравнения Дуффинга зависят от амплитуды колебаний и неопределенной пока величины Δ, зависящей от нелинейной расстройки κ.

Получены зависимости амплитуд колебаний от нелинейной расстройки $\kappa \sim \Delta - \beta_1 - \beta_2$ для первых трех мод при жесткой и мягкой характеристиках и безразмерных параметрах нелинейности и дисперсии $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 10^{-2}$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta = 10^{-2}$. Применительно к стержню построена картина распределения скоростей и деформаций для первой моды в различные моменты времени при жесткой ($A\sqrt{\alpha} = 0{,}14$, $\kappa = -2\cdot 10^{-4}$) и мягкой ($A\sqrt{|\alpha|} = 0{,}21$, $\kappa = 2\cdot 10^{-4}, k = 1$) характеристике. В последнем случае поле скоростей представляет собой результат наложения бегущих навстречу друг другу импульсов, сливающихся при $t = T/4$ в симметричный импульс вдвое большей амплитуды, который затем распадается на разбегающиеся импульсы, меняющие свою полярность при отражении от границ.

Рассмотрена задача об устойчивости найденных периодических колебаний относительно медленных изменений амплитуды и фазы. Задача сводится к поиску квазистационарных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для анализа полученных уравнений использован метод усреднения по стационарным волнам. Показано, что стационарные волны могут быть неустойчивы по отношению к возмущениям их амплитуды и фазы. Эта неустойчивость проявляется в виде периодического искажения профиля волны, который вследствие ее модуляции может изменяться от импульсного до синусоидального.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке и РФФИ (грант № 00-02-16582).

Литература

1. Милосердова И.В., Потапов А.И. Продольные колебания в стержне с нелинейно упругим закреплением // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 178-183.
2. Sibiriakov B.P. Plane waves in porous or cracked media with internal friction. // Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1998,V.29, P.161-167.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕХАНИЗМЫ В ОБРАЗОВАНИИ ЗВУЧНОЙ РЕЧИ

В.П.Бондаренко, В.П.Коцубинский, Р.В.Мещеряков

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

Введение

Многие механизмы образования звучной речи в настоящее время исследованы не полностью. Имеются явные противоречия между моделями Фанта и другими, аналогичными моделями речеобразования и структурой речевого сигнала. Главное противоречие состоит в том, что эти модели предполагают независимость источника возбуждения от характеристик речеобразующего тракта, т.е. являются линейными.

Основные положения

В используемых электроакустических аналогах моделей возбуждения звучной речи голосовые складки, формирующие импульсы основного тона, представляются в виде источника тока или напряжения. Это позволяет речевой сигнал представить в виде:

$$X(j\omega) = P(j\omega) \cdot H(j\omega) \text{ ,} \qquad (1)$$

где $P(j\omega)$ – спектр импульсов возбуждения; $H(j\omega)$ – коэффициент передачи речеобразующего тракта.

Множество, попыток реализовать синтез речи по такой схеме (синтез по правилам) не дали удовлетворительного результата. Практически всегда, синтезированная речь является неестественной, имеет ярко выраженный «машинный характер». В последнее время ряд исследований направлен на то, чтобы в моделях речеобразования учесть возможные нелинейные механизмы.

В работах [1,2], было показано, что процесс образования звучной речи необходимо рассматривать с учетом полной структуры системы речеобразования. Т.е. с учетом взаимовлияния всех ее компонент: легкие, бронхи, трахея, гортань, вместе с голосовыми складками, речеобразующий тракт.

Структурно процесс образования звучной речи может быть представлен обобщенной схемой (рис.1), где Pa – атмосферное давление; $Zн$ – нагрузка излучателя; P_1 и P_2 – подскладочное и надскладочное давление соответственно.

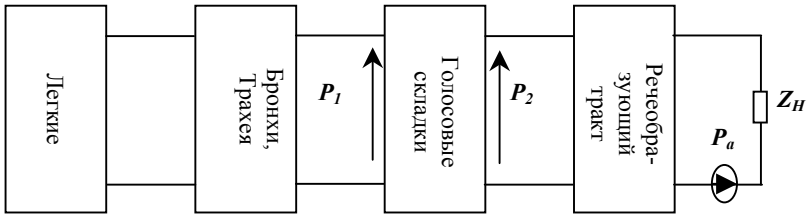


Рис. 1

Для стационарных звуков можно считать, что бронхи, трахея и речеобразующий тракт описывается системами дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Легкие описываются дифференциальными уравнениями с параметрами зависящими от времени [1], а движение голосовых складок нелинейными дифференциальными уравнениями. Легкие, в простейшем случае, можно представить в виде некоторого объема (электрический эквивалент емкости - *Сл*), который изменяется во времени.

Основным в рассматриваемой схеме речеобразования является влияние давлений P_1 и P_2 на движение голосовых складок. Давление P_1 является функцией от закона изменения емкости *Сл*, выходного импеданса бронхов и трахеи и проводимости голосовой щели, а давление P_2 – от воздушного потока через раскрытую голосовую щель и входного импеданса речеобразующего тракта. Таким образом, в данной схеме явно просматривается взаимовлияние процессов, происходящих в подскладочной и надскладочной областях на движение голосовых складок и наоборот. Ясно, что образованный сигнал не будет описываться соотношениями вида (1). Более того, следует ожидать, что при определенных соотношениях параметров входных и выходных импедансов, а также параметров голосовых складок возможны неустойчивые движения.

Движения голосовых складок описываются достаточно сложными дифференциальными уравнениями [3]. Однако, для моделирования рассматриваемых эффектов достаточно воспользоваться нелинейным дифференциальным уравнениямем второго порядка, вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta(x)\cdot\frac{dx}{dt} + \omega^2(x)\cdot x = P_1 - P_2 - \gamma\cdot\vartheta^2 \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{x}$ – площадь раскрытия голосовой щели;

$\delta(x)$ – потери в голосовых складках;

$\omega(x)$ – резонансная частота;

γ - коэффициент учитывающий влияние сил Бернулли;

υ – скорость воздушного потока.

Модель движения голосовых складок (2) соответствует миэластической гипотезе, введением же дополнительного возмущения в правую часть уравнения (2) можно провести ее в соответствие с нейрохроностической гипотезой.

Считается, что проводимость голосовой щели пропорциональна ее площади и определяется тремя компонентами, связывающими скорость воздушного потока и перепад давления:

$$\frac{d(L\cdot\vartheta)}{dt} + R\cdot\vartheta + \lambda\cdot\vartheta^2 = P_1 - P_2 \qquad (3)$$

где $L = \frac{\alpha}{x}$; $R = \frac{\beta}{x}$; α и β коэффициенты пропорциональности; λ – коэффициент, учитывающий влияние сил Бернулли.

Модель бронхов и трахеи в простейшем случае может быть представлена дифференциальными уравнениями второго порядка, а речеобразующий тракт с учетом

пяти формант и объема гортанного желудка – двенадцатого. Частично эти уравнения на основе электрических аналогов приведены в работах [1,2].

Результаты численного моделирования

Исследования показали, что устойчивые колебания голосовых складок имеют место в определенной зоне резонансной частоты и постоянной времени выходного импеданса трахеи. Эти параметры определяют верхнюю границу устойчивых колебаний и не зависят от типа звука. Однако, появление устойчивых колебаний голосовых складок зависят от резонансных частот $F_Г$ гортанного желудка и типа генерируемого звука. На рис.2 приведена верхняя граница (кривая 1), и нижние границы устойчивых колебаний для звуков «О» – кривая 2 и «А» – кривая 3, при резонансной частоте $F_Г$=3000 Гц. На рис. 3 приведены давление $P_Т$ и скорость воздушного потока через голосовую щель для случая генерации звука «А», на начальном участке возникновения колебания.

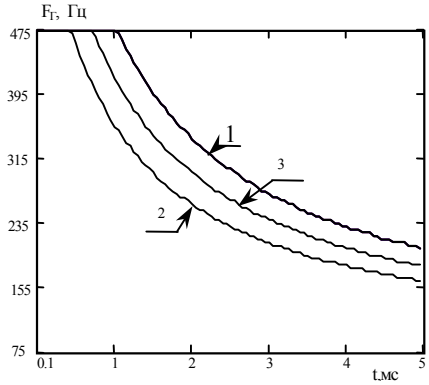


Рис.2

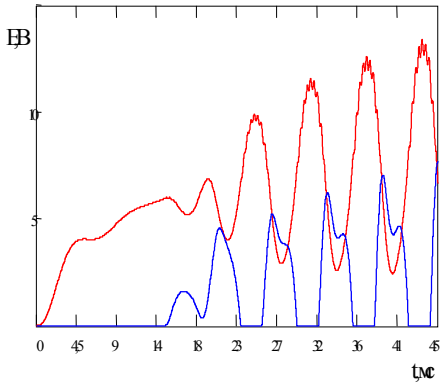


Рис.3

В заключении следует отметить, что даже в такой упрощенной модели сгенерированные звуки являются весьма близкими к естественным.

Литература

1. Бондаренко В.П., Коцубинский В.П., Мещеряков Р.В. Влияние легких на колебания голосовых связок при генерации вокализованных звуков // Сборник трудов XI сессии российского акустического общества, М: ГЕОС 2001, Том 3, 214с., 56-59с.
2. Bondarenko V.P., Kotsubinski V.P., Metcherjakov R.V. Processing ‘SPECOM’ 2001’. International workshop Speech & Computer - Moscow: MSLU 2001, 262c., C.251-254
3. Сорокин В.Н. Теория речеобразования - М.: Радио и связь, 1985, с.312.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В.А.Александров, В.Б.Железный, В.А.Майоров, Д.Б.Островский

ФГУП ЦНИИ «Морфизприбор»

В начале 60-х годов прошлого века П.Вестервельт (США) и независимо от него В.А.Зверев и А.И.Калачев (СССР) теоретически обосновали возможность построения параметрических излучающих антенн (ПИА) [1]. Для построения ПИА предлагалось с обычной акустической антенны излучать одновременно и однонаправлено два акустических сигнала с частотами f_1, f_2 (частоты накачки или первичные), при распространении которых в нелинейной среде будет образовываться сигнал разностной частоты $F=|f_1-f_2|$, обладающий направленными свойствами. Уже в первых экспериментах подтвердилась возможность реализации ПИА, при этом количественные значения развиваемого давления $P_$ и характеристики направленности $D_$ на разностных частотах заметно расходились с данными по моделям Зверева–Калачева и Вестервельта. Поэтому было предложено несколько новых теоретических моделей ПИА: Берктея–Лихи, Моффетта–Меллена, Фенлона, на базе уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова, метод «волновых фронтов» [1-4].

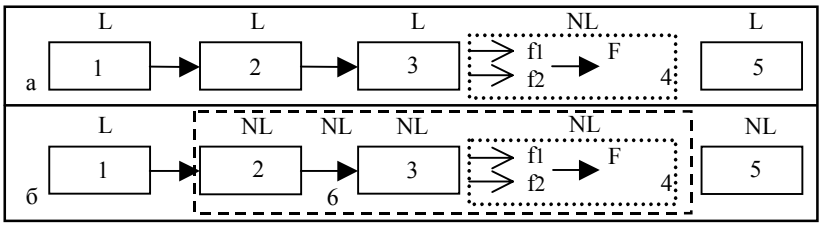


Рис. 1

Однако, развитие различных методов теоретического описания ПИА не привело к заметному расширению областей их использования, несмотря на хорошо известные положительные свойства ПИА [2-3]. Одной из причин такого положения стало то, что основное внимание уделялось физико-математическому описанию генерации параметрических сигналов в среде, при этом практически не обращалось внимания на физико-технические особенности построения ПИА [4] и вспомогательного оборудования для определения их параметров [5]. Данные различия иллюстрируются рис.1, где представлены линейные и нелинейные элементы при физико-математическом (рис.1а) и физико-техническом (рис.1б) подходах к построению ПИА, и обозначено: 1- схема формирования сигналов накачки; 2- усилитель мощности (УМ); 3- акустическая излучающая антенна (ИА); 4- среда распространения с нелинейными свойствами; 5- приемно-измерительная схема; 6- связанная система «усилитель мощности – излучающая антенна, нагруженная на среду распространения сигналов» (система УМ-ИА) с собственными нелинейными свойствами; L и NL означают линейные и нелинейные свойства элементов схемы ПИА, соответственно. Учет особенностей реальных ПИА (рис.1б) показывает, что достаточно линейные

(или слабо нелинейные) УМ и ИА при объединении в систему УМ-ИА могут проявлять различные нелинейные свойства. При этом в ряде случаев при воздействии на систему бигармонических сигналов экспериментально наблюдается факт увеличения нелинейных искажений в системе УМ-ИА по сравнению с нелинейными искажениями, взятыми по всем элементам системы раздельно.

Характерные нелинейные искажения в системе УМ-ИА, наблюдаемые при бигармоническом возбуждении ПИА, и их влияние на свойства ПИА даны в табл.1. Для сравнения на рис.2;3 представлены спектры первичных сигналов ПИА при нелинейных искажениях и при их отсутствии, соответственно (по оси абсцисс отложена частота, а по оси ординат - акустическое давление на входе в среду).

Таблица 1.

Характер нелинейности в системе «УМ–ИА»	Влияние нелинейных искажений на акустические характеристики ПИА
а) Появление сигналов на частоте nF, n=1…5	Прямое ненаправленное излучение сигналов частот nF; повышение уровня бокового поля на частоте F.
б) Появление сигналов на частотах $f_1 \pm nF$, $f_2 \pm nF$	При уменьшении глубины модуляции – снижение давления ПИА на разностной частоте F.
в) Взаимовлияние сигналов частот f_1 и f_2	Снижение уровня давления на частотах f_1, f_2. Снижение уровня давления на разностной частоте F.
г) Появление сигналов на частотах $2f_1$, $2f_2$, (f_1+f_2)	Незначительное снижение давления на частотах f_1, f_2. Влияние на свойства ПИА не исследованы.

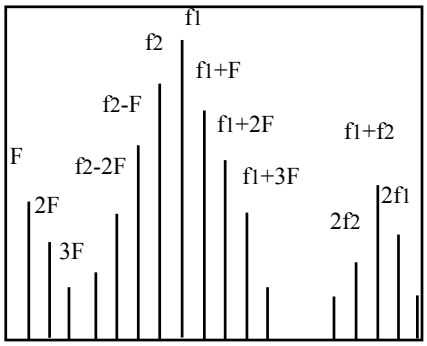


Рис. 2

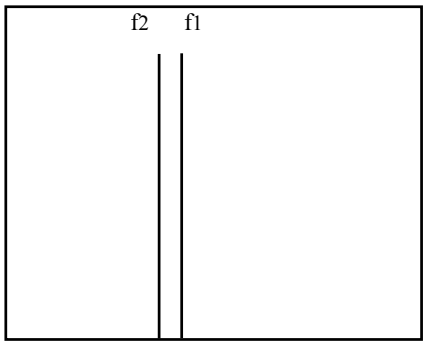


Рис. 3

Анализ причин сложного нелинейного поведения системы УМ-ИА требует более детального рассмотрения с учетом конкретных системотехнических решений УМ и ИА ПИА. Однако для общих случаев фундаментальных исследований или практических разработок ПИА можно указать на ряд положений по контролю нелинейных искажений в системе УМ-ИА. Так, например, для ПИА с пьезокерамическими плоско-поршневыми ИА при первичном бигармоническом возбуждении на частотах f_1 и f_2 следует придерживаться следующих положений:

$$P_{-}(F,R) \geq k_N \xi(F) U_N(F)\,; \qquad (1)$$

$$P_{-}(F,R)\min|D_{-}(F)| \geq k_N \xi(F) U_N(F)\,; \qquad (2)$$

$$P(f_1) \geq k_N \xi(f_1+nF) U_N(f_1+nF), \quad P(f_2) \geq k_N \xi(f_2-nF) U_N(f_2-nF)\,; \qquad (3)$$

$$\sqrt{P(f_1)P(f_2)} \geq k_N \sum_n \{\xi(f_1+nF) U_N(f_1+nF) + \xi(f_2-nF) U_N(f_2-nF)\}; \qquad (4)$$

$$\text{при } P_{-}(F,R) = \frac{\sqrt{2}\pi\varepsilon F P(f_1) P(f_2)}{\rho c^3} \int_{R_0}^{R} \frac{\exp(-2r\alpha_f)}{r} dr, \; R \geq 2R_0, \; R_0 = f_0 S/c,$$

где: $P_{-}(F,R)$, $P(f_1)$, $P(f_2)$ – приведенные к 1 м эффективные давления на частотах F, f_1, f_2 ($f_1 > f_2$), соответственно; R – заданная дистанция контроля акустических параметров ПИА в среде; ξ – чувствительность ИА в режиме излучения; U_N – электрическое напряжение на входе ИА; min $|D_{-}(F)|$ – заданный измеряемый минимальный уровень бокового поля ПИА на частоте F; ε – параметр нелинейности, ρ – плотность и c – скорость звука в среде; α_f – коэффициент затухания на частоте f_0 в среде; $R_0 = f_0 S/c$; S – площадь излучающей поверхности ИА; $f_0 = (f_1+f_2)/2$; k_N – коэффициент превышения сигналов ПИА над сигналами нелинейных искажений (рекомендуется: k_N=5…10, n=1,2,3,4,5,6,7). Здесь значение $P_{-}(F,R)$ берется по модели «волновых фронтов» в режиме до насыщения [4]. Условие (1) следует применять при измерении $P_{-}(F,R)$ на оси ПИА, условие (2) следует учитывать при измерении характеристик направленности ПИА, а условия (2,3) позволяют контролировать качество формирования первичных бигармонических сигналов ПИА.

В целом физико-технический подход указывает на необходимость учета собственных нелинейных искажений в мощных ПИА и степени влияния этих искажений на параметры формируемого параметрического излучения в среде.

Литература

1. Островский Д.Б. О параметрических антеннах // Из истории отечественной гидроакустики. СПб.: Изд. ЦНИИ им. акад.А.Н.Крылова,1998. С.442-459
2. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика - Л.: Судостроение, 1981. 264 с
3. Наугольных К.А., Островский Л.А., Сутин А.М. Параметрические излучатели звука // Нелинейная акустика. Теоретические и экспериментальные исследования, Под ред. В.А.Зверева, Л.А.Островского, Горький: ИПФ АН, 1980, С.9-30.
4. Железный В.Б., Островский Д.Б. Проблемы построения акустических параметрических профилографов // 4-ая Межд. конф. по морским интеллектуальным технологиям Моринтех 2001. Сб.докл., т.1.СПб.:НИЦ«МОРИНТЕХ», 2001, С.261-265
5. Железный В.Б., Островский Д.Б. О совершенствовании схемы измерения характеристик параметрического излучателя //Судостр. пром-сть. Сер. Общие вопросы судостроения. Стандартизация и метрология. 1992, Вып.13, С.59-64.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СОЛИТОНОВ В СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ

А.И.Землянухин, Е.И.Штейнберг

Саратовский государственный университет

Нелинейные волновые процессы в деформируемых системах традиционно анализируются на основе различных модификаций уравнения КдВ [1]. Для упругих сред с микроструктурой характерно наличие двух дисперсий, описываемых производными третьего и пятого порядков по пространственной переменной. При этом упругий потенциал либо квадратичен, либо представляет собой полином четвёртой степени [2]. В настоящей работе проводится численное исследование взаимодействия уединённо-волновых решений неинтегрируемого эволюционного уравнения пятого порядка

$$u_t - c_1 u^2 u_x \pm c_2 u^4 u_x - c_3 u_{xxx} + c_4 u_{xxxxx} = 0 \qquad (1)$$

Качественный анализ этого уравнения проведён в [3], где найдено преобразование Бэклунда и построены классы точных солитоноподобных и ударно-волновых решений.

Будем исходить из двухслойной неявной разностной схемы $O(\tau, h^2)$ для уравнения (1):

$$\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - (c_1 \mp c_2 (u_j^n)^2)(u_j^n)^2 \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} + \\
&+ c_3 \frac{u_{j-2}^{n+1} - 2u_{j-1}^{n+1} + 2u_{j+1}^{n+1} - u_{j+2}^{n+1}}{2h^3} \\
&+ c_4 \frac{u_{j-3}^{n+1} - 4u_{j-2}^{n+1} + 5u_{j-1}^{n+1} - 5u_{j+1}^{n+1} + 4u_{j+2}^{n+1} - u_{j+3}^{n+1}}{2h^5} = 0
\end{aligned} \qquad (2)$$

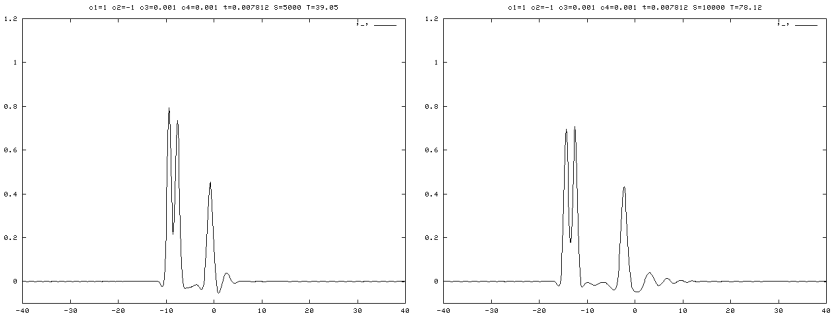
Абсолютная устойчивость схемы (2) доказывается при помощи метода разделения переменных с использованием стандартной подстановки $u_j^n = \xi^n e^{ikjh}$:

$$\begin{aligned}
&|\xi|^2 = \frac{h^{10}}{h^{10} + \lambda^2} \\
&\lambda = 2\tau[-h^4 U \sin\varphi + h^2 (2c_3 \sin\varphi - \sin 2\varphi) + \\
&\qquad c_4 (\sin 3\varphi - 4\sin 2\varphi + 5\sin\varphi)] \\
&U = (c_1 \mp c_2 (u_j^n)^2)(u_j^n)^2, \quad \varphi = jkh
\end{aligned} \qquad (3)$$

Очевидно, что $|\xi| \le 1$ для всех значений λ. Схема абсолютно устойчива.

Рассмотрим эволюцию начального гауссова импульса. В расчетах принималось:

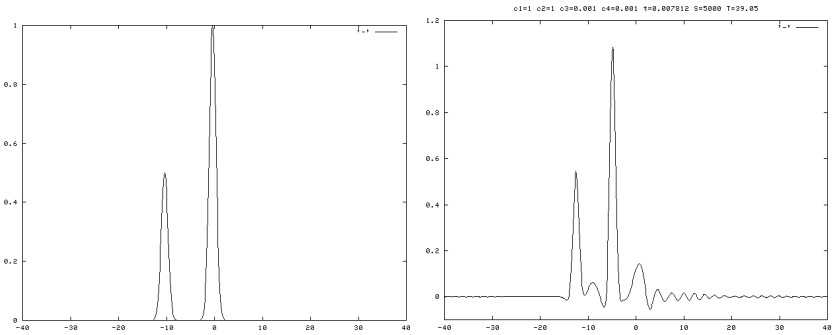
$$u(x,0) = e^{-x^2}$$
$$c_1 = 1.0, c_2 = -1.0, c_3 = 0.001, c_4 = 0.001. \tag{3}$$

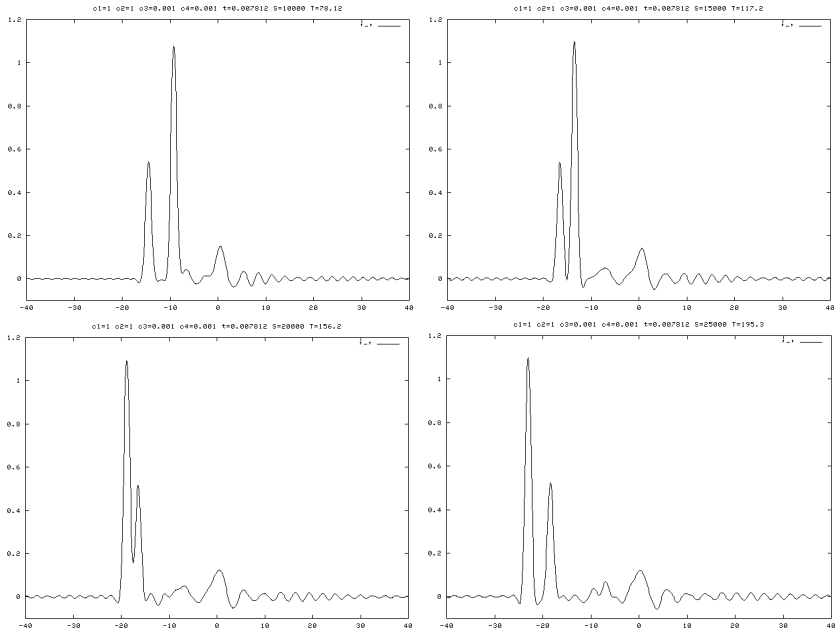


Наличие малых, но конечных коэффициентов дисперсий в уравнении (1) компенсирует действие нелинейностей на исходный импульс. Действительно, возникающие в начальные моменты времени осцилляции на заднем фронте не позволяют ему опрокинуться. В это время на передней части возмущения образуется "двуствольный" бризер, уносящий с собой большую часть энергии. Два его пика "дышат", обмениваясь энергией. Из задней части импульса образуется ряд солитонов, амплитуды которых убывают по линейному закону.

Теперь рассмотрим взаимодействие двух уединенно-волновых решений уравнения (1). В расчетах принималось:

$$u(x,0) = e^{-x^2} + e^{-(x+10)^2},$$
$$c_1 = 1.0, c_2 = 1.0, c_3 = 0.001, c_4 = 0.001. \tag{4}$$





Здесь можно наблюдать классическое солитонное взаимодействие двух уединенных волн. Волна большей амплитуды догоняет волну меньшей амплитуды и после непродолжительного нелинейного взаимодействия отделяется от нее, не меняя своей формы.

Литература

1. Кудряшов Н.А., Сухарев М.Б. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка для описания волн на воде. // Прикладная математика и механика Т.65., Вып.5, 2001.
2. Salupere A., Engelbrecht J., Maugin G.A. Solitonic structures in KdV-based higher-order systems // Wave Motion, №34 (2001), 51-61.
3. Zemlyanykhin A.I.: Exact solutions of the fifth-order nonlinear evolution equation // Regular and chaotic dynamics. 1999, V.4, №3, 67-69.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДАХ С ТРЕЩИНАМИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В.Е. Назаров, А.В. Радостин

Институт прикладной физики РАН

Исследования нелинейных акустических эффектов в микронеоднородных средах актуальны как для развития общей теории нелинейных волновых процессов, так и для создания нелинейных методов диагностики подобных сред. Для решения таких задач необходимо знание уравнения состояния среды, т.е. обобщенной зависимости “напряжение - деформация”. Эту зависимость можно восстановить или реконструировать на основе подробных экспериментальных исследований различных нелинейных эффектов, или получить теоретически из физической модели среды, основанной на знании ее микроструктуры, т.е. тех дефектов структуры, которые, в основном, и определяют акустическую нелинейность среды.

В работе [1] было получено (в кубичном приближении теории возмущений) уравнение состояния для нелинейного дефекта идеального твердого тела - трещины, частично заполненной вязкой несжимаемой жидкостью (рис.1). Это уравнение имеет вид:

$$\sigma(d) = K_0 d + \beta \dot{d} - g d^2 - \gamma d\dot{d} - q d^3 + \delta d^2 \dot{d}\,, \qquad (1)$$

где: σ - нормальное напряжение, действующее на поверхность трещины, H и $2d$ - равновесное (при σ=0) расстояние между поверхностями трещины и изменение этого расстояния под действием напряжения $\sigma\neq0$, $K_0=K-8\alpha\mu_0\cos\theta/H^2$, $\mu_0=(R_0/R)^2$ - равновесная концентрация жидкости в трещине, R и R_0 - радиус трещины и радиус окружности, ограничивающей жидкость на поверхности трещины, $K=3\pi E/8(1-\nu^2)R$, E и ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона твердого тела, $\beta = 3\mu_0\eta R_0^2/H^3$, $g = -24\alpha\mu_0\cos\theta/H^3$, $\gamma = 30\mu_0\eta R_0^2/H^4$, $q = 64\alpha\mu_0\cos\theta/H^4$, $\delta = 180\mu_0\eta R_0^2/H^5$, α и η - коэффициент поверхностного натяжения и динамическая вязкость жидкости, θ - равновесный краевой угол.

При выводе уравнения этого уравнения в работе [1] полагалось, что поверхности трещин вне жидкости являются сухими и скольжение линии трехфазного контакта (твердое тело – жидкость – газ) вдоль этих поверхностей при относительно небольшой деформации трещины (вследствие адгезии, т.е. прилипания вязкой жидкости к твердому телу) не происходит. В настоящей работе описывается другая ситуация (и она, по-видимому, вполне реальна), когда поверхности трещины покрыты тонкой пленкой той же жидкости, смачивающей эти поверхности; в этом случае линия трехфазного контакта может по этой пленке скользить.

Наиболее просто уравнение состояния можно получить для стержня с трещинами, ориентированными вдоль его оси и однородно распределенными в его объеме. Для достаточно малых концентраций трещин (т.е. расстояние между трещинами существенно больше их радиусов и взаимодействием трещин можно пренебречь) и

радиусов трещин существенно меньших размеров поперечного сечения стержня, получено уравнение состояния в следующем виде:

$$\sigma(\varepsilon) = E\left[\varepsilon - 2\pi E\int_0^\infty \frac{R^2 N(R)}{\beta} D[\varepsilon(t)]dR\right] -$$

$$-2\pi E^4 \int_0^\infty \frac{R^2 N(R)}{\beta^4} D\left[\left(q+\delta\Omega\right)D^3[\varepsilon(t')] - \delta D^2[\varepsilon(t')]\varepsilon(t')\right]dR\,, \quad (2)$$

где $\Omega = K_0/\beta$ - релаксационная частота трещины, $D[\varepsilon(t)] = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(t')\exp[-\Omega(t-t')]dt'$.

Это уравнение является релаксационным и содержит одно линейное и два нелинейных (кубичных по амплитуде) релаксационных слагаемых. Линейная и нелинейная релаксация такой трещиноватой среды обусловлены вязкостью жидкости, находящейся в трещинах. Аналогичное нелинейное релаксационное уравнение состояния было получено в работе [2] в рамках реологической модели микронеоднородной среды, состоящей из цепочки линейных упругих и нелинейных вязкоупругих элементов.

В рамках этого уравнения методом возмущений проведено теоретическое исследование нелинейных волновых процессов, возникающих при распространении и взаимодействии сильной низкочастотной и слабой высокочастотной продольных акустических волн в таком стержне. Определены линейные декремент затухания и скорость акустической волны, а также параметры нелинейности для эффектов самовоздействия и взаимодействия этих волн и генерации третьей гармоники низкочастотной волны.

Например, для волны основной частоты получено следующее выражение:

$$\varepsilon_{1,0}(x,t) = \frac{\in_0 \exp(-A_1 k_{1,0} x)}{\sqrt{1+\frac{A_{1,0}}{4A_1}\in_0^2 [1-\exp(-2A_1 k_{1,0}x)]}} \times$$

$$\times \sin\left[\omega_{1,0}t - k_{1,0}x(1-B_1) + \frac{B_{1,0}}{2A_{1,0}}\ln\left(1+\frac{A_{1,0}}{4A_1}\in_0^2 [1-\exp(-2A_1 k_{1,0}x)]\right)\right]$$

где $k_{1,0} = \omega_{1,0}/C_0$, $C_0^2 = E/\rho$, $\in_0$ - амплитуда волны на излучателе,

$$A_1 = \pi E\int_0^\infty \frac{R^2 N(R)}{\beta}\cdot\frac{\omega_{1,0}}{\omega_{1,0}^2+\Omega^2}dR\,,\ B_1 = \pi E\int_0^\infty \frac{R^2 N(R)}{\beta}\cdot\frac{\Omega}{\omega_{1,0}^2+\Omega^2}dR\,,$$

$$A_{1,0} = \pi E^3\int_0^\infty \frac{R^2 N(R)}{\beta^4}\cdot\frac{\omega_{1,0}\left[6q\Omega+\delta(\Omega^2-\omega_{1,0}^2)\right]}{(\omega_{1,0}^2+\Omega^2)^3}dR\,,$$

$$B_{1,0} = \pi E^3 \int_0^\infty \frac{R^2 N(R)}{\beta^4} \cdot \frac{\left[3q(\Omega^2 - \omega_{1,0}^2) - 2\delta\omega_{1,0}^2\Omega\right]}{(\omega_{1,0}^2 + \Omega^2)^3} dR ,$$

На рис. 1, 2 представлены графики зависимостей параметров A_1 и $A_{1,0}$ для следующих значений параметров среды:

$N(R) = R^{-n} b/\pi H \int_{R_1}^{R_2} R^{2-n} dR$, $R_1 \le R \le R_2$, n=1..7, $b = 10^{-4}$, $R_1 = 5{,}5 \cdot 10^{-2}$ см, $R_2 = 5{,}5 \cdot 10^{-1}$ см, $\Omega_1(R_1) \cong 10^5$ с$^{-1}$, $\Omega_2(R_2) \cong 10^2$ с$^{-1}$, $\mu_0 = 1/2$, $H = 10^{-4}$ см, $E = 10^{11}$ г/см с^2, $\nu = 1/4$, $\Omega(R) \cong \left[\pi E H^3 / 8(1-\nu^2)\eta\mu_0^2 R^3\right] \sim R^{-3}$ (при $R << 3\pi E H^2 / 64(1-\nu^2)\alpha\mu_0 \cos\theta$).

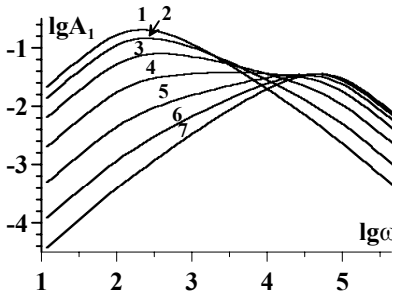


Рис. 1

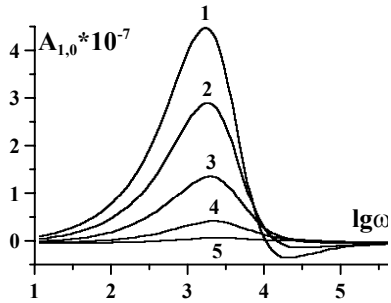


Рис. 2

Из рис. 1 видно, что для степенной функции распределения трещин по радиусам с показателем степени равной –4 существует довольно широкий частотный диапазон, в котором линейный декремент затухания практически не зависит от частоты. Из рис. 2 видно, что параметр нелинейного затухания меняет знак в некотором диапазоне частот, т.е. в среде кроме нелинейного ограничения амплитуды, также возможен эффект самопросветления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты N01-05-64417, N02-02-16237).

Литература

1. Nazarov V.E. // JASA, 2001, V.109, N6, P. 2642.
2. Nazarov V.E., Zaitsev V.Yu., Beliaeva I.Y. // Acustica - acta acustica, 2002, V.88, N1, P. 40.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДОСТИЖЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ В ДИАГНОСТИКЕ ЖИДКОЙ ИЗОЛЯЦИИ МАСЛОНАПОЛНЕННОГО ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ

М.М. Лукьянов

Златоустовские электрические сети ОАО "Челябэнерго"

Введение

При нынешнем состоянии российской энергетики, когда более 50% основного силового оборудования выработало свой ресурс, основной задачей диагностики становится продление срока службы оборудования вплоть до полной выработки его реального ресурса. При этом на первый план выходят методы диагностики, которые обеспечивают контроль текущего состояния оборудования на месте его установки, под рабочим напряжением и в процессе нормальной эксплуатации.

Теоретический анализ

Важным элементом высоковольтных электрических сетей, служащих для передачи электрической энергии от ее производителей до электроприемников потребителей является силовой трансформатор. Главным показателем исправности высоковольтного электрооборудования и безопасности его обслуживания является состояние электрической изоляции. В последнее время широкое развитие получили методы диагностики силового электрооборудования, основанные на измерении параметров акустических и электромагнитных полей высоковольтных аппаратов.

Работа узлов и элементов силового трансформатора проявляется как вибрации, которые через корпус и фундамент передаются в окружающую среду. Такие вибрации порождаются периодическими толчками. Шумы электрических обмоток, например, порождаются возвратно - поступательными движениями секций, магнитопровода – магнитостикционным эффектом, диэлектрика - находящегося в сильном электрическом поле, возникающими частичными разрядами (ЧР).

Все генерируемые шумы имеют гармоническую и квазигармоническую природу и при анализе проявляются в виде широкополосных сигналов. В некоторых случаях на отдельных участках корпуса могут возникать интенсивные резонансные колебания, возбуждающие интенсивные излучения дискретного шума. Таким образом спектр шума силового трансформатора представляет собой смесь непрерывного широкополосного сигнала с наложением на него дискретных составляющих.

Источниками шумоизлучения силового трансформатора являются более десятка конструктивных элементов и узлов, генерируемые ими шумы можно разделить на несколько основных вида: шумы магнитопровода, шумы электрических обмоток, шумы отводов обмоток и бака, шумы частичных разрядов.

Основным вопросом, на который должна ответить диагностическая система, является возможность или невозможность дальнейшей безопасной эксплуатации оборудования.

Контроль состояния изоляции по характеристикам частичных разрядов при эксплуатации, применяется редко. Это объясняется наличием различного рода помех при измерении ЧР на действующих подстанциях. Приборы для измерения ЧР не обеспечивают выделения необходимого уровня сигналов ЧР из помех, поэтому нижний регистрируемый уровень сигналов ЧР, определяемый верхним уровнем помех, оказывается слишком большим и не обеспечивает надежного обнаружения дефектов изоляции в полевых условиях. Приборы не обеспечивают регистрации амплитудно - фазовых распределений сигналов ЧР, без чего идентификация дефектов изоляции становится невозможной. Это в основном ограничивает применение данного метода в эксплуатации.

Для решения этой диагностической задачи в [1] предложена идея использования нелинейного параметрического взаимодействия колебаний в маслонаполненном электрооборудовании.

В силовых и измерительных трансформаторах, в других электротехнических изделиях широко применяются жидкие изоляционные материалы. Наиболее распространенный в энергетике жидкий диэлектрик – это трансформаторное масло.

Под воздействием электрического поля в трансформаторном масле могут возникать и изменяться газовые микрообъемы в следствии явления электрострикции.

Генерация газовых пузырьков происходит при вибрации в масле твёрдых тел. Вибрация приводит к появлению в масле локальных зон пониженного давления, в некоторых случаях значительного размера, в которых растворенный в масле газ может выделятся в виде пузырьков.

Обнаружение пузырьков газа, как предвестников ЧР, содержащихся в трансформаторном масле, предлагается решить с позиции взаимодействия двух монохроматических колебаний. Если пузырёк находится в поле звукового давления двух частот

$$P = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \qquad (1)$$

то он излучает волны с комбинационными частотами [2].

Если частоты вынуждающих сил близки, то на основании полученных в [2] уравнений можно разработать метод измерения газового включения в изоляционной жидкости, как признака дефектной области. Для определения газового включения, необходимо измерить величину давления ВРЧ. Определяется величина амплитуды колебаний объема пузырька измеренной волны разностной частоты. По амплитуде колебаний газовой полости определяется размер газового включения R_0. Зная взаимосвязь размеров газовых включений в изоляционной жидкости с мощностью и интенсивностью частичных разрядов, которые могут развиться в этой газовой полости можно сделать заключение о состоянии диэлектрика.

Для апробации предложенного метода определения размеров газового включения находящегося в жидкой изоляции под воздействием двух колебаний проведено математическое моделирование, которое описывается в следующем разделе

Модельный эксперимент

В качестве примера, при воздействии на газовое включение поля давления двух частот накачки 750 кГц и 725 кГц значением 0.2 Па каждое, на расстоянии 0.3 м,

определена зависимость давления ВРЧ от размеров пузырька представлена на рис. 1.

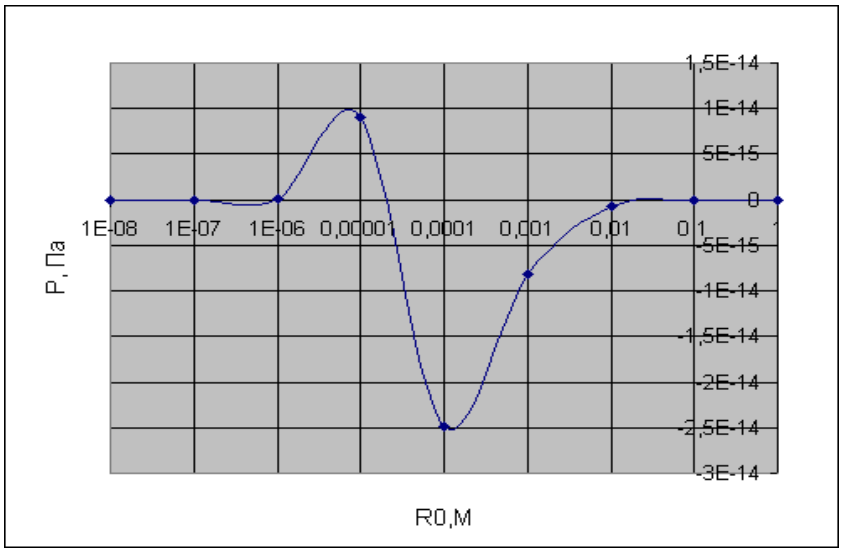


Рис. 1

При значении частоты ВРЧ равной 25кГц определяется область размеров газового пузырька в диапазоне 10^{-6} - 10^{-2}м.

Разработка и использование диагностических технологий на принципах нелинейного параметрического взаимодействия колебаний для обнаружения газовых включений, как предвестников ЧР в диэлектрике, позволит выявить дефектные области изоляции задолго до возникновения электрических разрядов.

Литература

1. Соболев Н. Н., Колесов В. И., Лукьянов М. М., Харисов Э. А. Новое в технической диагностике // Новое в российской электроэнергетике № 3. 2001.
2. Заболотская Е.А., Солуян С.И. Излучение гармоник и комбинационных частот воздушными пузырьками //Акуст. журн. 1972. Т.18, С.396.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

Е.Б. Постников

Курский государственный педагогический университет

Среди современных проблем магнитоакустики, как и теории упругости вообще, в последнее время уделяется значительное внимание волновым процессам в средах, облдающих микроструктурой [1]. В работах [1, 2] рассмотрены случаи большого магнитного числа Рейнольдса $Rm=\sigma\mu_0 c^2/\omega$. В то же время теоретический и практический интерес представляет также и другой предельный случай, а именно - слабопроводящая среда ($Rm<<1$). Это связано с рассмотрением волновых процессах в металлокомпозитах с полимерной матрицей, одним из перспективных средств магнитотермоакустической обработки которых является комбинированное воздействие звукового и магнитного полей [3, 4].

В данной работе рассматривается распространение продольных магнитоупругих волн (вектор смещений $\mathbf{u}=(u_1(x_1,t),0,0)$) в невязкой, нелинейно-упругой среде плоской геометрии с микроструктурой, описываемой моделью Леру (микроструктура среды учитывается введением в уравнения движения тензора микродисторсии) [1]), обладающей однородной низкой электропроводностью. Система помещена в сильное постоянное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B_0}=(0, 0, B_0)$ и слабое переменное (гармоническое) с индукцией $\mathbf{b}=(0, 0, \delta_0 B0\exp(i\gamma t))$, где $\delta_0<<1$.

Комбинация уравнений, описывающих упругость микроструктурированной среды [1] с магнитоупругими в безындукционном приближении [5] в данном случае (rot $\mathbf{u}$=0) приводит к неоднородному нелинейному дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta_0\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\gamma_0\frac{\partial u}{\partial t}+2\delta_0\gamma_0 e^{igt}\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha_0\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\\&=-i\frac{\delta_0 g\gamma_0}{\varepsilon_0}xe^{igt}-i\frac{\delta_0^2 g\gamma_0}{\varepsilon_0}xe^{i2gt}\end{aligned}\qquad(1)$$

В уравнении (1) введены следующие безразмерные величины: проекция вектора перемещений $u=u_1/\varepsilon_0 L$, координата, $x=x_1/L$, время $t=tc_{||}/L$, , $g=\gamma L/c_{||}$ - (где $\varepsilon_0\sim10^{-4}$ - характерная величина упругих деформаций, L - характерная длина волны). Нелинейность, дисперсию и диссипацию и описывают следующие множители:

$$\alpha_0=\varepsilon_0\left(3+2\frac{A+3B+C}{\lambda+2\mu}\right),\quad \beta_0=\frac{4\mu M^2\operatorname{sign}M(1+\tilde{\nu})}{(\lambda+2\mu)L^2},\quad \gamma_0=L\frac{\sigma B_0^2}{\rho c_{||}^2}=\frac{Co\cdot Rm}{g}.$$

где λ,μ,A,B,C - упругие модули Ламе и Ландау, M и $\tilde{\nu}$ - константы, характеризующие микроструктуру среды, Co и Rm – числа Каулинга и магнитное число Рейнольдса.

Решение уравнения (1) будем искать методом нормальных форм [5]. Переменные $v = \partial u/\partial t$ и $\varepsilon = \partial u/\partial x$ для длинноволновых возмущений (малой дисперсии) допускают введение нормальных волн U_1 и U_2 по формулам

$$v = U_1 - U_2\,,\ \varepsilon = -\left[\left(U_1 + U_2\right) + \frac{\beta_0}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(U_1 + U_2\right)\right].$$

Система уравнений, которой удовлетворяют связанные нормальные волны:

$$\begin{aligned} &\pm\frac{\partial U_{1,2}}{\partial t} + \frac{\partial U_{1,2}}{\partial x} - \beta_0\frac{\partial^3 U_{1,2}}{dx^3} \pm \gamma_0 U_{1,2} \pm 2\delta_0\gamma_0 e^{igt} U_{1,2} = \\ &= \frac{\alpha_0}{4}\frac{\partial\left(U_1 + U_2\right)^2}{\partial x^2} - i\frac{\delta_0 g\gamma_0}{\varepsilon_0} x e^{igt} - i\frac{\delta_0^2 g\gamma_9}{\varepsilon_0} x e^{i2gt} \end{aligned}, \qquad (2)$$

где «+» относится к уравнению для U_1, а «-» – к U_2.

Ищем общее решение (2) в виде общего и частного решений: $U_{1,2} = U_{1,2}^{(\text{п})} + U_{1,2}^{(p)}$ .. Учитывая, что нелинейный член содержит обе нормальные волны только в виде суммы, ищем частное решение неоднородного уравнения виде: $U_{1,2}^{(p)} = A(t) \pm B(t)x$. В таком случае оно будет совпадать с решением линейной системы и будет иметь вид:

$$A = -\frac{\delta_0\gamma_0}{\varepsilon_0}\left(e^{igt} + \frac{\delta_0}{2}e^{i2gt}\right),\ B = -i\frac{\delta_0\gamma_0}{\varepsilon_0 g}\left(e^{igt} + \frac{\delta_0}{4}e^{i2gt}\right).$$

При подстановке $U_{1,2} = U_{1,2}^{(g)} + U_{1,2}^{(p)}$ в (2) приходим к:

$$\begin{aligned} &\pm\frac{\partial U_{1,2}^{(g)}}{\partial t} + \left(1 + i\frac{\alpha_0\delta_0\gamma_0}{2\varepsilon_0 g}e^{igt}\right)\frac{\partial U_{1,2}^{(g)}}{\partial x} - \frac{\beta_0}{2}\frac{\partial^3 U_{1,2}^{(g)}}{\partial x^3} \pm \gamma\left(1 + 2\delta_0 e^{igt}\right)_0 U_{1,2}^{(c)} = \\ &= -\frac{\alpha_0}{4}\frac{\partial\left(U_1^{(g)} + U_2^{(g)}\right)^2}{\partial x} \end{aligned}. \qquad (3)$$

Таким образом, на $U_{1,2}^{(g)}$ магнитоупругие эффекты сказываются в виде появления диссипативного члена, связанного с наличием постоянного сильного магнитного поля и существованием явной зависимости коэффициентов от времени, возникшей благодаря нелинейному взаимодействию с колебаниями, порождаемыми переменным магнитным полем.

Для решения (3) воспользуемся методом Уизема [6]. Будем искать решения в виде бегущих волн: $U_{1,2}^{(g)} = A_{1,2}(x,t)G_{1,2}[x \pm Vt + \varphi(x,t)]$, где $A_{1,2}(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ - медленно меняющиеся функции, а $G_{1,2}$ – известные [1, 5] решения уравнения нулевого приближения без учета взаимодействия нормальных волн, диссипации и временной зависимости коэффициентов.

Изменение амплитуды $A_{1,2}$ и сдвига фазы $\varphi_{1,2}$ описываются уравнениями:

$$\frac{\partial A_{1,2}}{\partial t} \pm c(t)\frac{\partial A_{1,2}}{\partial x} = -2\gamma_0 \Gamma A_{1,2}\,, \qquad \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial t} \pm c(t)\frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial x} = 0\,, \tag{4}$$

где $c(t) = 1 + \frac{\alpha_0 C_0}{4} e^{igt} \mp \frac{3\beta_0}{2}\frac{\left\langle G_{1,2}^{\|\,2}\right\rangle}{\left\langle G_{1,2}^{|\,2}\right\rangle}$, $\Gamma = \left(1 + 2\delta_0 e^{igt}\right)\left|\frac{\left\langle G^{\|} G_{1,2}\right\rangle}{\left\langle G_{1,2}^{|\,2}\right\rangle}\right|$,

где штрих и два штриха означают первую и вторую производные по ξ соответственно, а угловые скобки – усреднение по ξ.

Решение (4) методом характеристик [6] для задачи с начальными условиями $A_{1,2} = A_{1,2}^{(0)}(\zeta)$ при $t = 0$ имеет вид:

$$A_{1,2} = A_{1,2}^{(0)}\left(x \mp \left[1 \mp \frac{3\beta_0}{2}\frac{\left\langle G_{1,2}^{\|\,2}\right\rangle}{\left\langle G_{1,2}^{|\,2}\right\rangle}\right] t \mp \frac{\alpha_0 C_0}{4ig}\left[e^{igt} - \frac{\alpha_0 C_0}{4ig}\right]\right) e^{-\gamma_0 \Gamma t}\ ; \tag{5}$$

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}^{(0)}\left(x \mp \left[1 \mp \frac{3\beta_0}{2}\frac{\left\langle G_{1,2}^{\|\,2}\right\rangle}{\left\langle G_{1,2}^{|\,2}\right\rangle}\right] t \mp \frac{\alpha_0 C_0}{4ig}\left[e^{igt} - \frac{\alpha_0 C_0}{4ig}\right]\right) \tag{6}$$

Наличие магнитного поля сказывается на временном поведении распространения начальной модуляции, а также приводит к экспоненциальному затуханию амплитуды волны (5) с течением времени (множитель Г изменяется от 1 для гармонической волны до 0.5 для солитона). Из (11) видно, что величина сдвига фазы определяется только начальной модуляцией и остается неизменной.

Литература.

1. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой.- М.: Изд-во МГУ, 1999, 499 с.
2. Ерофеев В.И., Ковалев С.И. // В кн. Сборник трудов X сессии Российского акустического общества. Т.1.- М.: ГЕОС, 2000, С.160.
3. Ch. N. Vives,// Magnetohydrodynamics, 1996, vol. 32, № 2, p. 201-206.
4. Постников Е.Б., Соболев С.В. // Известия ВУЗов. Химия и химическая технология, 1999, т. 42, №6, с. 107.
5. Потапов А.И. Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах - Горький: Изд-во ГГУ, 1985, 107 с.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны - М.: Мир, 1977, 622 с.

ТЕПЛОВЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ СФОКУСИРОВАННЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ В БИОТКАНИ

М.А.Литвинова

Физический факультет Московского госуниверситета

Наряду с диагностическими и терапевтическими возможностями ультразвук в последнее время широко используется для терморазрушения биотканей с патологическими изменениями (так называемая ультразвуковая хирургия). Использование сфокусированного ультразвука с частотой в районе первых *МГц* позволяет локализовать зону терморазрушения и при реально достижимых (порядка нескольких *Вт/см*^{2}) интенсивностях на фокусаторе создать в фокальной области необходимые для некроза интенсивность (>*кВт/см*^{2}) и температуру (*80 – 100*^{o}*C*).

При таком высокоинтенсивном в фокальной области процессе нагревания в биоткани происходит много интересных физических явлений, большую роль среди которых играют эффекты теплового самовоздействия [1]. Для учета этих эффектов необходимо одновременно решать уравнение акустическое и теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\tau}\left[\dfrac{\partial p}{\partial z}-\dfrac{\delta c(T)}{c_0^2}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial\tau}-\dfrac{b}{2c_0^3\rho_0}\cdot\dfrac{\partial^2 p}{\partial\tau^2}\right]=\dfrac{c_0}{2}\Delta_\perp p, \quad c(T)=c_0+\delta c(T) \\ \dfrac{\partial T}{\partial t}=\chi\,\Delta T+\dfrac{q}{\rho c_v} \end{cases} \tag{1}$$

При $p=A\cdot\exp(ik\psi-i\omega\tau)$+к.с.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial z}+\alpha A+\dfrac{\partial A}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial r}+\dfrac{1}{2}A\,\Delta_\perp\psi=0 \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2=-\dfrac{\delta c}{c_0}+\dfrac{\Delta_\perp A}{2k^2A} \end{cases} \tag{2}$$

В безаберрационном [2] приближении

$$\psi(z,r,t)=\psi_0(z,t)+\frac{r^2}{2}\cdot\beta(z,t), \tag{3}$$

где $\beta = (\partial f/\partial z)/f(z,t)$ – кривизна волнового фронта, $f(z,t)$ – безразмерный характерный радиус пучка, для гауссова пучка

$$A=A_0\frac{\exp\left(-\dfrac{r^2}{a^2f^2(z,t)}\right)}{f(z,t)}\cdot\exp(-\alpha z) \tag{4}$$

получаем приращение температуры:

$$T = \frac{\alpha I_0 a^2}{\rho c_v \sqrt{\pi\chi}} \int_0^{\infty}\int_0^{t} dz' d\nu \frac{\exp\left(-\frac{(z-z')^2}{4\chi\nu}\right)}{\sqrt{\nu}} \frac{\exp(-2\alpha z')}{a^2 f^2 + 8\chi\nu} \exp\left(-\frac{2r^2}{a^2 f^2 + 8\chi\nu}\right) \qquad (5)$$

Нужно отметить автомодельность решения теплового уравнения наряду с уже привычной автомодельностью решения уравнения акустического, что возможно только лишь при единственной модели пучка – гауссовой [3].

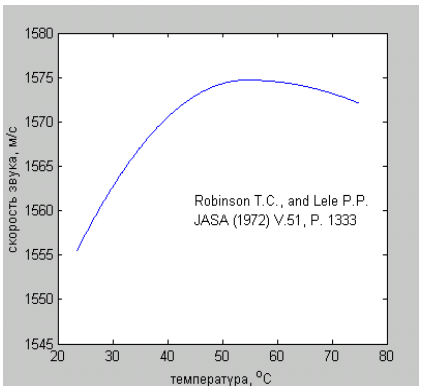


Рис. 1

Зависимость скорости звука от температуры, входящая в акустическое уравнение, специфична для биологических тканей. Если традиционно в вязких средах эта зависимость монотонна (что соответствует либо только самофокусировке, либо только самодефокусировке), то для биоткани эта зависимость имеет максимум в районе *50-60˚C*. На рис. 1 показана температурная зависимость скорости звука в тканях мозга кошки, полученная экспериментально. Наличие максимума скорости звука для биотканей, впрочем, неудивительно, так как для воды, из которой примерно на *80%* состоят биоткани, характерно такое же поведение скорости звука с температурой.

При указанных допущениях удается получить замкнутое уравнение для эффективного радиуса пучка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{b_{1,2}}{c_0} \cdot \frac{64}{9} \cdot \frac{\alpha I_0 a^2}{\rho c_v} \exp(-2\alpha z) \frac{t}{\left(2a^2 f^2 + 8\chi t\right)^2} \cdot f + \frac{1}{l_Д^2 f^3} \qquad (6)$$

Находя из этого уравнения эффективный радиус и подставляя его в решение теплового уравнения, получаем распределение температурного поля. Однако температурное поле – это не самая наглядная форма представления результатов теплового воздействия ультразвукового пучка на биоткань. На самом деле, результат теплового воздействия на биоткань определяется не только температурой, но и временем нагревания. Была предложена [4] эмпирическая формула для пересчета реального времени нагревания при температуре T в эквивалентное время нагревания при *43˚C*:

$$t_{экв43}(мин) = R^{T-6} \cdot t_T(мин) \qquad (7)$$

Это эквивалентное время нагревания, называемое тепловой дозой, легко пересчитывается на случай изменяющихся во времени и пространстве полей:

$$t_{экв43}(r,z,t)=\int_0^t R^{T(r,z,t')-6}\,dt' \qquad (8)$$

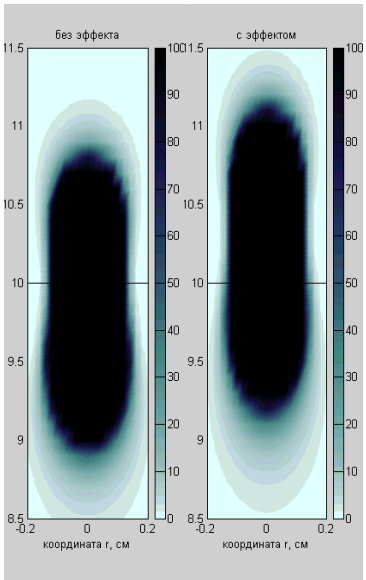


Рис. 2

Поверхности постоянной тепловой дозы определяют границы объемных областей, различающихся результатом теплового воздействия. В частности граница, соответствующая тепловой дозе 100 мин, заключает в себе область полностью разрушенных клеток. Получаемые таким образом распределения тепловых доз являются очень наглядной формой представления результатов теплового воздействия на биоткань в процессе ультразвуковой хирургии и дают исчерпывающую информацию о размерах, форме и положении области некроза. Рассчитанные распределения тепловых доз с учетом эффектов самовоздействия показывают, что смещения области некроза (см рис. 2), полученные с использованием предложенной нами модели зависимости скорости звука от температуры, оказываются намного меньше, чем при использовании традиционных монотонных зависимостей.

Выражаю благодарность научному руководителю Макову Ю. Н. за большую творческую помощь и плодотворные дискуссии при выполнении данной работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-02-16655).

Литература

1. C. Le Floch, M. Tanter, and M. Fink. //Appl. Phys. Lett., 1999, v.74, №20, p.3062.
2. Карабутов А. А., Руденко О. В., Сапожников О. А. //Акуст. журнал, 1988, т.34, с.644-650.
3. Маков Ю. Н. //Акуст. журнал, 2001, т.47, №3, с.393 – 400.
4. Sapareto S. A., Dewey W. C. //Int. J. Radiat. Oncol. Biol. Phys., 1984, v.10, p.787.

О СВОЙСТВАХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

С.В. Громов

Нижегородский филиал института машиноведения РАН

В работе анализируются свойства нелинейных периодических волн описываемых уравнением Буссинеска. Нелинейные нормальные волны определяются, как обобщение нормальных волн в линейных системах. В нелинейных системах с дисперсией нормальные волны относятся к классу свободно распространяющихся стационарных периодических волн, сохраняющих свою форму и скорость [1]. На основе аналитических решений анализируются зависимости скоростей, а также спектральных и дисперсионных характеристик нормальных волн от их периода и параметра нелинейных искажений (амплитуды).

Нормальные волны в среде с квадратичной нелинейностью

Рассматриваются свойства нелинейных нормальных волн на примере уравнения Буссинеска

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha\, c^2 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0\,. \qquad (1)$$

Оно описывает, в частности, электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике [2], упругие волны в среде с нелокальными взаимодействиями [3]. Для определенности будем считать, что уравнение (1) описывает волны деформации в твердом теле, тогда переменная $u(x,t)$ является величиной смещения точек среды от положения равновесия.

Обсудим общие свойства нелинейных волн вытекающие из условий инвариантности рассматриваемой модели. Легко видеть, что уравнение (1) всегда инвариантно относительно инверсии времени $(t \to -t)$, а его инвариантность относительно инверсии координаты $(x \to -x)$ выполняется лишь при условии изменения полярности волны $(u \to -u)$ или знака нелинейности α. Из инвариантности (1) вытекают два следствия: в среде с квадратичной нелинейностью волна, бегущая вправо, ведет себя точно также как и волна, бегущая влево, но имеющая противоположную полярность; нелинейная волна положительной полярности в среде с нелинейностью «жесткого типа» $\alpha > 0$ ведет себя также как волна отрицательной полярности в среде с нелинейностью «мягкого типа» $\alpha < 0$. Эти свойства позволяют ограничиться рассмотрением только волн положительной полярности в среде с нелинейностью «жесткого типа».

После подстановки выражения $u(x,t)=f(k\xi = kx - \omega t)$ ($k\xi = kx - \omega\, t = k\xi$ – фаза волны) в уравнение (1) проинтегрируем его по ξ и введем обозначение $w = du/d\xi$. В результате получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\beta \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \left(V^2 - c^2\right) w + \frac{\alpha c^2}{2} w^2 = d\,, \qquad (2)$$

где переменная $w(\xi = x\text{-}Vt)$ - имеет смысл поля деформации, а d – постоянная интегрирования. Решение данного уравнение имеет вид:

$$w(\xi) = w_3 - (w_3 - w_2)\mathrm{sn}^2(\kappa\xi, s) \tag{3}$$

где $\kappa=(\alpha c^2(w_3\text{-}w_1)/(12\beta))^{1/2}$ – величина, играющая роль аналога волнового числа ННВ; s – параметр, играющий роль коэффициента нелинейных искажений, w_j - действительные корни кубического уравнения $W(w) = -w^3+3(V^2\text{-}c^2)w^2/\alpha c^2+dw$ $(w_1 \le w_2 \le w_3)$ Решение (3) является трех параметрическим. Связь между корнями полинома и коэффициентами уравнения (2):

$$w_1 + w_2 + w_3 = 3\frac{V^2 - c^2}{\alpha c^2}; \quad w_1 w_2 w_3 = E; \quad w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_1 = d\ . \tag{4}$$

В качестве независимых параметров можно выбрать, например амплитуду волны $A=w_3\text{-}w_2$; ее скорость V; и коэффициент нелинейных искажений s. Для ННВ можно ввести параметр подобия $\sigma = (12\beta\kappa^2 s^2)/(\alpha c^2 A) = 1$, который при $s=1$ преобразуется в параметр подобия для солитона.

Из условия периодичности эллиптического синуса можно определить длину волны по формуле

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\,\mathrm{K}(s)}{\kappa} = \sqrt{\frac{12\beta}{\alpha c^2}}\,\frac{2s\,\mathrm{K}(s)}{\sqrt{A}}\,, \tag{5}$$

где $\mathrm{K}(s)$ - полный эллиптический интеграл первого рода. Среднее по периоду.

$$< w(\xi) >= \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} w(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi = w_3 - \frac{A}{s^2}\left(1 - \frac{2\,\mathrm{E}(s)}{\kappa\lambda}\right), \tag{6}$$

где $\mathrm{E}(s)$ - полный эллиптический интеграл второго рода.

В физических приложениях накладывают условие отсутствия постоянной составляющей деформации $<w(\xi)>=0$. Это дает еще связь между корнем w_3 кубического полинома $W(w)$ и параметрами волны. При этом нелинейная нормальная волна (3) описывается двух параметрическим семейством решений

$$w(\xi) = A\left[\frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{\mathrm{E}(s)}{\mathrm{K}(s)}\right) - \mathrm{sn}^2\left(\frac{\mathrm{K}(s)}{\pi}k\xi, s\right)\right]. \tag{7}$$

Другое эквивалентное представление ННВ

$$w(\xi) = \frac{A}{s^2}\left[\mathrm{dn}^2\left(\frac{\mathrm{K}(s)}{\pi}k\xi, s\right) - \frac{\mathrm{E}(s)}{\mathrm{K}(s)}\right], \tag{8}$$

где $\mathrm{dn}(u,s)$ – дельта-функция Якоби с периодом равным $2\mathrm{K}(s)$. Заметим, что рассматриваемые решения можно выразить через эллиптический косинус $\mathrm{cn}(u,s)$, поэтому ННВ часто называют кноидальными волнами.

Спектральный состав ННВ

Как уже отмечалось выше, $w(\xi)=\partial u/\partial x$ представляет собой нелинейную волну деформации, а волна смещения находится интегрированием $u(x,t)=\int w\,dx$ и равна

$$u(x,t)=\frac{A}{s^2}\frac{\pi}{k\,\mathrm{K}(s)}\mathrm{zn}\left(\frac{\mathrm{K}(s)}{\pi}k\xi,s\right), \tag{9}$$

где $\mathrm{zn}(\kappa\xi,s)$ - дзета-функция Якоби с периодом равным $2\mathrm{K}(s)$. Так как ННВ, описываются периодическими функциями, они могут быть представлены рядами Фурье. Коэффициенты Фурье-разложения определяют спектральный состав ННВ. Аналитические выражения для Фурье-разложений ННВ здесь не приводятся из-за их громоздкости. На рис. 1 представлен график нелинейной нормальной волны смещения при различных значениях параметра *s (0.6, 0.9, 0.99)*.

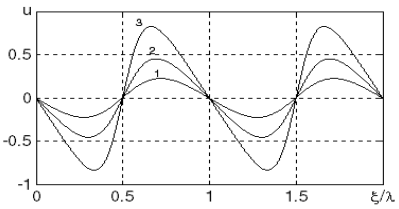


Рис. 1

Нелинейное дисперсионное уравнение

Связь между скоростью волны V ее волновым числом k и параметром нелинейных искажений s

$$V^2=c^2+\beta k^2\left(\frac{2\,\mathrm{K}(s)}{\pi}\right)^2\left[2-s^2-3\frac{\mathrm{E}(s)}{\mathrm{K}(s)}\right]. \tag{10}$$

Его можно записать в более привычном виде; если воспользоваться определением фазовой скорости нелинейной волны $V=\omega/k$.

$$\omega^2=c^2k^2+\beta k^4\left(\frac{2\,\mathrm{K}(s)}{\pi}\right)^2\left[2-s^2-3\frac{\mathrm{E}(s)}{\mathrm{K}(s)}\right]. \tag{11}$$

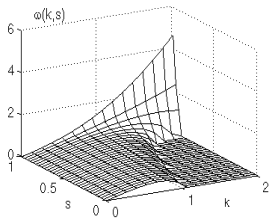


Рис. 2

В предельном случае, когда $s\to 0$ и $\mathrm{K}(s)\approx\mathrm{E}(s)\to\pi/2$, дисперсионное уравнение (11) приобретает известный вид линейного дисперсионного соотношения $\omega=c^2k^2-\beta k^4$. Это соответствует вырождению ННВ в нормальную волну линейной системы.

На рис. 2 представлена дисперсионная характеристика ННВ.

Исследования проводились при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-00386).

Литература

1. Громов С.В., Потапов А.И. //Известия Академии инженерных наук Российской Федерации – М. – Н. Новгород: НГТУ, 2001, т.32, с.188.
2. Ostrovsky L.A., Potapov A.I., Modulated Waves. Theory and Applications. Johns Hopkins Univ. Press. Baltimore-London, 1999, 386 p.
3. Ерофеев В.И., Потапов А.И. //Акустический журнал, 1991. т.37, Вып.3, с.477.

АКУСТИЧЕСКАЯ ПЕЛЕНГАЦИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

П.И. Коротин, А.М. Соков

Институт прикладной физики РАН

Интересным объектом для исследования являются ударные акустические волны, распространяющиеся в атмосфере с сохранением формы или некоторых инвариантов, связанных с их формой. Примером такой волны служит конус Маха, образующийся при сверхзвуковом движении тел. Фактически при движении тела со сверхзвуковой скоростью формируется минимум две волны давления: волна сжатия, носовая, и вторая волна – разрежения, концевая. Микрофон принимает их как единую структуру в виде N-волны. На рис.1 приведен пример сигнала с микрофона от сверхзвуковой пули.

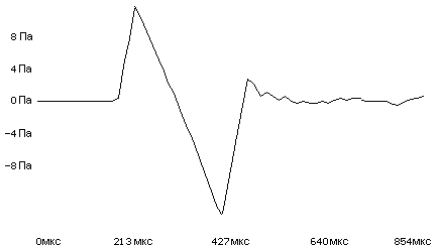


Рис.1.

Характеристики подобных ударных волн достаточно подробно проанализированы в [1]. В частности показано, что инвариантом распространения ударной волны будет величина равная амплитуде волны умноженной на куб её длительности. Вторым инвариантом является производная переднего фронта ударной волны, которая зависит только от скорости источника.

Основное отличие задачи пеленгации ударных волн от обыкновенных звуковых волн заключается в известной форме сигнала. Это дает возможность его выделения при высоком уровне помех засчет согласованной фильтрации и определения момента прихода волны при отсутствии шумов со сколь угодно высокой точностью. Разрешение акустической антенны, как известно, определяется волновыми размерами ее апертуры – отношением длины волны к длине антенны. Для ударной волны в идеальном случае предел разрешения углов прихода волны определяется только уровнем помех. Для нахождения момента прихода ударной волны достаточно выделить N-волну и определить момент появления переднего фронта N-образного импульса. Он не искажен отражением от земли и точность определения момента прихода при отсутствии шума не связана с частотой дискретизации сигнала в устройстве обрабатывающем сигнал.

Реально, кроме акустических помех, точность определяется и воздействием флуктуаций атмосферы на фронт распространяющейся волны. Именно они (флуктуации скорости ветра и температуры, дождь и снег) накладывают условия на оптимальный размер апертуры приемного устройства.

Пеленгация ударных волн имеет весьма интересное прикладное значение для определения траекторий полета пуль и огневых позиций стрелкового оружия, которую пытаются решить в различных вариантах [2, 3].

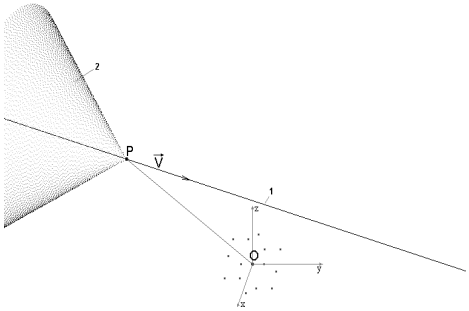


Рис.2.

Задачу пеленгации сформулируем следующим образом: по измеренным разностям времен прихода ударной волны на сгруппированные в пространстве акустические датчики (в дальнейшем моноблок) определить точку на траектории из которой ударная волна пришла, а также вектор скорости источника в этой точке.

На рис.2 изображен летящий со сверхзвуковой скоростью источник - P. При прохождении ударной волны через моноблок производится измерение относительного времени ее прихода на каждый из микрофонов.

Примем следущие утверждения: а) среда распространения однородна и изотропна; б) на участке траектории около точки генерации волны, пришедшей на моноблок движение источника является равномерным; в) траектория источника на сверхзвуковом участке прямолинейна.

Траекторию источника можно описать с помощью пяти параметров: Vx, Vy, Vz - проекции скорости на оси декартовой системы координат, а Xn и Yn – координаты точки пересечения траектории с плоскостью XOY. Также будем считать неизвестной величину скорости звука C, так как она меняется в зависимости от погодных условий.

Зависимость разности времен прихода ударной волны на i-ый и j-ый микрофоны описывается выражением, зависящим от шести параметров:

$$\Delta T_{ij}(\vec{V}, Xn, Yn, C) = \frac{(\vec{P}_{in} - \vec{P}_{jn}) \cdot \vec{V}}{V^2} + \sqrt{\frac{1}{C^2} - \frac{1}{V^2}} \cdot \left(\sqrt{P_{in}^2 - \frac{(\vec{P}_{in} \cdot \vec{V})^2}{V^2}} - \sqrt{P_{jn}^2 - \frac{(\vec{P}_{jn} \cdot \vec{V})^2}{V^2}}\right) \quad (1)$$

где $\vec{P}_{in}$ - вектор, из точки $\{Xn, Yn, 0\}$ в точку $\{X_i, Y_i, Z_i\}$; $\vec{P}_{jn}$ - вектор, из точки $\{Xn, Yn, 0\}$ в точку $\{X_j, Y_j, Z_j\}$; $V^2 = Vx^2 + Vy^2 + Vz^2$.

Для нахождения шести неизвестных необходимо составить систему из уравнений для шести временных задержек, т.е. минимальное число датчиков моноблока –

семь. Если приемников будет больше, то решение следует искать из условия минимума функции $\sum_{i=1, i\neq j}^{N} (\Delta T_{ij} - \Delta T_{ij}(\vec{V}, Xn, Yn, C))^2 = \min$.

Где ΔT_{ij} - измеренное значение разности времен прихода ударной волны на i-ый и j-ый датчики, а $\Delta T_{ij}(\mathbf{V}, Xn, Yn, C)$- вычисленное, N- число датчиков в моноблоке. Нахождение решения при котором данная функция имеет минимальное значение выливается в решение системы из шести уравнений:

$$\frac{\partial\left(\sum_{i=1, i\neq j}^{N} (\Delta T_{ij} - \Delta T_{ij}(\vec{V}, Xn, Yn, C))^2\right)}{\partial(\vec{V}, Xn, Yn, C)} = 0 \qquad (2)$$

Моделирование на персональном компьютере показало, что на решение системы (2) методом Ньютона требуется несколько сотых долей секунды, что позволяет построить систему пеленгации, работающую в реальном времени.

С целью оценки точностных параметров системы пеленгации при моделировании к исходным временам прихода ударной волны на приемники добавляется случайная величина распределенная по нормальному закону. Точность пеленгации характеризуют два параметра: расстояние и угол между истинной и восстановленной траекториями. На рис.3 представлен один из результатов моделирования - график зависимости ошибки пеленгации в зависимости от введенного уровня помех (в мкс) при удалении траектории от центра моноблока на 10 метров и 15-ти приемниках в моноблоке – сфере радиусом 1 метр. Показана ошибка пеленгатора по определению «промаха» (в мм) по моноблоку.

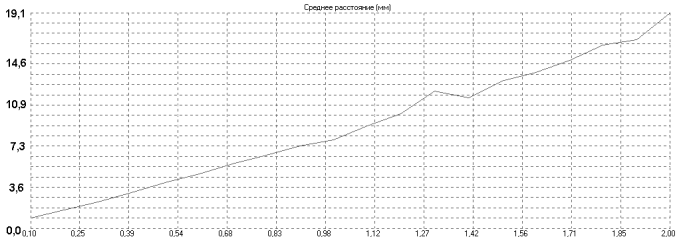


Рис.3

Продвижение по пути повышения точности пеленгации возможно в нескольких направлениях. Во-первых, это повышение точности определения моментов времени прихода импульса ударной волны на приемник с использованием преобразования всплесков (wavelet или масштабный анализ). Вторым путем является использование избыточности числа приемников и использования более продвинутых методов регуляризации решений уравнений (1- 2). Третья возможность заключается в исполь-

зовании других параметров импульса, например величины крутизны переднего фронта.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1982, 733 с.
2. Патент США № 5.930.202
3. SAIC sentinel acoustic counter-sniper system // SPIE International Symposium, 1996, т.2938.

АДГЕЗИОННЫЙ МЕХАНИЗМ ГИСТЕРЕЗИСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕД

В.Е. Назаров, А.В. Радостин

Институт прикладной физики РАН

Создание моделей различных дефектов (дислокаций, трещин и т.д.) и построение уравнений состояния твердых тел, содержащих такие дефекты, является одной из современных проблем нелинейной акустики и сейсмо-акустики. Ее актуальность обусловлена тем, что акустические свойства подобных дефектов, как правило, сильно отличаются друг от друга, а нелинейность твердых тел, содержащих такие дефекты, значительно превышает нелинейность однородных сред и материалов. Это обстоятельство создает благоприятные возможности для нелинейной акустической диагностики как одиночных дефектов в твердых телах, так и самих твердых тел, содержащих большое количество таких дефектов.

В настоящей работе предлагается адгезионный механизм гистерезисной нелинейности трещин, выводится уравнение состояния для стержня, содержащего большое количество таких трещин.

В качестве основы модели реальной трещины, поверхности которой обладают адгезией, т.е. могут прилипать друг к другу, рассмотрим вначале идеальную (без адгезии) узкую эллиптическую трещину – разрез в линейном идеально-упругом твердом теле. Нормальные смещения $U = U(r)$ поверхности такой трещины в поле нормального к ней напряжения $\sigma_{nn} \geq 0$ определяются выражением [1]:

$$U(r) = \frac{4(1-\nu^2)\left(R^2 - r^2\right)^{1/2}\sigma_{nn}}{\pi E},$$

где E и ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона твердого тела, R - радиус трещины, r - радиальная координата в плоскости трещины.

Объем такой трещины в поле нормально действующего к ее поверхностям растягивающего напряжения $\sigma_0 + \sigma_{nn} > 0$ равен:

$$V(\sigma_0 + \sigma_{nn}) = \frac{16(1-\nu^2)R^3\left[\sigma_0 + \sigma_{nn}\right]}{3E}, \qquad (1)$$

где σ_0 - начальное положительное напряжение.

Далее, для упрощения расчетов, мы будем рассматривать эквивалентную этой эллиптической трещине круглую, радиуса *R*, узкую плоскопараллельную полость (также пока без адгезии), исходное расстояние между поверхностями которой равно 2*h* (*h*<<*R*). Объем такой полости в поле нормального напряжения σ_{nn} определятся выражением:

$$V_{eff}(\sigma_{nn}) = 2\pi R^2 d(\sigma_{nn}) \ , \tag{2}$$

где 2*d* - изменение расстояния между поверхностями полости при $\sigma_{nn} \neq 0$, *d*<<*R*.

Из равенства объемов эллиптической трещины (2) и эквивалентной ей плоскопараллельной полости (3) получаем уравнение состояния полости:

$$d(\sigma_{nn}) = \begin{cases} h + \dfrac{\sigma_{nn}}{K}, & \sigma_{nn} > -Kh, \\ 0, & \sigma_{nn} \leq -Kh, \end{cases} \tag{3}$$

где $K = 3\pi E / 8(1-\nu^2)R$ - коэффициент упругости полости, $h = \sigma_0 / K$ - начальное раскрытие полости.

Из выражения (3) следует, что такая полость обладает разномодульной упругостью, т.к. при $\sigma_{nn} > \sigma_0 = -Kh$ полость раскрыта (*d*>0), а при $\sigma_{nn} \leq \sigma_0$ - закрыта (*d*=0). Поскольку закрытие и открытие полости происходит при одном и том же напряжении σ_0, то зависимость $\sigma_{nn} = \sigma_{nn}(d)$ является однозначной.

При наличии адгезии поверхностей [2], полость будет закрываться при том же напряжении σ_0, но для ее открытия потребуется другое напряжение σ^*, большее чем σ_0, и, следовательно, зависимость $\sigma_{nn} = \sigma_{nn}(d, \dot{d})$ будет неоднозначной, т.е. гистерезисной.

Гистерезис в поведении одной трещины приведет к тому, что уравнение состояния (т.е. зависимость “напряжение-деформация”) для твердого тела, содержащего большое количество таких трещин, также будет гистерезисным. Значение порогового напряжения σ^*, при котором происходит открытие трещины, определяется поверхностной энергией γ твердого тела, равной работе, необходимой для образования единицы поверхности твердого тела. Напряжение σ^* и, соответствующее ему, расстояние d^* можно найти, приравнивая эту работу, равную площади гистерезиса в зависимости $\sigma_{nn} = \sigma_{nn}(d, \dot{d})$, поверхностной энергии 2γ, необходимой для раскрытия полости:

$$\sigma^* = 2(\gamma K)^{1/2} - hK \ , \ d^* = 2(\gamma / K)^{1/2} \ . \tag{4}$$

Отметим, что описанная модель трещины имеет два ограничения. Первое связано с тем, что раскрытие полости происходит не мгновенно, а за конечное время τ, поэтому уравнения (3), (4) справедливы, вообще говоря, только в квазистатиче-

ском приближении, т.е. в диапазоне частот $\omega << \tau^{-1}$. Определить точное время раскрытия полости довольно сложно, однако его можно оценить из теории размерностей: $\tau \approx (R/C_t)(\gamma R/E)^{1/4}$, где C_t - скорость сдвиговых волн. Второе ограничение следует из того, что при превышении напряжения $\sigma_{cr} = 2\left(\gamma K/3\right)^{1/2}$ радиус трещины начинает катастрофически расти, и твердое тело разрушается [3]. Из выражения (2) следует, что это ограничение эквивалентно условию: $h > h_0 = 2(\gamma/K)^{1/2}(1-3^{-1/2})$. Оценки показывают, что для трещины с параметрами: $E = 10^{11}$ г/см с^2, $\nu = 0.25$, $R = 10^{-1}$ см, $\gamma = 10^2$ дн/см, - время раскрытия τ составляет около $6\cdot 10^{-9}$ с, $\sigma_{cr} \approx 10^7$ г/см с^2, а $h_0 \cong 6\cdot 10^{-6}$ см.

Наиболее просто уравнение состояния можно получить для стержня, содержащего однородно распределенные в его объеме трещины, нормаль к поверхности которых ориентирована вдоль оси стержня. Здесь мы будем полагать концентрацию трещин достаточно малой, т.е. расстояние между трещинами существенно больше их радиусов, для того, чтобы взаимодействием трещин можно было пренебречь. (Естественно предполагается, что радиус трещины существенно меньше размеров поперечного сечения стержня.):

$$\sigma(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) \cong E_0\left[\varepsilon + f(\varepsilon,\dot{\varepsilon})\right], \tag{5}$$

$$f(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) \cong 2\pi R^2 \cdot \begin{cases} 0, & \varepsilon \ge \varepsilon_1^* - \varepsilon_0, \dot{\varepsilon} > 0; \\ & \varepsilon \ge -\varepsilon_2^*, \dot{\varepsilon} < 0, \\ \int\limits_0^{-E_0\varepsilon/K} \left(\frac{E_0\varepsilon}{K} + h\right) W(h)dh, & -\varepsilon_0 \le \varepsilon < -\varepsilon_2^*, \\ & \dot{\varepsilon} < 0, \\ \int\limits_0^{E_0\varepsilon_0/K} \left(\frac{E_0\varepsilon}{K} + h\right) W(h)dh, & -\varepsilon_0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1^* - \varepsilon_0, \\ & \dot{\varepsilon} > 0, \\ \int\limits_0^{2(\gamma/K)^{1/2} - E_0\varepsilon/K} \left(\frac{E_0\varepsilon}{K} + h\right) W(h)dh, & \varepsilon_1 - \varepsilon_0 < \varepsilon \le \varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*, \\ & \dot{\varepsilon} > 0, \end{cases}$$

где $E_0 = E\left(1 + \frac{16R^3(1-\nu^2)}{3}\int\limits_0^\infty W(h)dh\right)^{-1}$ - модуль Юнга твердого тела с трещинами, $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_0}$, $\varepsilon_1^* = \frac{2(\gamma K)^{1/2}}{E_0}$, $\varepsilon_2^* = \frac{Kh_0}{E_0}$.

Далее в рамках уравнения состояния (5) методом возмущений нетрудно провести теоретическое исследование нелинейных волновых процессов, возникающих

при распространении и взаимодействии сильной низкочастотной и слабой высокочастотной продольных акустических волн в таком стержне.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты N01-05-64417, N00-05-64252).

Литература

1. Адамсон А. Физическая химия поверхностей. -М.: Мир, 1979, 510с.
2. Снеддон И. Преобразование Фурье. -М.: ИИЛ, 1955, 435с.
3. Баренблатт Г.И. //ПММ. 1959. Т.23, N3. С.434-444.

АКУСТИЧЕСКИЙ ПОТОК В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЕ

М.Ю.Петухов

Нижегородский госуниверситет

Основные закономерности процесса параметрической генерации акустико-гравитационных (АГ) волн при их вертикальном распространении в изотермической атмосфере стратифицированной в поле силы тяжести g рассмотрены в [1]. При этом показано, что в такой атмосфере в результате нелинейного взаимодействия АГ волн на нулевой разностной частоте формируется вертикально направленный поток – акустический ветер. Настоящая же работа посвящена исследованию аналогичных процессов в атмосфере пронизанной неоднородным горизонтальным магнитным полем спадающим с высотой z пропорционально корню квадратному из уменьшающейся плотности среды.

Для решения поставленной задачи предположим, что нижняя граница атмосферы (z=0) совершает установившиеся во времени t вертикальные колебания на частотах ω_1 и ω_2 с соответствующими амплитудами A_1 и A_2 вертикальной компоненты колебательной скорости v:

$$\mathrm{v}\big|_{z=0} = A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \cos\left(\omega_2 t + \varphi\right), \qquad (-\infty < t < +\infty). \tag{1}$$

где A_1 $A_2 > 0$, а φ – определенное значение фазы.

Как известно [2], в такой атмосфере существует запрещенный для линейного распространения АГ волн диапазон частот $0 < \omega < \omega_{cf}$:

$$\omega_{cf} = \frac{(c_0^2 + c_A^2)^{1/2}}{2H} = \omega_L \beta \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\frac{\gamma}{2} + \beta^2}, \quad H = \frac{1}{g}\left(\frac{c_0^2}{\gamma} + \frac{c_A^2}{2}\right), \tag{2}$$

где ω_{cf} – характерная частота отсечки АГ волн ($\omega_{cf} < \omega_L$), $\omega_L = \gamma g/2c_0$ – лэмбовская частота отсечки АГ волн в отсутствии магнитного поля, c_0 – адиабатическая скорость звука, c_A – альвеновская скорость, $\beta = c_0 / c_A$ параметр, характеризующий относительное преобладание звуковых или магнитных эффектов при распространении АГ волн, γ – показатель адиабаты.

Рассмотрим параметрическую генерацию АГ волн на разностной частоте $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ принадлежащей запрещенному диапазону частот, в предположении, что первичные возмущения на частотах $\omega_1 > \omega_{cf}$ и $\omega_2 > \omega_{cf}$ являются распространяющимися. Тогда из известной системы уравнений магнитной гидродинамики [3] описывающей движения идеально проводящего, сжимаемого газа, находящегося в гравитационном и магнитном поле с точностью до членов второго порядка малости по возмущениям гидродинамических и магнитных характеристик для продольной компоненты колебательной скорости v получим следующее нелинейное уравнение, описывающее процессы строго вертикального распространения АГ волн:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} - \left(c_0^2 + c_A^2\right)\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial t^2} + \frac{\left(c_0^2 + c_A^2\right)}{H}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} = G, \tag{3}$$

где функция G объединяет характерные нелинейные слагаемые.

Из уравнения (3) и в заданных выше условиях для АГ волн на разностной частоте Ω принадлежащей запрещенному диапазону частот, можно получить следующее решение:

$$\mathrm{v}^{(2)} = \mathrm{Re}\left\langle T\left\{e^{\eta z + i(\Omega t + \varphi)}\left[e^{(\eta - i\xi)z} - e^{-\sqrt{1-\Omega^2/\omega_{cf}^2}\,\eta z}\right]\right\}\right\rangle, \tag{4}$$

где

$$\eta = 1/2H, \quad \xi = \eta\left(\sqrt{\frac{\omega_2^2}{\omega_{cf}^2} - 1} - \sqrt{\frac{\omega_1^2}{\omega_{cf}^2} - 1}\right), \tag{5}$$

T – некоторый множитель, независящий от высоты z. Как видно из правой части решения (4), его первое и второе слагаемые описывают распространяющиеся и нераспространяющиеся АГ волны соответственно.

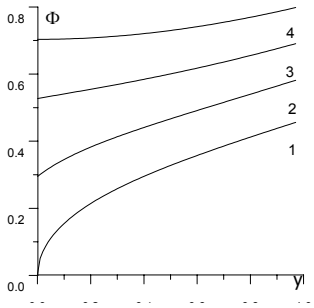


Рис. 1

Из приведенных на рис. 1 результатов численных расчетов зависимостей от безразмерной частоты $y = \Omega/\omega_{cf}$, нормированной величины $\Phi = c_0 T/A_1 A_2$ при $\varphi = 0$, $c_0 = c_A$: $\omega = \omega_{cf}$ (кривая 1), $\omega = 1.1\omega_{cf}$ (кривая 2), $\omega = 1.5\omega_{cf}$ (кривая 3), $\omega = 10\omega_{cf}$ (кривая 4), характеризующей амплитуду колебательной скорости на разностной частоте каждой из волн при $z=0$, следует, что при $\Omega = 0$ величина Φ принимает отличающиеся от нуля значения и, следовательно при $z=0$ и $\varphi = 0$ выполняется следующее соотношение:

$$\mathrm{v}_0 = \lim_{\Omega \to 0}\left(\mathrm{v}_R^{(2)}\right) \neq 0. \tag{6}$$

Последнее означает, что в рассматриваемом случае нелинейное взаимодействие АГ волн приводит к возникновению потока – акустического ветра.

Остановимся подробнее на исследовании зависимости скорости акустического ветра от характерных величин. Для этого с использованием (4) и (6) находим следующее выражение:

$$\mathrm{v}_0 = -\frac{A_1 A_2 \cos\varphi}{2H\omega_1}\sqrt{\frac{\omega_1^2}{\omega_{cf}^2}-1}\left(e^{2\eta z}-1\right), \tag{7}$$

описывающее лишь ту часть акустического потока, за появление которой ответственно взаимодействие между двумя волнами с амплитудами A_1 и A_2 . При получении же полного выражения для акустического потока V необходимо учесть, что каждая из этих волн на нулевой разностной частоте также порождает акустический поток со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Тогда, воспользовавшись аналогичной, описанной при выводе зависимости (7), асимптотической процедурой ($\Omega = \omega_1 - \omega_1 \to 0$, $\Omega = \omega_2 - \omega_2 \to 0$), найдем следующее выражение для дополнительных к v_0 слагаемых:

$$\mathrm{v}_j = -\frac{A_j^2 \cos^2\varphi_j}{4\omega_j H}\sqrt{\frac{\omega_j^2}{\omega_{cf}^2}-1}\left(e^{2\eta z}-1\right), \tag{8}$$

где j=1,2, а $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi$. Учитывая тот факт, что при получении выражения (7) использовался предельный переход $\omega_2 \to \omega_1$, из (7), (8) находим искомое выражение для скорости акустического потока:

$$V = \sum_{j=0}^{2}\mathrm{v}_j = -\frac{\left(A_1 + A_2\cos\varphi\right)^2}{4H\omega_1}\sqrt{\frac{\omega_1^2}{\omega_{cf}^2}-1}\left(e^{2\eta z}-1\right). \tag{9}$$

Из выражения (9) следует, что величина акустического потока существенно зависит от разности начальных фаз исходных колебаний (см. (1)), что не было учтено в [1]. Причем акустический поток отсутствует при $\omega_1 \le \omega_{cf}$, а на относительно высоких частотах $\omega_1 >> \omega_{cf}$ его величина практически не зависит от исходной частоты излучения.

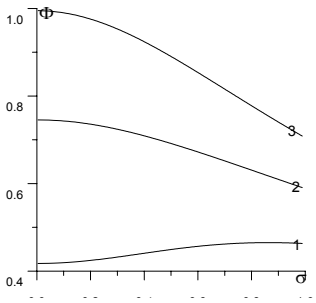


Рис. 2

Кроме того, как следует из анализа поведения функции Φ от параметра $\sigma = c_A/c_0$ при $\varphi = 0$, $\Omega = 0$: $\omega = 1.1\omega_L$, $\omega = 1.5\omega_L$ (кривая 2), $\omega = 10\omega_L$ (кривая 3) (см. рис. 2) и выражения (9) зависимость скорости акустического потока от величины магнитного поля (т. е. $V(\sigma)$) может иметь максимум, но лишь при частотах излучения, достаточно близких к лэмбовской

частоте ω_L.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №№ 02-02-17374, 00-15-96619.

Литература

1. Петухов М.Ю., Петухов Ю.В. // Письма в Астрономический журнал, 2001. Т.27, №3, С.220.
2. Thomas J.H. // Astrophys. J., 1982, V.262, №2. P.760.
3. Прист Э. Р. Солнечная магнитогидродинамика - М.: Мир, 1985, 589с.

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА КОНСТРУКЦИЙ

Н.В.Курочкин, И.Н.Диденкулов[1)], А.А.Стромков[1)], В.В.Чернов[1)], С.А.Лобастов[2)]

Нижегородский госуниверситет, [1)]Институт прикладной физики РАН, [2)]РФЯЦ-ВНИИЭФ

Введение

Акустические методы неразрушающего контроля широко применяются в различных областях техники [1,2,3]. В последние годы интенсивно развиваются методы нелинейной акустической диагностики, так как нелинейные акустические свойства более чувствительны к наличию дефектов и изменению структуры среды, чем линейные [3,4].

В работе представлены результаты теоретического моделирования спектрально–модового модуляционного метода по определению местоположения трещины. Предложенная модель проверена экспериментально.

Модуляционный метод неразрушающей диагностики

Метод основан на модуляции высокочастотных упругих волн низкочастотными вибрациями исследуемого образца. Трещина обладает выраженными нелинейными акустическими свойствами. Поэтому низкочастотная волна меняет условия распространения высокочастотной волны через трещину, что приводит к эффекту модуляции. Подобный эффект применялся для контроля усталости металлов и обнаружения трещин в металлических и бетонных образцах [4-7]. При этом использовались различные типы волн в образцах: продольные, изгибные, крутильные.

В данной работе с использованием этого метода были проведены испытания бетонных балок метровой длины с различными дефектами: с трещиной, с арматурой, с пластиковым шариком, а также с контрольной бездефектной балкой. Продольные волны в балках возбуждались с помощью пьезокерамического излучателя, приклеиваемого к одному из торцов. Изгибные колебания балок на резонансных частотах одной из мод возбуждались с помощью вибратора. Регистрация колебаний в различных точках балки осуществлялась с помощью акселерометра.

В экспериментах было показано, что наличие трещины приводит к существенному (больше чем на порядок) возрастанию коэффициента модуляции по сравне-

нию с бездефектной балкой, а также дефектами в виде арматуры и пластикового шарика. При этом оказалось, что распределение амплитуды модуляционных компонент вдоль балки зависит от местоположения трещины и номера возбужденной моды изгибных колебаний, что показано на рис.1.

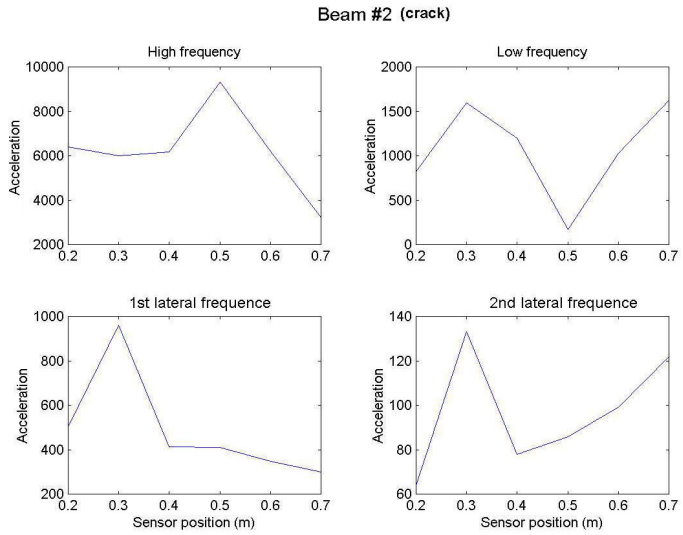


Рис.1 Распределение вдоль балки с трещиной амплитуд низкочастотных изгибных и высокочастотных продольных колебаний (вверху) а также амплитуд первой и второй модуляционных гармоник.

Гистограмма индексов модуляции, полученных путем усреднения данных, полученных в разных токах балок и нормированных на индекс модуляции бездефектной балки, приведена на рис.2.

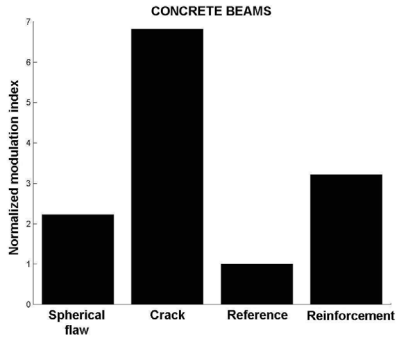


Рис.2 Нормированные значения индекса модуляции для разных бетонных балок.

Проведенные эксперименты показали, что индекс модуляции может быть использован в качестве диагностического параметра для определения дефектности бетонных конструкций.

Определение местоположения трещины. Спектрально–модовый модуляционный метод

Простые нелинейные методы не могут давать информацию о местоположении трещины, а лишь определять дефектность образца в целом. Поэтому в развитии и внедрении нелинейных акустических методов неразрушающего контроля важным элементом является разработка методов определения местоположения трещин. К настоящему времени известен метод нелинейной акустической эхолокации трещин, основанный на использовании эффекта модуляции высокочастотного акустического эхо-импульса [8] или последовательности эхо-импульсов от трещины [9] низкочастотными вибрациями образца. Этот метод может быть применен не во всех случаях. Поэтому представляет интерес создание новых методов нелинейной акустической локации трещин. Такой метод может быть основан, в частности, на модовом подходе и вытекать из наблюдения, сделанного при экспериментах с бетонными балками.

Сущность метода состоит в том, что при возбуждении в балке низкочастотных колебаний на разных резонансных частотах (соответствующих разным модам) индекс модуляции распространяющихся в балке высокочастотных акустических волн будет зависеть от положения трещины по отношению к форме собственных изгибных колебаний балки. В зависимости от положения трещины по отношению к узлам и пучностям возбужденной моды колебания образца будут по-разному влиять на прохождение высокочастотных акустических волн через трещину. Анализируя индекс модуляции для разных мод, можно построить алгоритм определения местоположения трещины. Рассмотрим этот метод подробнее.

Разложим в ряд Тейлора выражение для напряжения, возникающего на трещине при ее деформации:

$$\delta\sigma = K_0\xi + \alpha\xi^2 + \ldots \ , (\alpha\xi << K_0), \tag{1}$$

где ξ - ширина трещины.

Деформация трещины вызывается низкочастотными изгибными и высокочастотными продольными колебаниями:

$$u_\Omega(z,t) = U_\Omega(z)\cos\Omega t \ . \tag{2}$$

$$u_\omega(z,t) = U_\omega(z)\cos\omega t \ . \tag{3}$$

Продольное смещение, вызванное этими колебаниями, имеет вид:

$$\xi = D\frac{\partial(u_\Omega + u_\omega)}{\partial z} = D\frac{\partial U_\Omega}{\partial z}\cos\Omega t + D\frac{\partial U_\omega}{\partial z}\cos\omega t \ . \tag{4}$$

Подставив уравнение (4) в ряд (1), получим выражение для напряжения на модуляционных частотах $\tilde{\omega} = \omega \pm \Omega$:

$$\delta\tilde{\sigma} = \alpha D^2 \frac{\partial U_\Omega(z_0)}{\partial z}\frac{\partial U_\omega(z_0)}{\partial z}\cos\tilde{\omega} t \ . \tag{5}$$

Запишем волновое уравнение для изгибных колебаний струны при действии на нее периодической силы (рис.3):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\delta\frac{\partial u}{\partial t} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(z)e^{j\omega t} \ , \tag{6}$$

где $c_0 = \sqrt{T/\rho}$ - фазовая скорость распространения изгибных волн в струне.

Решение волнового уравнения (6) в случае совпадения собственных частот струны и частоты периодической силы выглядит следующим образом:

$$u(z,t) = A_n \sin\frac{n\pi}{l} z \cos\omega t \ , \tag{7}$$

где $A_n = \dfrac{f_n}{j2\delta\omega}$; $f_m = \dfrac{2}{l}\int f(\zeta)\sin\dfrac{m\pi}{l}\zeta \, d\zeta$.

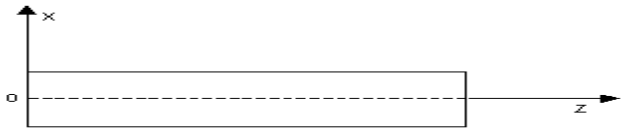


Рис.3. Элемент струны. Схема, используемая в расчете.

Деформация трещины вызывается изгибом струны и в первом приближении должна быть пропорциональна кривизне струны. Относительное удлинение элемента струны за счет изгиба запишется следующим образом:

$$\frac{dz' - dz}{dz} = \frac{x}{R} \ . \tag{8}$$

Радиус кривизны элемента струны: $R = \dfrac{\left(1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)^{3/2}}{\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$.

Продольная деформация ширины трещины с учетом вышеизложенного имеет вид:

$$\xi = D\left(x\frac{\partial^2 u_\Omega}{\partial z^2} + \frac{\partial u_\omega}{\partial z}\right) = Dx\frac{\partial^2 U_\Omega}{\partial z^2}\cos\Omega t + D\frac{\partial U_\omega}{\partial z}\cos\omega t\ , \qquad (9)$$

где $U_\Omega = A_n \sin k_\Omega z$, $k_\Omega = \pi n / l$, $U_\omega = B\cos k_\omega z$, $k_\omega = \omega / c$.

Сила, генерирующая модуляционную частоту $\tilde{u} = \tilde{U}\cos\tilde{k}\,z$, описывается уравнением (10).

$$F = s\delta\tilde{\sigma} = -\alpha s x k_\Omega^2 k_\omega D^2 A_n B\,\sin k_\Omega z_0 \sin k_\omega z_0 \cos\tilde{\omega}\,t\ . \qquad (10)$$

Амплитуда модуляционных компонент при этом запишется следующим образом:

$$\tilde{U} = x\alpha k_\Omega^2 k_\omega s D^2 \frac{A_n B}{S\tilde{k}\,\sin\left(\tilde{k}\,l\right)}\cos\left[\tilde{k}\left(l-z\right)\right]\sin\left(k_\Omega z_0\right)\sin\left(k_\omega z_0\right) \qquad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что величина модуляционных компонент зависит от номера моды и от местоположения трещины. Основываясь на этом факте, можно предложить алгоритм определения местоположения трещины. Введем в рассмотрение эффективный параметр нелинейности *M*:

$$M = \sum_n \tilde{U}\left(\sin k_\Omega z + \sin k_\Omega\left(l-z\right)\right). \qquad (12)$$

Результаты расчета этой величины для изложенной модели струны с трещиной показаны на рисунке 4. По оси абсцисс отложена координата вдоль струны, а по оси ординат величина нелинейного параметра. Максимальная величина нелинейного параметра находится в месте расположения трещины. Один из максимумов истинный, а второй мнимый из-за симметрии формы изгибных колебаний. Точность этого метода зависит от количества возбуждаемых мод изгибных колебаний.

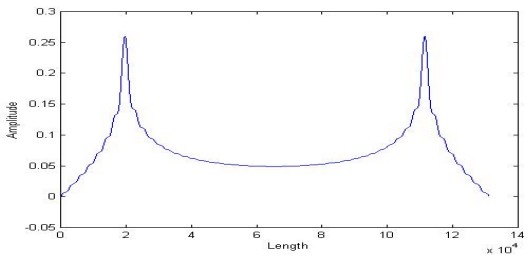


Рис.4. Результат численного моделирования.

Эксперимент по определению местоположения трещины

Для экспериментального подтверждения предложенной модели была проведена серия измерений. Схема экспериментальной установки показана на рис.5.

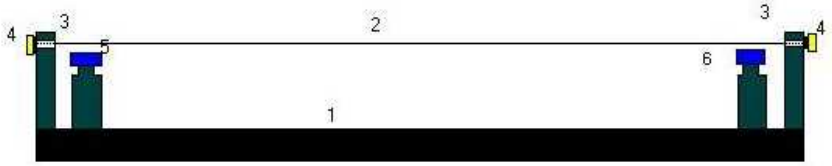


Рис.5. Экспериментальная установка для исследования спектрально-модового модуляционного метода определения местоположения трещины.

Вся конструкция собрана на жестко закрепленной оптической скамье (1), струна (2) натянута между упорами (3), зафиксированными на оптической скамье при помощи рейтеров. Для излучения и приёма продольной высокочастотной акустической волны в струне использовались идентичные пьезокерамические преобразователи (4). Возбуждение поперечных волн осуществляется с помощью динамической головки (5), а для контроля амплитуды поперечных колебаний используется вторая динамическая головка (6). Струна имела длину 2 м. Акустические волны в струне возбуждались на частоте около 200 кГц пьезокерамическим преобразователем, прикрепленным к торцу струны. Сигнал снимался с противоположного торца пьезокерамическим акселерометром. Сначала эксперимент делался со струной без дефектов. Затем серия измерений повторялась в той же струне, после того как в ней делался небольшой трещиноподобный дефект.

Трещина прорезалась в маленькой капле твердого припоя, нанесенного на струну на расстоянии около 50 см от одного из ее концов. Бездефектная струна так же имела каплю припоя, но не прорезанную. В ходе экспериментов последовательно возбуждались различные моды поперечных колебаний струны на их резонансных частотах и измерялся коэффициент модуляции высокочастотного сигнала низкочастотными колебаниями струны. Поскольку возбуждение различных мод колебаний струны на их резонансных частотах происходило, вообще говоря, с разной амплитудой, то измеренный коэффициент модуляции нормировался на коэффициент возбуждения соответствующей моды. С этой целью проводились измерения амплитуды поперечных колебаний струны с помощью электромагнитного датчика, размещенного вблизи определенной точки струны (в эксперименте эта точка находилась симметрично по отношению к электромагнитному возбудителю колебаний).

На рисунке 6 показаны гистограммы амплитуд модуляционных гармоник для бездефектной струны и струны с трещин при одинаковых амплитудах возбуждения

колебаний струны. Из этого рисунка хорошо видно, что нелинейные свойства струны с трещиной существенно выше по сравнению со струной бездефектной, а кроме того, что наличие трещины приводит к разному проявлению эффекта модуляции на разных модах.

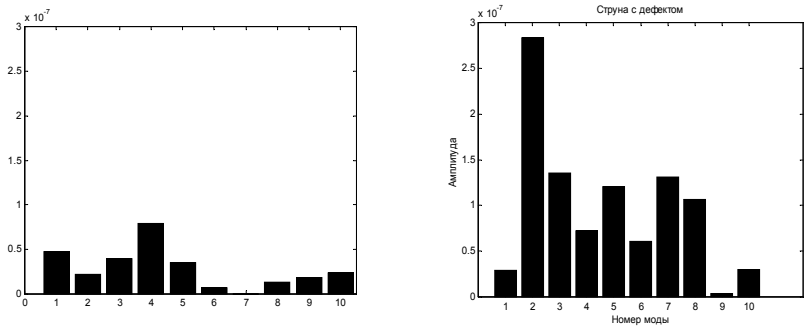


Рис.6. Гистограммы амплитуд модуляционных гармоник для струны без дефекта (слева) и с трещиной (справа).

Окончательный результат обработки этих данных в соответствии с предложенным алгоритмом (12) представлен на рисунке 7. Показано распределение величины эффективного параметра нелинейности *M* вдоль струны. Первый максимум указывает на измеренное местоположение трещины на струне. Наличие второго, мнимого максимума связано с симметрией мод колебаний струны. Результаты измерений показывают, что найденное положение трещины близко к истинному. Максимальное значение параметр *M* принимает на расстоянии 43 см от края струны, а дефект расположен на расстоянии 51 см от края.

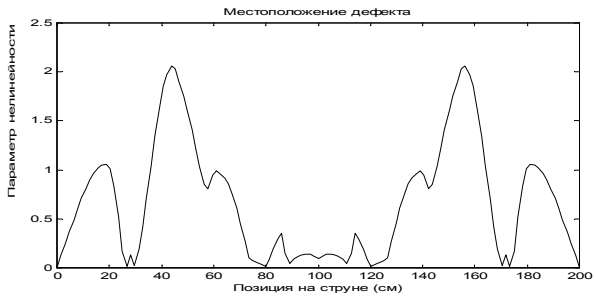


Рис.7. Распределение параметра *M* вдоль струны.

Пространственная разрешающая способность определения положения трещины спектрально-модовым модуляционным методом, очевидно, определяется про-

странственным масштабом высшей возбужденной моды, и в наших условиях составляла около 10 см. Таким образом, результаты измерений подтверждают возможности спектрально-модового модуляционного метода определения местоположения трещин.

Заключение

Таким образом, в работе были описаны экспериментальные исследования модуляционного метода неразрушающей диагностики бетонных конструкций. Эти измерения показали, что индекс модуляции может использоваться в качестве диагностического параметра для определения дефектности бетонных конструкций. Наибольший коэффициент модуляции наблюдается в балках с трещинами, что обусловлено нелинейностью контактирующих поверхностей в трещине. Однако измерения одного индекса модуляции не могут дать ответ на вопрос о местоположении трещины в конструкции. В работе был рассмотрен спектрально-модовый модуляционный метод определения местоположения трещины, основанный на измерении индекса модуляции для различных мод колебаний тестируемого образца. Предложен алгоритм реконструкции положения трещины, проведено его численное моделирование и экспериментальная проверка на струне. Результаты работы показывают, что предложенный алгоритм нелинейно-акустической реконструкции положения трещины может быть использован для неразрушающей дефектоскопии конструкций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (01-02-16938, 00-15-96741).

Литература

1. Акустические методы и средства контроля. – В кн.: Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий. / Справочник. Т.2. - М.: Машиностроение, 1986, С.189.
2. Ермолов И.Н. Теория и практика ультразвукового контроля. – М.: Машиностроение, 1981, 240с.
3. Джонс Р., Фокозару. Неразрушающие методы испытания бетонов. – М.: Стройиздат, 1974, 278с.
4. Коротков А.С., Славинский М.М., Сутин А.М. // Акуст.журнал, 1994, Т.40, №1, С.84.
5. Руденко О.В., Чин Ан Ву. Нелинейные акустические свойства контакта неровных поверхностей и акустическая диагностика распределения высоты неровностей // Акуст. журнал, 1994, Т.40, №4, С.593-600.
6. Диденкулов И.Н., Екимов А.Э., Казаков В.В., Сутин А.М. Нелинейные акустические свойства железобетонных конструкций с трещинами.//Нелинейная акустика твердого тела. Сб.трудов 8-ой сессии РАО. Под ред. В.И.Ерофеева. Н.Новгород, Интелсервис. 1998. С.265-268.
7. Диденкулов И.Н., Екимов А.Э., Казаков В.В. Нелинейное взаимодействие крутильных и изгибных волн в стержне с трещиноподобным дефектом // Акуст. журнал, 1998, Т.43, №5, С.462-468.
8. Kim, J.P., Kim, E.J., Yoon, S.W., Sutin, A.M.. // JASA. 1997. V.101. P.3029-3030.

9. Didenkulov I.N., Sutin A.M., Kazakov V.V., Ekimov A.E., Yoon S.W.. Nonlinear acoustic technique of crack location. // Nonlinear Acoustics at the turn of the Millenium. Eds.:W.Lauterborn, T.Kurz. Melville, New York, 2000, p.329-332.

ФОРМИРОВАНИЕ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В РАМКАХ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ВРИЗА

И.И.Диденкулова, А.В.Слюняев[1)]

Нижегородский госуниверситет, [2)]Институт прикладной физики РАН

Введение

В последнее время одной из наиболее популярных геофизических проблем стал феномен аномально больших волн (или волн-убийц) на поверхности океана [1–3]. Это явление заключается в неожиданном появлении одной или нескольких больших волн зачастую в условиях относительно спокойного моря. Появление больших волн на поверхности моря соответствует событиям, расположенным в хвосте функции распределения амплитуд волн, и, в принципе, ничему не противоречит. Однако участившиеся случаи регистрации подобных явлений вызвали сомнение в верном описании хвостов функции распределения амплитуд волн [2]. Также существует мнение, что губительность подобных волн связана с их специфической конфигурацией, вызванной определенным механизмом их формирования [1].

Один из подходов к осмыслению эффекта волн-убийц заключается в использовании классических моделей и предположении о естественной природе возникающих аномальных волн, не связанной со специфической батиметрией или полем течений. Так, в работе [3] формирование волн большой амплитуды было рассмотрено в рамках классического уравнения Кортевега – де Вриза (КдВ), являющегося моделью для длинных поверхностных и внутренних волн в океане. Было предложено преобразование волнового поля $x \to -x$, которое обращает время в рамках данного уравнения. В результате, поиск волнового поля, необходимого для формирования большой волны, был сведен к анализу задачи рассеяния для предполагаемого профиля волны – убийцы. Далее решение задачи рассеяния может интерпретироваться с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). Было показано, что для формирования большой волны необязательно существование солитонной части решения. Более того, волновое поле может значительно усилиться в процессе эволюции лишь если в нем присутствовало не более одного солитона.

В то время как для поверхностной волны коэффициенты уравнения КдВ соответствующей заменой координат могут быть выбраны постоянными, в случае внутренних волн коэффициенты такого уравнения могут значительно зависеть от стратификации. Особенно это проявляется в коэффициенте квадратичной нелинейности, который может обращаться в ноль и менять свой знак [4]. В случае, когда квадратичный коэффициент в уравнении КдВ мал, должно быть учтено следующее нелинейное слагаемое – кубическая нелинейность. Подобное обобщенное уравне-

ние КдВ с двумя нелинейными членами иногда называют уравнением Гарднера (УГ); в безразмерной форме оно имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u(1-u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad (1)$$

В случае произвольной стратификации знак кубической нелинейности может быть различным, однако, наиболее типичным для реального океана случаем является, по-видимому, отрицательная кубическая нелинейность, что и отражено в (1). Учитывая значительный интерес к динамике этого уравнения [5–7], нами был проведен анализ его динамики, ведущей к образованию больших волн, сходный с [3].

Задача рассеяния для уравнения Гарднера

Уравнение (1) интегрируемо с помощью МОЗР, что было показано в [6] в постановке АКНС схемы [8,9]. Решение начальной задачи заключается в нахождении спектра собственных значений χ системы, поставленной в соответствие уравнению (1). Будем рассматривать только дискретный спектр, что соответствует локализованным волновым функциям задачи рассеяния. Тогда каждое собственное значение

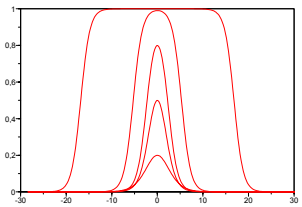


Рис. 1 Семейство солитонных решений УГ.

$$u = 4\chi^2 / \{1 + \sqrt{1-4\chi^2}\, ch[2\chi(x - 4\chi^2 t)]\} \qquad (2)$$

Диапазон возможных собственных значений заключен в интервале $0 \le \chi \le 0.5$. При $\chi \to 0$ солитон (2) стремится к решению КдВ, а при $\chi \to 0.5$ он уширяется до бесконечности, приближаясь по амплитуде к предельному значению, равному единице (см. рис.1).

Волновое поле, определяемое сплошным спектром убывает со временем [8,9]. Спектральная задача для (1) определяется системой:

$$\begin{cases} v_{1x} - \chi v_1 = u v_2 \\ v_{2x} + \chi v_2 = (u-1) v_1 \end{cases} \qquad (3)$$

Для рассмотрения модельной задачи зададим U в виде прямоугольного распределения (подобное было также сделано в [6]). Расписывая систему уравнений (3) для каждого из интервалов и используя условия сшивки волновых функций (их непрерывность и определенные скачки первых производных), получим:

$$\left[\begin{array}{l} \tan kx_0 = 2k\chi(1-U_0)/(k^2-(1-2U_0)\chi^2) \\ k^2+\chi^2 = U_0(1-U_0) \end{array}\right. \qquad (4)$$

Хотя формально уравнение (4) может быть разрешено и x_0 выражено как функция U_0 и χ, его удобно анализировать, решая графически и используя U_0 в качестве параметра. Решение (4) может быть разбито на 3 случая в зависимости от величины U_0. Поведение решений $\chi(x_0)$ для фиксированных U_0 проиллюстрировано на рис. 2. Здесь $\chi_l=\sqrt{U_0(1-U_0)}$, $\chi_c=1/2$, $\chi_0=\sqrt{U_0}/2$, $x_1=2/(2U_0-1)\sqrt{(1-U_0)}/U_0$,, $x_{2,4}=(\pi/2+\pi(n-1))/k_0$, при $n=1,2$, и $x_{3,5}=(\pi+\pi(n-2))/k_1$, при $n=2,3$.

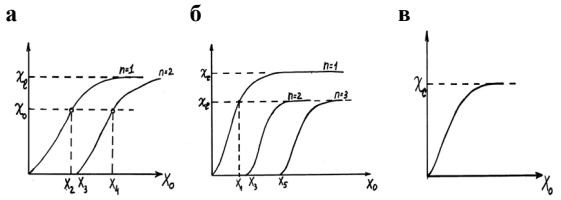


Рис.2 Семейство зависимостей собственных значений от ширины импульсного возмущения при: а)$U_0<0.5$; б)$0.5<U_0<1$; в)$U_0>1$.

Сначала рассмотрим случай малых $U_0<0.5$ (рис. 2а), соответствующий предельному переходу к уравнению КдВ. Как и в КдВ, здесь мы имеем набор солитонных решений разной амплитуды. При этом асимптотическое значение χ_l одинаково для всех солитонов и растет с увеличением U_0 до критического значения $\chi_l=\chi_c=1/2$. В случае $0.5<U_0<1$ (рис. 2б) происходит отделение первого солитона. Он выходит на асимптотическое значение $\chi_c=1/2$, соответствующее «широкому» солитону. Асимптотическое значение χ_l, одинаковое для всех других солитонов, с увеличением U_0 уменьшается и при амплитуде $U_0=1$ становятся равным нулю. При дальнейшем увеличении $U_0\geq1$ остается лишь одна солитонная ветвь (рис. 2в). При увеличении ширины начального возмущения солитон уширяется до бесконечности, стремясь к предельному.

Заключение

Наибольший интерес в рассмотренной задаче вызывает случай образования волн с высотой, превосходящей предельную амплитуду солитонов. Она возникает при обязательном участии одного солитона. Если $U_0 \to 1$, но $U_0<1$, то формирование такой волны происходит при малом числе солитонов, а если $U_0\geq1$, то решение задачи рассеяния дает только один солитон. Нужно, однако, сделать следующее замечание. В качестве начального профиля большой волны был выбран прямоугольный, что позволяет провести анализ проблемы аналитически. Хотя зачастую конкретный профиль качественно не изменяет решение задачи рассеяния, это, очевидно, не так для случая $U_0\geq1$, так как численное моделирование этого случая для другого профиля начальной волны наряду с главным «широким» солитоном демонстрирует формирование цугов мелких солитонов [7]. Тем не менее, эффект выделения ветви первого солитона при $U_0\geq0.5$, стремящегося к предельному, является, по- видимому, «грубым», то есть сохраняется и для других начальных профилей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (02-05-06514, 00-15-96772, 00-15-96619) и гранта РАН №349 (6-ой конкурс-экспертиза 1999 г.).

Литература

1. Lavrenov I.V., The wave energy concentration at the Agulhas current of South Africa. *Natural Hazards* 17, 117- 127 (1998).
2. Haver S., Andersen O.J., Freak waves – rare realizations of a typical extreme wave population or typical realizations of a rare extreme wave population// Proc. 10th Conference of the ISOPE 123-130 (2000).
3. Pelinovsky E., Talipova T., Kharif C. Nonlinear-dispersive mechanism of the freak wave formation in shallow water//Physica D, 2000, V. 147, P. 83-94.
4. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T., The modified Korteweg – de Vries equation in the theory of the large-amplitude internal waves. *Nonlin. Proc. In Geophysics* 4, 237-250 (1997).
5. Miles J.W. On internal solitary waves//Tellus, 1979, V. 31, P. 456-462.
6. Miles J.W. On internal solitary waves. II//Tellus, 1981, V. 33, P. 397-401.
7. Слюняев А.В., Пелиновский Е.Н. Динамика солитонов большой амплитуды//ЖЭТФ, 1999, Т. 116, С. 318-335.
8. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
9. Drazin P.G., Johnson R.S. Solitons: An Introduction//Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1993.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В СЛАБОРАСХОДЯЩИХСЯ АКУСТИЧЕСКИХ ПУЧКАХ

П.Н. Вьюгин, С.Е. Дунаев, Д.А. Касьянов[1)], В.В. Курин, Л.М. Кустов

Нижегородский государственный университет,

[1)]Научно исследовательский радиофизический институт

Экспериментально, в лабораторных условиях, исследованы нелинейные искажения профиля интенсивной волны в звуковом пучке. Круглый поршневой пьезокерамический излучатель, радиусом a=1см, работающий на частоте накачки f=3 Мгц, обеспечивал диаграмму направленности шириной $\approx 2^0$. При этих параметрах длина дифракционной расходимости $L_д=k*a^2$, где k-волновое число, состовляла 120 см. Особое внимание уделялось линейности излучающего тракта и реализации широкополосного приема. С этой целью использовался специальный пьезоприемник с размерами $\ell = 1$ мм, и резонансной частотой 100 Мгц.

Показана динамика распространения нелинейных искажений, как вдоль пучка, так и поперёк на различных расстояниях от источника. Так, на рисунке 1 изображен

профиль принимаемой волны на оси пучка в зависимости от расстояния до источника звука.

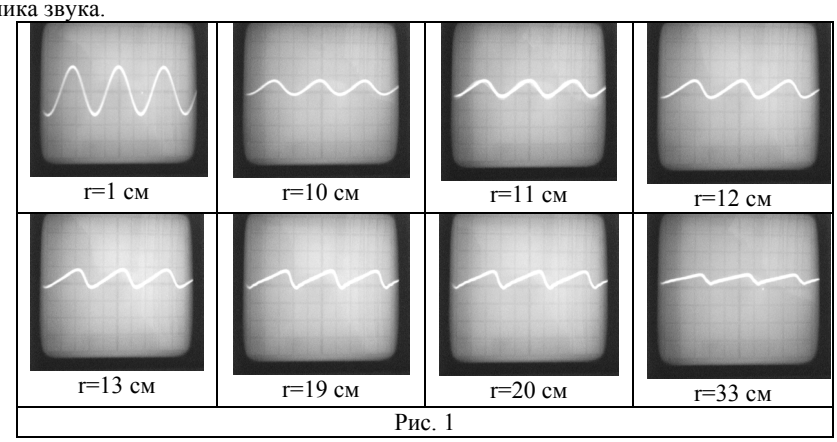
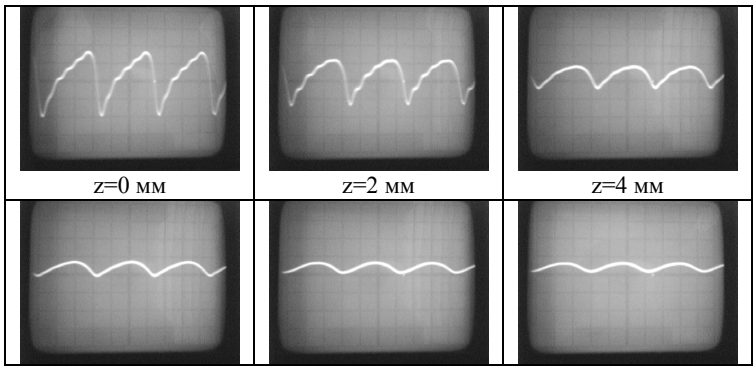


Рис. 1

Как видно из рисунка ударная волна образуется на расстояниях порядка Lp=12 см и её профиль качественно не меняется на всей исследуемой трассе, вплоть до 33 см. На малых расстояниях, когда нелинейные искажения невелики исходный профиль синусоидальный.

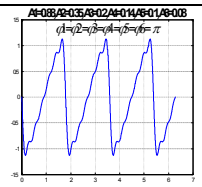
К сожалению, в эксперименте не удалось провести абсолютную калибровку приемного тракта, поэтому для определения интенсивности в звуковом пучке использовались косвенные методы. Проведенные оценки показали, что интенсивность J в звуковом пучке составляет около 5.5 вт/см^2, число Маха $\approx 1.82*10^{-4}$, а число Рейнольдса Re=51.Параметр $T=L_Д/L_P$ характеризует существенное преобладание нелинейности над дифракционными эффектами. Ударный фронт волны сначала образуется на оси пучка. В приосевой области профиль близок к ударному, а на периферии нелинейные искажения минимальны (см. рисунок 2). На рисунке 2 изображено поперечное изменение профиля ударной волны на расстоянии 33 см.



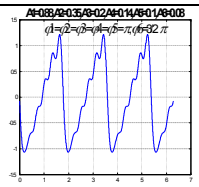
z=5 мм	z=6 мм	z=7 мм
Рис. 2		

Как видно из рисунков, ширина области сформировавшейся ударной волны растет по мере удаления приемника, что подтверждается численными расчетами [1].

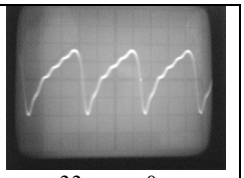
В области сформировавшихся ударных волн на профиле N волны экспериментально зарегистрированы ярко выраженные высокочастотные осцилляции, наличие которых не предсказывается уравнением Заболотской-Хохлова. Для объяснения этого экспериментального факта был проведен численный эксперимент результаты которого представлены на рисунке 3.



a



b



r=33 см,z=0 мм

c

Рис. 3

На рисунке 3а представлен профиль сформированный первыми шестью гармониками, с нулевой разностью фаз между ними, с распределением амплитуд расчитаных по формуле Фея [2]. Слабые высокочастотные осцилляции в области ударного фронта могут быть связаны с ограниченностью ряда Фурье в численном эксперименте. Как видно из рисунка 3b амплитуда высокочастотных осцилляций увеличилась при повороте фазы шестой гармоники на $\pi/2$, что может быть связано с наличием дисперсии в эксперименте.

Следует отметить, что данное сообщение не претендует на оригинальность [3]. Однако на кафедре акустики ННГУ эти исследования выполнены впервые и продолжают работы начатые в 2000 году.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 02-02-17374 и гранта КЦФЕ.

Литература

1. Бахвалов Н.С. , Жилейкин Я.М. , Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. - М: Наука, 1982, 102 с.
2. Руденко О.В. , Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. - М: Наука, 1975, 288 с.
3. Зарембо Л.К. , Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. -М: Наука, 1966 ,520 с.
4. Егорычев С.А., Касьянов Д.А., Курин В.В., Кустов Л.М., Пасманик Г.В. // В кн.: Труды 4-ой научной конферкнции по радиофизике 5 мая 2000 г., Ред. А.В.Якимов. - Н.Новгород: ННГУ, 2000 , с. 288.