

Труды XXI научной конференции по радиофизике

**СЕКЦИЯ  
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ»**

Председатель – А.А. Дубков, секретарь – А.А. Харчева.  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕЙРОННОЙ СЕТИ С НЕСТАЦИОНАРНОЙ АКТИВНОЙ ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

Д.А.Адамчик, В.Б.Казанцев

*ННГУ им. Н.И.Лобачевского*

Нейрон является основной структурно-функциональной единицей нервной системы. Будучи электрически возбудимым, нейрон способен генерировать, преобразовывать и передавать электрические сигналы. Составляя функциональный костяк нервной системы, нейроны, тем не менее, не действуют изолированно. Они погружены во внешнюю среду, образуемую глияльными клетками и внеклеточным матриксом. Эта среда является активной, т.к. содержит химические вещества, нейромедиаторы, влияющие на работу нейронов. Концентрация этих веществ не остается постоянной; она зависит, в том числе, и от активности нейронной сети, что предполагает существование обратной связи между нейронами и их окружением.

В настоящей работе мы строим математическую модель подобной обратной связи на примере однородной сети интернейронов неокортекса и гиппокампа [1]. Наличие в клеточной мембране интернейронов ГАМК(A)-рецепторов делает их чувствительными к молекулам  $\gamma$ -Аминомасляной кислоты (ГАМК), присутствующим во внеклеточном пространстве. Молекулы ГАМК активируют ГАМК(A)-рецепторы, делая их проницаемыми для ионов хлора ( $Cl^-$ ) и гидрокарбоната ( $HCO_3^+$ ), что означает наличие дополнительного трансмембранного тока. Этот ток влияет на популяционную активность, от которой в свою очередь зависит концентрация внеклеточной ГАМК. Таким образом, для математического описания возникающей обратной связи нам нужно записать эволюционные уравнения для популяционной активности и концентрации внеклеточной ГАМК. Поскольку эти величины связаны друг с другом не напрямую, а через удельную тоническую проводимость (проводимость ГАМК(A)-рецепторов), то необходимо записать уравнение также и для нее.

Динамика популяционной активности ( $A$ ) однородной нейронной сети подчиняется уравнению Вильсона-Кована [1]:

$$\tau_m \frac{dA}{dt} = -A + g(I) \tag{1}$$

Уравнение (1) описывает релаксацию популяционной активности к своему стационарному значению, определяемому т.н. функцией отклика — зависимостью средней частоты импульсной активности нейрона от величины постоянного тока инъекции. В реальности, ток на входе нейрона создается другими нейронами сети, а потому зависит от текущего значения популяционной активности. Нетрудно показать, что эта зависимость носит линейный характер, т.е.  $I = JA$ , где коэффициент пропорциональности  $J$  называется силой связей.

Функцию отклика интернейрона находим приближенно путем редукции исходной модели к модели квадратичного интегратора [2]:

$$g(I) = \frac{1}{\tau_r + \tau_m \kappa^{-1/2}}, \kappa = -\frac{1 + (G/G_m)^2}{4} + \frac{k}{G_m^2} [I + G(E - E_m)] \quad (2)$$

где  $\tau_r$  и  $\tau_m$  суть постоянные времени, а  $\kappa$  — безразмерный параметр. Буква  $I$ , как и прежде, обозначает ток на входе нейрона, а переменные  $G$  и  $E$  — удельную тоническую проводимость и потенциал реверсии ГАМК(A)-рецепторов, соответственно.

Динамика удельной тонической проводимости может быть описана в рамках разработанного в нейродинамике кинетического формализма [3]. ГАМК(A)-рецептор характеризуется в общем случае наличием пяти различных конформаций — трех закрытых, в которых ток отсутствует, и двух открытых, в которых ток имеется. В нашем случае достаточно воспользоваться упрощенной схемой, предполагающей наличие всего двух конформаций — одной открытой и закрытой. Скорость перехода в открытую конформацию пропорциональна локальной концентрации ГАМК ( $C$ ), тогда как переход в закрытую конформацию происходит с постоянной скоростью. Т. к. проводимость пропорциональна доле открытых рецепторов, в итоге получаем:

$$\frac{dG}{dt} = \alpha C(\bar{G} - G) - \beta G \quad (3)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  суть кинетические коэффициенты, значения которых известны, а  $\bar{G}$  — максимальная тоническая проводимость.

Изменение концентрации внеклеточной ГАМК обусловлено главным образом двумя процессами — работой транспортеров ГАМК, встроенных в клеточную мембрану окружающих нейроны астроцитов, и выбросом ГАМК в синаптическое с последующей ее диффузией во внеклеточное пространство. Задача транспортеров заключается в поддержании концентрации на некотором постоянном уровне ( $C_0$ ), а потому математически может быть описана как простая экспоненциальная релаксация. Скорость выброса ГАМК зависит в свою очередь от интенсивности работы нейронной сети, мерой которой служит популяционная активность, причем так, что с ростом последней она (скорость) выходит на насыщение. Окончательно приходим к уравнению:

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{C - C_0}{\tau_c} + \frac{Q_m A \tau_p}{1 + A \tau_p} \quad (4)$$

Уравнения (1-4) образуют искомую модель обратной связи, представляющей собой динамическую систему в пространстве трех измерений.

- [1] Wang X. J., Buzsáki G. //The journal of Neuroscience. 1996. Vol. 16, № 20. P. 6402.
- [2] Adamchik D. A., Kazantsev V. B. // Journal of Computational Neuroscience. 2017. P. 1.
- [3] Destexhe A., Mainen Z. F., Sejnowski T. J. Methods in neuronal modeling. 1998. Vol. 2. P. 1.

## АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМОВ СЛЕПОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ OFDM-СИГНАЛОВ В МНОГОЛУЧЕВЫХ РАДИОКАНАЛАХ С ЗАМИРАНИЯМИ

Г.Н. Бочков<sup>1)</sup>, К.В. Горохов<sup>1, 2)</sup>, А.В. Колобков<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>ННГУ им. Н.И. Лобачевского

<sup>2)</sup>АО «НПП «Полеет»

Вопросы синхронизации для OFDM-систем имеют особое значение, т.к. некомпенсированные временные и частотные сдвиги принимаемого сигнала могут значительно ухудшить помехоустойчивость OFDM-системы. Использование слепых алгоритмов синхронизации OFDM-сигналов позволяет повысить спектральную эффективность систем связи по сравнению с системами, использующими для синхронизации периодически передаваемые известные на приемной стороне символы или поднесущие. К настоящему времени разработано большое количество слепых алгоритмов синхронизации. Часть этих алгоритмов получены эвристически, часть синтезирована на основе метода максимального правдоподобия при наличии той или иной априорной информации в предположении квазистационарности частотно-селективного канала. Реальные каналы радиосвязи подвержены замираниям во времени. В работе проведено исследование качества оценивания частотных и временных сдвигов в многолучевых радиоканалах с замираниями для ряда известных алгоритмов слепой синхронизации OFDM-сигналов.

Рассмотрим OFDM-систему связи, содержащую  $N$  поднесущих с шагом  $T^{-1}$ . Из них только первые  $N_A$  «активных поднесущих» с комплексными амплитудами  $\mathbf{d}[k] = (d_0[k], \dots, d_{N_A-1}[k])^T$  используются для передачи информации, где верхний индекс « $T$ » обозначает транспонирование. Остальные  $N_V = N - N_A$  «виртуальные поднесущие» передаются с нулевыми амплитудами и образуют защитный интервал по частоте. Отсчеты комплексной огибающей  $k$ -го OFDM-символа в интервалом дискретизации во времени  $\tau_S = T/N$  формируются посредством обратного дискретного преобразования Фурье (ОДПФ):  $\mathbf{s}[k] = \mathbf{F}\mathbf{d}[k]$ , где  $\mathbf{F} = (\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N_A-1})$  и  $\mathbf{u}_n = \{N^{-1/2}e^{i2\pi nl/N} \mid 0 \leq l \leq N-1\}$  – столбцы матрицы ОДПФ  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1})$ . В передатчике для защиты от межсимвольной интерференции (МСИ) между OFDM-символами вставляется защитный интервал во времени в виде циклического префикса с длительностью  $T_G = N_G\tau_S$ , большей, чем интервал многолучевости  $T_L = L\tau_S$ . В этом случае отсчеты передаваемого OFDM-символа длительностью  $T_S = N_S\tau_S = (N+N_G)\tau_S$  описываются вектором  $\mathbf{s}_{\text{TX}}[k] = \mathbf{T}_{N_S, N_S}[k]$ , где  $\mathbf{T}_{k,n} = (\mathbf{W}_{k-n, 2n-k, n}^T, \mathbf{I}_n)^T$  – матрица добавления циклического префикса. Здесь и далее,  $\mathbf{W}_{n,m,k} = (\mathbf{0}_{n,m}, \mathbf{I}_n, \mathbf{0}_{n,(k-m)})$  – матрица окна, которая при умножении слева на  $k$ -вектор выделяет из него  $n$ -вектор, начиная с  $(m+1)$ -го элемента,  $\mathbf{I}_n$  –  $(n \times n)$ -единичная матрица,  $\mathbf{0}_{n,m}$  –  $(n \times m)$ -нулевая матрица.

Пусть канал описывается отсчетами нестационарной импульсной характеристикой  $h_{n,l}$  (отклика в момент времени  $n\tau_S$  на импульс, поданный в момент времени  $(n-l)\tau_S$ ), частотным сдвигом  $\nu$ , задержкой  $\tau$  (выраженной в единицах  $\tau_S$ ), и аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ). Тогда вклад  $k$ -го OFDM-символа на выходе канала при  $0 \leq \tau \leq N_S - L - 1$  полностью содержит вектор наблюдений [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k] = & \exp(i\{\varphi_0 + [(k-1)N_S + L]\varphi\}) \mathbf{W}_{2N_S-1, N_S-L-\tau, 3N_S-L} \mathbf{P}_{3N_S-L}(\varphi) \times \\ & \times \mathbf{C}_{3N_S-L, (k-1)N_S+L} (\mathbf{s}_{\text{tx}}^T[k-1], \mathbf{s}_{\text{tx}}^T[k], \mathbf{s}_{\text{tx}}^T[k+1])^T + \mathbf{n}_{2N_S-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi_0$  – случайная начальная фаза, учитывающая условность нумерации переданных символов,  $\mathbf{C}_{n,m}$  –  $(n \times (n+L))$ -матрица, строка номер  $l$  которой имеет структуру  $(\mathbf{0}_{1,l-1}, h_{m+l-1,L}, \dots, h_{m+l-1,0}, \mathbf{0}_{1,n-l}, \mathbf{P}_n(\varphi) = \text{diag}\{1, \exp(i\varphi), \dots, \exp(i(n-1)\varphi)\})$  – диагональная  $(N \times N)$ -матрица, описывающая искажение сигнала во временной области при нормированном значении частотного сдвига  $\varphi = 2\pi\nu T/N$ ,  $\mathbf{n}_m$  – вектор АБГШ с корреляционной матрицей  $\sigma^2 \mathbf{I}_m$ .

В зависимости от того, в каком представлении (частотном или временном) обрабатывается принимаемый сигнал, рассмотренные алгоритмы оценивания временного и частотного сдвигов можно разделить на три группы.

К алгоритмам, обрабатывающим сигнал в частотной области в виде комплексных

амплитуд поднесущих  $y_n^{(\tau, \nu)}[k] = \mathbf{u}_n^H \mathbf{W}_{N, N_G + \tau, 2N_S - 1} \mathbf{P}_{2N_S - 1}^H(\varphi) \mathbf{x}[k]$ , где верхний индекс «H» обозначает эрмитово сопряжение, относятся следующие. Алгоритм минимизации мощности виртуальных поднесущих (VS) [2] с усреднением по  $K_{\text{syn}}$  OFDM-символом:

$$\{\hat{\tau}, \hat{\nu}\} = \arg \min_{\tau, \nu} \sum_{k=0}^{K_{\text{syn}}-1} \sum_{n=N_A}^{N-1} |y_n^{(\tau, \nu)}[k]|^2 \quad (2)$$

Алгоритм минимизации квадрата разности мощностей соседних активных поднесущих (CSCD) [3]:

$$\{\hat{\tau}, \hat{\nu}\} = \arg \min_{\tau, \nu} \sum_{k=0}^{K_{\text{syn}}-1} \sum_{n=0}^{N_A-2} \left( |y_{n+1}^{(\tau, \nu)}[k]|^2 - |y_n^{(\tau, \nu)}[k]|^2 \right)^2 \quad (3)$$

Алгоритм минимизации дисперсии мощности активных поднесущих (MOV) [4]:

$$\{\hat{\tau}, \hat{\nu}\} = \arg \min_{\tau, \nu} \sum_{k=0}^{K_{\text{syn}}-1} \left( N_A^{-1} \sum_{n=0}^{N_A-1} |y_n^{(\tau, \nu)}[k]|^4 - \left[ N_A^{-1} \sum_{n=0}^{N_A-1} |y_n^{(\tau, \nu)}[k]|^2 \right]^2 \right) \quad (4)$$

Наиболее известными алгоритмами, использующими представление сигнала во временной области, являются алгоритмы по циклическому префиксу (CP). Так в [5] был предложен алгоритм, который максимизирует корреляцию свободного от межсимвольной интерференции участка циклического префикса и окончания OFDM-сигнала:

$$\hat{\tau} = \arg \max_{\tau} (2|\Psi(\tau)| - E_0(\tau) - E_N(\tau)), \quad \hat{\nu} = \arg(\Psi(\hat{\tau}))/2\pi T \quad (5)$$

где  $\Psi(\tau) = \sum_{k=0}^{K_{\text{syn}}-1} \mathbf{v}_0^{(\tau)H}[k] \mathbf{v}_N^{(\tau)}[k]$ ,  $E_n(\tau) = \sum_{k=0}^{K_{\text{syn}}-1} \|\mathbf{v}_n^{(\tau)}[k]\|^2$ ,  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}^H \mathbf{a}}$  – эрмитова норма вектора  $\mathbf{a}, \mathbf{v}_n^{(\tau)}[k] = \mathbf{W}_{NG-L, n+L+\tau, 2N_S-1} \mathbf{x}[k]$ .

Алгоритм синхронизации по виртуальным поднесущим и циклическому префиксу (CP-VS-B) [1] одновременно использует сигнал в частотной и во временной области:

$$\{\tilde{\tau}, \tilde{\nu}\} = \arg \min_{\tau, \nu} \sum_{k=0}^{K_{\text{syn}}-1} \left\| \mathbf{B} \mathbf{P}_{N_S-L}^H(\varphi) \mathbf{W}_{N_S-L, L+\tau, 2N_S-1} \mathbf{x}[k] \right\|^2, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{B} = \mathbf{I}_{N_S-L} - \mathbf{T}_{N_S-L, N} \mathbf{F} \mathbf{F}^H \mathbf{T}_{N_S-L, N}^+,$$

$$\mathbf{T}_{N_S-L, N}^+ = \left( \mathbf{W}_{N-(N_G-L), N_G-L, N_S-L}^T, \frac{1}{2} (\mathbf{W}_{N_G-L, 0, N_S-L} + \mathbf{W}_{N_G-L, N, N_S-L}) \right)^T.$$

Исследование характеристик алгоритмов синхронизации было проведено посредством компьютерного моделирования в рамках модели Ваттерсона [6] для двулучевого канала. На рис. 1 и рис. 2 приведены кривые зависимости от среднего энергетического отношения «сигнал-шум»  $\langle E_b/N_0 \rangle$ , где  $E_b$  – удельная энергия сигнала на бит сообщения,  $N_0 = \sigma^2 \tau_s$  – односторонняя спектральная плотность мощности АБГШ, для следующих

характеристик точности оценивания:  $\sigma_{\tilde{\nu}} = T \sqrt{\langle (\tilde{\nu} - \nu)^2 \rangle}$  – среднеквадратичного отклонения оценки частотного сдвига и  $P_{\tilde{\tau}} = 1 - P\{0 \leq \tilde{\tau} - \tau < N_G - L\}$  – вероятности выхода ошибки оценивания за границы интервала, отвечающего непораженной МСИ части циклического префикса. Результаты получены при  $K_{\text{syn}} = 8$  и расстоянии между лучами  $L = 6$  отсчетов. Для результатов на рис. 1 использовались относительная скорость замираний  $F_d T = 0,05$  и следующие параметры OFDM-сигнала:  $N = 140$ ,  $N_G = 10$ ,  $N_A = 128$ ; для результатов на рис. 2  $-F_d T = 0,005$ ,  $N = 16$ ,  $N_G = 10$ ,  $N_A = 12$ .

Рис. 1 демонстрирует, что в OFDM-системах связи с большим количеством поднесущих (более ста) алгоритмы (3), (4), использующие постоянство мощностей активных поднесущих передаваемого сигнала, могут успешно конкурировать с CP- и CP-VS-B-алгоритмами. Причем, если MOV-алгоритм (4) конкурентоспособен только с точки зрения оценивания частотного сдвига, то CSCD-алгоритм (3) хорошо оценивает и задержку во времени. Вместе с тем, как показывает рис. 2, в OFDM-системах связи с небольшим количеством поднесущих (несколько десятков) алгоритмы (3), (4) неработоспособны. Данный факт можно объяснить тем, что при неизменной полосе канала уменьшение числа поднесущих приводит к большей селективности канала на соседних поднесущих. Наилучшую точность символьной и частотной синхронизации при небольшом количестве поднесущих обеспечивает CP-VS-B-алгоритм (6).

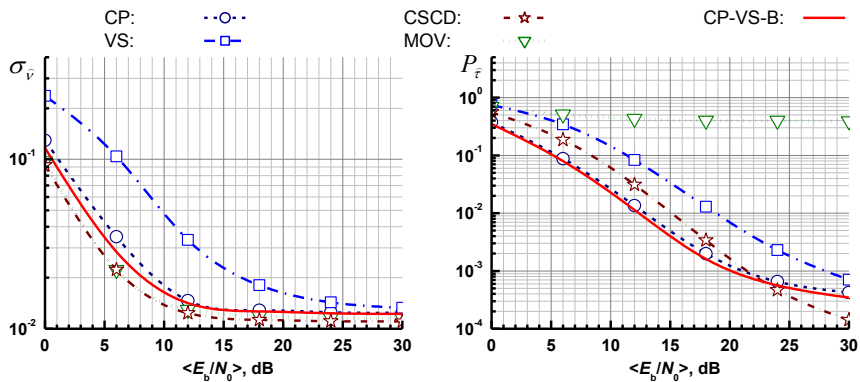


Рис. 1

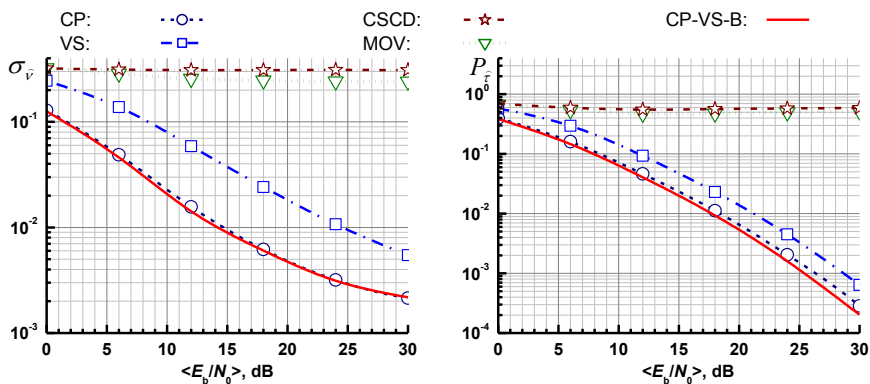


Рис. 2

- [1] Бочков Г.Н., Горохов К.В., Колобков А.В. // Известия вузов. Радиофизика. 2013. Т. 56, № 3. С. 184.
- [2] Chen B. // IEEE Signal Processing Letters. 2002. Vol. 9, № 4. P. 123.
- [3] Zeng X.N., Ghayeb A. // IEEE Trans. on Commun. 2008. Vol. 56, № 7. P. 1032.
- [4] Al-Dweik A., Hazmi A., Renfors M. // Proc. of 19th IEEE PIMRC. 2008. P.1.
- [5] Speth M., Classen F., Meyr H. // Proc. of 47th IEEE VTC. 1997. Vol. 3. P. 1807.
- [6] Watterson C. C., Juroshek J. R., Bensema W. D. // IEEE Trans. on Commun. Techn. 1970. Vol. 18, № 6. P. 792.

## О СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ БИМОНОПОЛЯ ГАВРИЛИНА-ДИРАКА

А.Т. Гаврилин

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

В предыдущих работах автора [1, 2] была предложена модель электрона в форме двух «слепленных» друг с другом магнитных зарядов (МЗ) противоположного знака – монополей Дирака. В рамках этой модели магнитный момент электрона имел чисто статическую природу и не связывался с вращением электрического субстрата электрона. Механический момент (спин) последнего вообще отрицался. С подачи канадского коллеги эта модель приобрела название, отраженное в заголовке данного доклада. В дальнейшем из экономии места для обозначения предложенной конструкции используется сокращение БМП. В контексте предложенной модели абсолютное значение МЗ получается делением экспериментально найденного значения магнитного момента электрона на его классический радиус  $r_0$ , неожиданно совпадая с нижним значением спектра, допустимых по Дираку [4] МЗ, полученного из условия непрерывности волновой функции электрона в поле МЗ.

В работе [3] модель БМП была распространена на другие заряженные лептоны: мюон и таун, которые понимались как возбужденные состояния БМП. Расчет спектра масс лептонов в [3] проводился в рамках нелинейной классической механики. При этом, однако, привлекались и квантовые представления. Так, притяжение монополей описывалось потенциалом Юкавы, который, как известно, является стационарным решением уравнения Клейна-Гордона. Кроме того, нулевые краевые условия в дифференциальном уравнении Дуффинга, описывающем колебания БМП, задавались в точках, одна из которых соответствовала  $2r_0$ , а вторая – его комптоновской длине волны  $\lambda$ .

В связи с изложенными обстоятельствами, по-видимому, целесообразно рассмотреть модель БМП с позиций квантовой механики. При этом, поскольку решения уравнений нерелятивистской динамики из [3] содержали сверхсветовые скорости изменения расстояния между монополями, для избавления от этой патологии пришлось обратиться к релятивистской квантовой теории.

Рассматривая монополи разных знаков как состояния одной и той же частицы, сильное взаимодействие между монополями (которое ниже вводится наряду с кулоновским) удобно (по аналогии с ядерными силами) описывать на языке изотопического спина, т.е. ввести двузначную динамическую переменную, определяющую МЗ монополя. В этом случае волновая функция БМП может быть записана в виде вектор-столбца («изоспинора»)

$$\Psi(\vec{r}, \tau) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Операторы, изменяющие зарядовые состояния монополей, задаются при помощи линейно независимых над полем комплексных чисел двухрядных матриц (матриц Паули)

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$



Любой оператор, действующий на 2D вектор-функцию, может быть выражен линейной комбинацией матриц  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ :

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \tau_i. \quad (3)$$

Заметим, что операторы  $S_i$  одновременно приводятся к диагональному виду и имеют собственные значения

$$S^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4}, \quad \tau_3 = \pm \frac{1}{2}, \quad (4)$$

как и у «обычного» половинного спина. Таким образом, этот последний – скорее семантический рудимент, навязывающий ложные образы. Тем не менее, попробуем получить «электромагнитостатический заменитель» механического момента электрона, исходя из рассмотренной в [3] модели, а именно, считать, что монополи помимо МЗ несут и электрический заряд: половину заряда электрона каждый:  $(e/2, +g)$  и  $(e/2, -g)$ , являясь по терминологии Швингера [5] дионами.

Электрическое и магнитное поле БМП, централизованного в начале координат, можно записать в виде

$$\bar{E}(\vec{r}) = \frac{e}{2} \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} + \frac{\vec{r} + \vec{r}_0}{|\vec{r} + \vec{r}_0|^3} \right), \quad \bar{B}(\vec{r}) = g \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{\vec{r} + \vec{r}_0}{|\vec{r} + \vec{r}_0|^3} \right). \quad (5)$$

Здесь  $r_0$  – половина «плеча» БМП и считается, что точка наблюдения  $g$  не попадает на дираковскую струну, связывающую МЗ дионов. Любопытно, что векторы  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  в общем случае не коллинеарны и, следовательно, локальный вектор Пойнтинга не равен нулю и перпендикулярен оси БМП:

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} \frac{eg}{2} \left[ \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} + \frac{\vec{r} + \vec{r}_0}{|\vec{r} + \vec{r}_0|^3} \right), \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{\vec{r} + \vec{r}_0}{|\vec{r} + \vec{r}_0|^3} \right) \right] = \frac{c}{2\pi} eg \frac{[\vec{r}, \vec{r}_0]}{|r^2 - r_0^2|^3}. \quad (6)$$

Таким образом, векторное поле плотности импульса ЭМП (отличающееся от  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})$  множителем  $1/c^2$ ) является соленоидальным с осью симметрии, задаваемой вектором  $r_0$ . Последнее обстоятельство делает несложным и вычисление плотности момента импульса ЭМП относительно данной оси

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi c} eg \frac{[\vec{r}_\perp, [\vec{r}, \vec{r}_0]]}{|r^2 - r_0^2|^3} = \frac{1}{2\pi c} eg \frac{[\vec{r}_\perp, [\vec{r}_\perp, \vec{r}_0]]}{|r^2 - r_0^2|^3} = -\frac{1}{2\pi c} eg \frac{r_\perp^2 \vec{r}_0}{|r^2 - r_0^2|^3}, \quad (7)$$

где  $r_\perp$  – составляющая вектора  $\mathbf{r}$ , перпендикулярная  $r_0$ . Если бы классическая электродинамика была справедливой на любых расстояниях от источников поля, то полный

момент импульса статической электромагнитной структуры, создаваемой БМП, получался бы интегрированием  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  по всему пространству. Однако по современным представлениям, на масштабах, сравнимых с комптоновской длиной волны элементарных частиц, классическая электродинамика перестает работать, поэтому ограничимся интегрированием (в сферической системе координат) по объему, лежащему за пределами центральной сферы некоторого радиуса «обрезания»  $a \geq r_0$ :

$$\begin{aligned} \bar{M}(a) &= -\frac{1}{2\pi c} e g \iiint_{\Omega} \frac{r_{\perp}^2 \bar{r}_0}{|r^2 - r_0^2|^3} = -\frac{\bar{r}_0}{2\pi c} e g \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_a^{\infty} \frac{r^2 r^2 dr}{|r^2 - r_0^2|^3} = \\ &= \frac{|e|g}{c} \frac{4}{3} \int_a^{\infty} \frac{r^4 dr}{|r^2 - r_0^2|^3} \bar{r}_0 = \frac{4}{3} \frac{|e|g}{c} \left( \frac{ar_0}{8} \frac{5a^2 - 3r_0^2}{(a^2 - r_0^2)^2} + \frac{3}{16} \ln \frac{a+r_0}{a-r_0} \right) \bar{r}_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что при  $a \approx 1,8r_0$  и минимальном, по Дираку, значении МЗ  $g \approx (137/2)|e|$ ,  $M(a) = \hbar/2$ .

Таким образом, статическая ЭМ-структура, инициируемая БМП, может создать иллюзию механического вращения заряженной элементарной частицы с магнитным моментом. Это замечание, разумеется, не снимает вопроса о взаимном движении дионов, и здесь для получения наблюдаемого спектра масс заряженных лептонов нельзя ограничиться ЭМ-взаимодействиями, хотя константа взаимодействия  $g$  между МЗ и много больше электростатического. Поэтому, как и в [3], мы присовокупили к ЭМ-взаимодействиям между дионами нелинейное скалярное взаимодействие.

Калибровочно инвариантный лагранжиан БМП в этом случае имеет вид

$$L = \bar{\Psi} \gamma^{\mu} (i \partial_{\mu} - e A_{\mu}) \Psi - \frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{16\pi} - (m+U) \bar{\Psi} \Psi - \frac{\partial_{\mu} U \partial^{\mu} U}{2\kappa} - \frac{P(U)}{\kappa}, \quad (9)$$

где использованы релятивистские единицы  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$ , лоренцева калибровка  $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$ , матрицы Дирака  $\gamma^{\mu}$ ,  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ ,  $P(U)$  – произведение потенциала Юкавы на многочлен 4-го порядка с неопределенными коэффициентами,  $\kappa$  – константа сильного взаимодействия,  $m$  – приведенная масса дионов. Порядок многочлена  $P(U)$  выбран из тех соображений, что уравнение Дуффинга в [3] с нелинейностью 3-го порядка давало хорошее приближение к наблюдаемым значениям масс заряженных лептонов. Постулируем, что потенциал  $U(\mathbf{r})$  сильного нелинейного взаимодействия МЗ является изотопически инвариантным, т.е. не зависит от электрических зарядов монополей.

Вариирование лагранжиана (9) дает пару уравнений относительно изоспинорных полей  $\psi_{+}(\mathbf{r})$  и  $\psi_{-}(\mathbf{r})$ :

$$(E-m)\psi_{+} = -\bar{\tau} \left( i\nabla + \frac{e}{2} \vec{A} \right) \psi_{-} + \left( U + \frac{e}{2} A_0 \right) \psi_{+} \quad (10)$$

$$(E+m)\psi_{-} = -\bar{\tau} \left( i\nabla + \frac{e}{2} \vec{A} \right) \psi_{+} + \left( U - \frac{e}{2} A_0 \right) \psi_{-} \quad (11)$$

и уравнение относительно скалярного поля  $U(\mathbf{r})$ :

$$\nabla^2 U(\vec{r}) + \frac{dP}{dU}(\vec{r}) = -\kappa m^2 (\bar{\psi}_+(\vec{r})\psi_+(\vec{r}) + \bar{\psi}_-(\vec{r})\psi_-(\vec{r})). \quad (12)$$

Если бы система уравнений (10-12) имела аналитическое решение для континуума коэффициентов  $P(U)$ , то располагаясь последними можно было бы получить экспериментально наблюдаемый спектр масс лептонов  $m_1, m_2, m_3$ , а затем по соответствующим собственным функциям  $\psi_{\pm}^{(2,3)}$  оценить времена жизни мюона и тауона. К сожалению, систему дифференциальных уравнений (10-12) можно решить только численно для фиксированных значений масс лептонов и коэффициентов многочлена  $P(U)$ , т.е. свести проблему к обратной задаче теории потенциала. В работе за начальное значение  $U(\mathbf{r})$  принимался потенциал Юкавы с массой «мезона» порядка 300 Мэв, а за  $P(U)$  тождественная функция:  $P(U)=U$ . Затем находилось решение системы (10-12) с их участием, это решение ставилось в схему прогонки, при достижении критерия точности ( $\delta m_i = 1\%$ ) процесс останавливался. Далее процесс повторялся на подпространстве квадратично интегрируемых функций  $\psi_{\pm}^{(2,3)}$ , ортогональном к найденному «основному состоянию», и т.д.

Явочным порядком показана разрешимость обратной задачи при сделанных в отношении потенциала взаимодействия дионов предположениях. Поскольку в критерии остановки процесса отсутствовали времена жизни мюона и тауона, их вычисленные значения отличались от экспериментально измеренных на один и пять порядков соответственно. Напрашивающееся включение указанных времен в критерий остановки, приводя к радикальному увеличению объема вычислений, не сулит особых приобретений в части приближения потенциала  $U(\mathbf{r})$  к более «красивому», с физической точки зрения, виду. По-видимому, выход из положения должен заключаться в выборе потенциала  $P(U)$  из более фундаментальных физических соображений.

- [1] Гаврилин А.Т. // В кн. Труды XX-й научн. конф. по радиофизике 16 мая 2016 г. Н. Новгород, 2016. С. 261.
- [2] Gavrilin A.T. // Conf.-School “Dynamics, Bifurcation and Chaos. 2016”. N. Novgorod, Russia, July 18-22, 2016. Book of Abstracts. P. 11.
- [3] Gavrilin A.T. // ShilnikovWorkShop 2016. 16-17 Dec. of 2016 Book of Abstracts. P. 18.
- [4] Dirac P.A.M. // Proc. Roy.Soc. 1931. Vol. A.133. P. 60.
- [5] Швингер Ю. // Частицы, источники, поля. Т.2. – М.: 1Мир, 1976. 480 с.

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ БАКТЕРИЙ ВДОЛЬ ГРАДИЕНТА КОНЦЕНТРАЦИИ ХИМИЧЕСКОГО ВЕЩЕСТВА В СРЕДЕ

А.И. Калякулина, Е.В. Панкратова, В.Ю. Забурдаев

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

Бактерии являются наиболее многочисленными живыми организмами [1]. Многообразие форм, размеров и способов передвижения позволяют им адаптироваться к различным внешним условиям [2]. Несмотря на то, что такие движения представляются случайными, бактерии могут ими управлять, чтобы двигаться в некотором выбранном направлении. Одним из наиболее известных примеров подобного направленного движения является хемотаксис – способность бактерий двигаться вдоль градиента химического вещества в среде [3]. Бактерии в однородной среде часто следуют некоторым выбранным паттернам движения, которые значительным образом влияют на процесс хемотаксиса [4].

Наиболее изученным паттерном является «run-and-tumble» бактерии *Escherichia coli*. Для движения *E. coli* использует несколько вращающихся флагелл. При вращении флагелл против часовой стрелки *E. coli* движется относительно прямолинейно («run»), при вращении флагелл по часовой стрелке происходит смена направления движения («tumble») [5]. Среднее значение угла между текущим и новым направлениями составляет примерно  $62^\circ$  [6]. Существуют бактерии с одной флагеллой, у которых среднее значение угла между двумя последовательными направлениями движения составляет примерно  $180^\circ$ . Этот паттерн движения имеет название «run-reverse».

Следует отметить, что бактерии способны изменять характер движения при изменении градиента химического вещества в среде. При движении в направлении градиента они увеличивают время прямолинейного движения («run»), при движении в обратном направлении – уменьшают. Одной из оценок эффективности процесса хемотаксиса обычно служит скорость дрейфа бактерии в направлении градиента химического вещества. Благодаря разработанной линейной теории хемотаксиса [7], скорость дрейфа была вычислена для некоторых базовых стратегий движения [4, 7, 8].

Недавние исследования показали, что бактерия *Vibrio alginolyticus* движется согласно паттерну «run-reverse-flick» с двумя различными чередующимися углами поворота. В то время как среднее значение одного из углов («reversal») составляет примерно  $180^\circ$ , значение второго угла может изменяться и значительно зависит от размера бактерии. Ранние исследования скорости дрейфа полагали второй угол равным  $90^\circ$ , что значительно упрощало вычисления.

В данной работе представлено аналитическое исследование особенностей движения бактерии вдоль градиента концентрации химического вещества в среде в рамках стратегии с двумя различными чередующимися углами поворота. Выражение, полученное для определения скорости дрейфа в данном случае (детали вычислений приведены в работе, которая в настоящее время готовится к опубликованию в одном из зарубежных журналов), позволяет обобщить ранее полученные результаты [4, 8] и получить детальную картину поведения бактерий под влиянием химических веществ в среде.

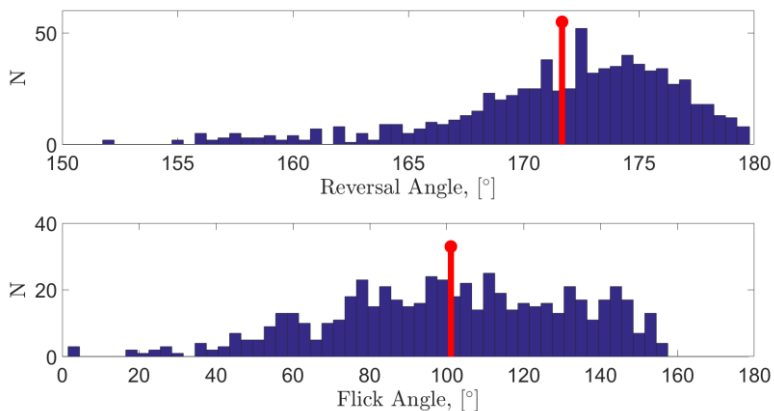


Рис. 1

Экспериментальные данные, недавно полученные с помощью высокоточного метода наблюдения за траекториями движения бактерии *V. alginolyticus*, позволили получить информацию об углах, чередование которых происходит в процессе хемотаксиса [9]. В частности, на рис. 1 (сверху) представлена гистограмма, отражающая распределение углов разворота. Из полученных данных видно, что среднее значение угла разворота примерно равно  $172^\circ$  (красная линия). Углы, на которые происходит поворот между разворотами, могут принимать значения в очень широком диапазоне, если рассматривать всю популяцию бактерий, рис. 1 (нижняя гистограмма), со средним значением  $\sim 102^\circ$ .

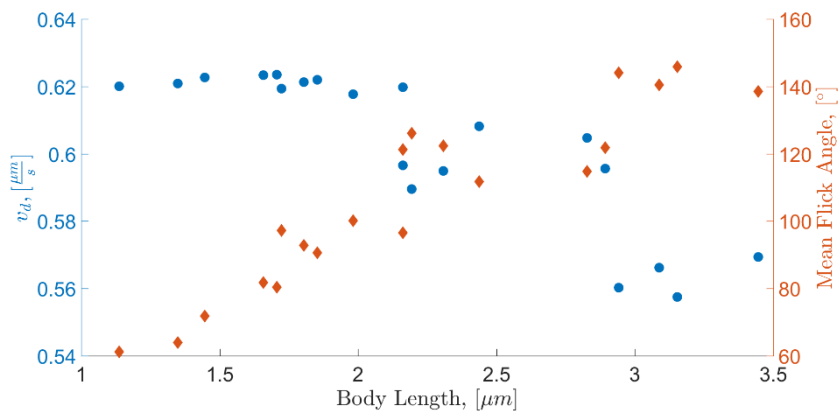


Рис. 2

Однако более детальное исследование траекторий показало не только высокий уровень детерминизма в поведении отдельных бактерий, но и существование зависимости данного угла от размера бактерий (красные символы на рис. 2): чем больше бактерия, тем больший угол поворота она осуществляет в процессе хемотаксиса. Вычисленная на основе этих данных скорость дрейфа демонстрирует вариативность результатов при различных значениях углов поворота и размеров бактерий. Можно заметить, что меньшие по длине бактерии имеют более высокую скорость передвижения, и поэтому достигают максимальной концентрации химического вещества быстрее, чем остальные (рис. 2, синие символы). Для получения скорости дрейфа нами использовались параметры, характерные для движения бактерии *V.alginolyticus*, а именно: частота совершения поворотов  $\lambda = 3.3 \text{ с}^{-1}$ , средняя скорость на прямолинейном участке движения  $v_s = 45 \text{ мкм/с}$ , среднее значение косинуса угла разворота бралось равным  $-0.99$ , величина градиента концентрации химического вещества в среде  $|\nabla c| = 0.5 \text{ мкм}^{-4}$ , константа нормализации, входящая в выражение для функции отклика,  $W = 0.0458 \text{ мкм}^3$  [4].

В заключении хотелось бы отметить, что постоянное развитие методов измерений позволяет получать детальную информацию о поведении бактерий на уровне отдельных клеток, что, в свою очередь, способствует развитию более точных моделей математического описания миграционных процессов в таких сложных системах. В данной работе мы рассмотрели один из наиболее общих паттернов движения с двумя различными чередующимися углами поворота. Описанная модель учитывает историю движения бактерии, позволяет принимать во внимание степень неоднородности популяции клеток и соотносить различия поведения клеток в общей популяции с их размером. Следует отметить, что возможна дальнейшая настройка модели. Можно рассматривать различные распределения времен прямолинейного движения бактерии или разные функции отклика. Ещё одним параметром, потенциально зависящим от размера бактерии, является коэффициент вращательной диффузии. Интересно было бы проверить этот эффект аналитически и экспериментально. Такие аналитические соотношения как скорость дрейфа, позволяют установить связь между паттерном движения бактерии и эффективностью процесса хемотаксиса, и могут быть использованы для экспериментального получения неизвестных на данный момент параметров бактериальной сенсibilизации на основе экспериментов по хемотаксическому дрейфу.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 16-12-10496.

- [1] Wiebe W. J. // Proc Natl AcadSci USA. 1998. Vol. 95. P. 65786583.
- [2] Kearns D. B. // Nature Reviews Microbiology. 2010. Vol. 8, №. 9. С. 634.
- [3] Eisenbach M. // The Journal of general physiology. 2004. Vol. 124. №. 2. P. 105.
- [4] Taktikos J., Stark H., Zaburdaev V. // PloS one. 2013. Vol. 8, №. 12. P. e81936.
- [5] Turner L., Ryu W. S., Berg H. C. // Journal of bacteriology. 2000. Vol. 182, №. 10. P. 2793.
- [6] Berg H. C., et al. // Nature. 1972. Vol. 239, № 5374. P. 500.
- [7] De Gennes P. G. // European Biophysics Journal. 2004. Vol. 33, № 8. P. 691.
- [8] Locsei J. T. // Journal of mathematical biology. 2007. Vol. 55, № 1. P. 41.
- [9] TauteK. M., et al. // Naturecommunications. 2015. Vol. 6.

## КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СЛУЧАЙНОГО ДВИЖЕНИЯ КЛЕТОК НА ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А.А. Харчева, А.А. Дубков, В.Ю. Забурдаев

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

В последние годы, в связи с актуальными проблемами биоинженерии, большое внимание уделяется анализу движения бактерий и клеток. Подход к подвижности клеток как к случайному движению является весьма плодотворным [1]. Применение мощных методов теории случайных процессов приводит к более глубокому пониманию очень медленного движения этих биологических объектов, что позволит в перспективе эффективно управлять им.

В данной работе был проведен статистический анализ экспериментальных данных по подвижности 30-ти клеток (NIH3T3 фибробласты) на гладкой поверхности. Данные были записаны на временном промежутке 60 часов с интервалом в 5 минут (720 отсчетов для каждой клетки). Изначально все траектории клеток были “привязаны” к началу координат. При статистическом анализе применялось усреднение по ансамблю и по временизаписанных временных рядов. В качестве основных характеристик рассматривались: среднее значение и среднеквадратичное отклонение скорости клеток, корреляционные функции проекций скорости и модуля скорости, гистограммы скорости, среднеквадратичное отклонение клеток от начала координат (СКО).

Прежде всего, анализ траекторий клеток на плоскости показал, что смещением их центра масс можно пренебречь (см. рис. 1).

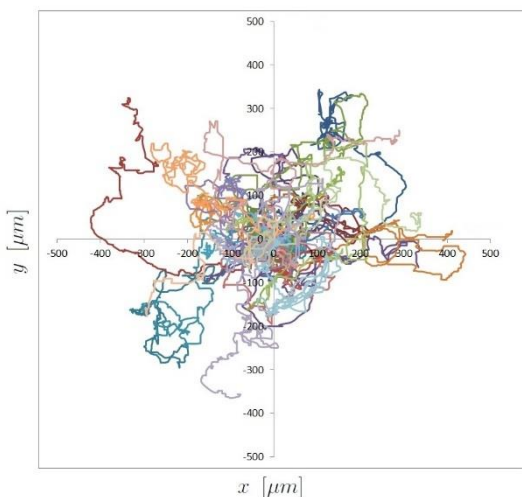


Рис. 1

Обнаружено, что корреляционная функция проекций скорости имеет два существенно различающихся временных масштаба, в то время как в корреляционной функции модуля скорости присутствует лишь меньший из них. Анализ гистограмм вероятностных распределений проекций скорости и корреляционной функции квадратов проекций указал на негауссовость рассматриваемых случайных процессов. Расчет СКО подтвердил наличие переключающихся режимов диффузии клеток: баллистический режим движения на малых временах сменяется диффузионным в асимптотике.

На основе результатов статистической обработки данных была предложена теоретическая модель подвижности клеток. Показано, что скорость  $\mathbf{v}(t)$  клеток на ровной поверхности может быть адекватно описана стохастическим интегро-дифференциальным уравнением с экспоненциальной функцией памяти

$$\dot{\bar{v}} = -\gamma\bar{v} + \Delta^2 \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \bar{v}(\tau) d\tau + \sigma(v)\bar{\xi}(t), \quad (1)$$

где  $\bar{\xi}(t)$  – гауссов белый шум с нулевым средним и одинаковыми интенсивностями  $\langle \bar{\xi}_i(t)\bar{\xi}_i(t+\tau) \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(\tau)$ .

Уравнение (1) сводится к системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая станет замкнутой, только если нелинейность имеет следующий вид

$$\sigma(v) = \sqrt{c_0 v^2 + c_1}.$$

Полученная система позволяет рассчитать корреляционные функции проекций скорости

$$K_{v_x}(\tau) = \phi_1 e^{-\beta_1 \tau} + \phi_2 e^{-\beta_2 \tau} \quad (\tau \geq 0) \quad (2)$$

и СКО

$$\langle (x(t_0+t) - x(t_0))^2 \rangle = 2 \left( \phi_1 \frac{\beta_1 t + e^{-\beta_1 t} - 1}{\beta_1^2} + \phi_2 \frac{\beta_2 t + e^{-\beta_2 t} - 1}{\beta_2^2} \right), \quad (3)$$

где введены следующие обозначения

$$\beta_{1,2} = \frac{\alpha + \gamma - c_0 D}{2} \mp \sqrt{\frac{(\alpha + \gamma - c_0 D)^2}{4} + \Delta^2 - \alpha(\gamma - c_0 D)}, \quad (\beta_2 > \beta_1)$$

Для нахождения неизвестных параметров, входящих в выражения для корреляционной функции и СКО, был проведен фиттинг корреляционной функции (см. рис. 2) и получены следующие величины параметров  $\phi_1 = 0.08245$ ,  $\phi_2 = 0.3675$ ,  $\beta_1 = 0.008526$ ,  $\beta_2 = 0.3828$ .



Подставляя найденные значения в выражение (3) для СКО, мы провели сравнение теоретической и экспериментальных кривых. Рис. 3 демонстрирует отличное совпадение баллистического режима.

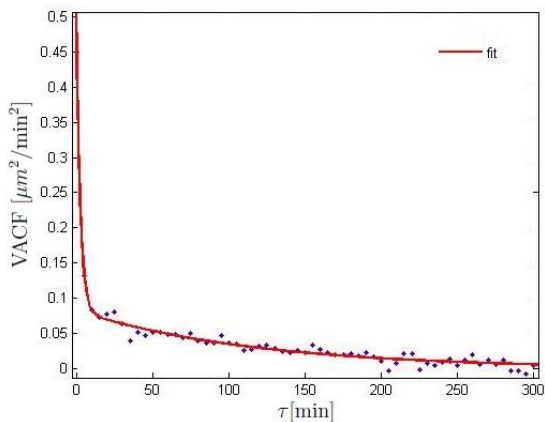


Рис. 2

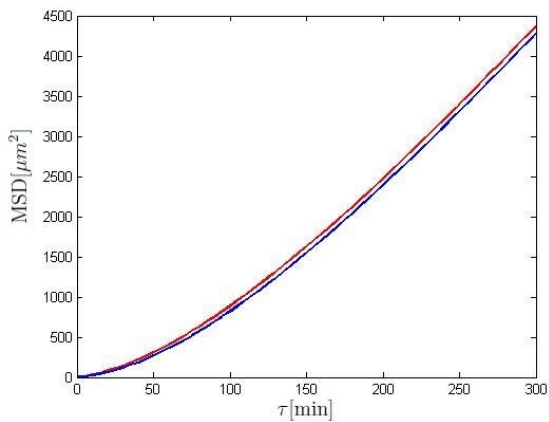


Рис. 3

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 16-12-10496.

- [1] Selmeczi D., Li L., et al // Eur. Phys. J. ST. 2008. Vol. 157. P.1.
- [2] Selmeczi D., et al // Biophys. J. 2005. Vol. 89. P.912.
- [3] Li L., Cox E.C., et al // Phys. Biol. 2011. Vol. 8. P.046006.

## К ВОЗМОЖНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ САМОСОГЛАСОВАННЫХ КВАНТОВЫХ ВИХРЕЙ ТОКА

А.Е. Китаев

АО «СКБ РИАП»

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение для волновой функции, напоминающее уравнение Гинзбурга-Ландау [1], но отличающееся от него знаком кубичной добавки

$$\left\{ \frac{1}{2m} \hat{p}^2 - \frac{e}{mc} \vec{A} \hat{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 + E - \beta |\psi|^2 \right\} \psi = 0.$$

Величина  $E$  (аналог  $a$ , см. [1]) может рассматриваться как энергия, взятая с противоположным знаком.

Также запишем уравнение для векторного потенциала (полевое уравнение). Для удобства приведем его в переменных модуль-фаза ( $\psi = a \exp(iS/\hbar)$ ):

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi e}{mc} a^2 (\nabla S - \frac{e}{c} \vec{A}).$$

В тех областях пространства, где  $a$  не равно нулю, мы будем искать решение, которое обращает в ноль и левую, и правую часть полевого уравнения. Там же, где  $a = 0$ , мы будем иметь следующее неоднородное уравнение:

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi e}{mc} a^2 \nabla S.$$

Будем решать задачу для области, обладающей цилиндрической симметрией. Если функция  $a$  имеет вид кольца радиусом  $R$  (и при этом достаточно быстро спадает при отклонении радиальной координаты от радиуса  $R$  в обе стороны), можно потребовать, чтоб решение полевого уравнения уменьшалось по модулю до нуля в бесконечности и оставалось ограниченным во внутренней области кольца. Таким условиям будут удовлетворять решение  $A_\varphi = BR^2/(2r) = \Phi/(2\pi r)$  во внешней области кольца (таким же поле будет и внутри кольца) и решение, имеющее пределом  $A_\varphi = Br/2$  при стремлении  $r$  к нулю – во внутренней. Здесь  $B$  –  $z$ -компонента индукции магнитного поля во внутренней области, а  $\Phi$  – магнитный поток через сечение кольца. Решением для  $S$  будет величина  $S = \hbar n \varphi$ .

Если в уравнении для волновой функции аналогично перейти к переменным модуль-фаза, уравнение для  $a$  можно записать следующим образом

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} \right) + \frac{1}{2mr^2} \left( \hbar n - \frac{e\Phi}{2\pi} \right)^2 a + Ea - \beta a^3 = 0.$$

Вторая скобка обратится в ноль, если  $\Phi = 2\pi \hbar n c/e$ . Тогда приближенным решением для  $a$  (при больших значениях  $n$  и  $R$ , когда можно пренебречь вторым слагаемым в первой скобке) является функция

$$a(r) = \frac{\hbar\sqrt{2E/\beta}}{ch\sqrt{2mE}(r-R)}.$$

Данное солитоноподобное (колоколообразное) сгущение  $a$  можно заменить прямоугольным профилем, введя усредненную величину  $a_m = 2\sqrt{E/\beta}$ . Это может быть удобным, если искать векторный потенциал в областях, где  $a$  стремится к нулю, используя обычные формулы электродинамики. Если  $a$  спадает достаточно резко, можно применить следующее граничное условие для  $B$

$$B = \frac{4\pi}{c} j_s = \frac{4\pi}{c} e a_m^2 V_\phi \delta, \quad \delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}}, \quad V_\phi = \frac{n\hbar}{mR}$$

Здесь  $j_s$  – поверхностный ток,  $\delta$  – толщина кольца. Тогда находим

$$B = 64\pi^2 \frac{e^3 \hbar^3 n E}{m^3 c^3 \beta^2}, \quad R = \frac{m^{3/2} c^2 \beta}{4\pi e^2 \hbar \sqrt{2E}}.$$

Обычно в качестве дополнительного условия требуют однозначности волновой функции. Тогда азимутальное квантовое число  $n$  – целое. Однако фаза волновой функции считается неизмеряемой на опыте величиной. Возможно, имеет смысл требовать лишь однозначности величины  $a$ . В этом случае  $n$  может быть любым. При  $n = 1/2$  мы получаем обычный квант магнитного потока. При других (дробных) значениях  $n$  (например,  $1/3$ ) мы получим другие значения «элементарного» магнитного потока. Если же мы потребуем однозначности квадрата модуля волновой функции  $\psi$ , то для случая стоячих волн (когда вместо множителя  $e^{in\phi}$  в решении будет присутствовать множитель  $\sin(n\phi)$  или  $\cos(n\phi)$ ) допустимы не только целые значения  $n$ , но и полуцелые (например,  $n = 1/2$ ).

Возможный реальный прототип найденных приближенных решений – это вихри в шубниковской фазе сверхпроводника (вихри Абрикосова). По-видимому, аналогичный вихрь в приповерхностном слое (макротовихрь) может определять и диамагнетизм массивного цилиндрического сверхпроводника в однородном магнитном поле. То есть помимо режима (моды), когда плотность сверхпроводящих электронов равномерно распределена по объему сверхпроводника (и проникновение магнитного поля определяется «лондонской» длиной), возможно существование режима, когда сверхпроводящие электроны стянуты к поверхности образца и образуют там токовый слой (толщиной  $\delta$ , что совпадает с длиной когерентности) с колоколообразным профилем, компенсирующий магнитное поле, приложенное извне. Также можно предположить, что подобные вихри существуют в тех образцах материалов, где наблюдается квантовый эффект Холла. Здесь удобно использовать классическое приближение к движению электронов. Если применить модифицированные уравнения Лагранжа [2], учитывающие энергообмен между электронами и полем векторного потенциала, можно получить стационарное решение для электронов, вращающихся в поле  $A_\phi = BR^2/2(r)$ . Данное вращение происходит в сторону, противоположную циклотронному вращению. Это (наряду

с эффектом ослабления действия векторного потенциала при учете энергообмена) позволяет в данной ситуации заменить выражение  $U_H = BVs/c$  для холловского напряжения [3] выражением  $U_H = -BV_s/(2c)$ , где  $s$  – ширина пластины, а  $V$  – скорость электронов.

Проведя ряд тождественных алгебраических преобразований легко получить следующее выражение:

$$U_H = -\frac{I\Phi}{2Nec}.$$

Здесь  $N$  – число электронов в объеме пластины,  $I$  – ток, а  $\Phi$  – магнитный поток, пронизывающий пластину.

Будем считать, что общий магнитный поток, проходящий через образец, можно разбить на  $K$  квантов (каждый квант относится к своей «трубке» магнитного поля). Фактически мы приходим к представлению, когда электроны внутри образца вращаются вокруг «трубок» магнитного потока, проникшего в образец. Тогда

$$U_H = -\frac{I\Phi_q K}{2ecN} = I\left(-\frac{\Phi_q K}{2ecN}\right).$$

Если ток создается электронами, заряд  $e$  меньше 0. В этом случае, если квант потока положителен, величина в скобках также будет положительной. Обычно считается, что  $\Phi_q = hc/2e$ . С учетом наших допущений мы изменим вид этой формулы, чтобы не путаться со знаком заряда:  $\Phi_q = hc/2|e|$ .

Учитывая приведенное выше решение самосогласованной задачи, разумно допустить возможность существования квантов потока и с другими целыми и полуцелыми  $n$  (квантовыми числами):  $\Phi_{qn} = nhc/|e|$ . Тогда

$$U_H = I\left(-\frac{nhK}{2e|e|N}\right) = IR_H, \quad R_H = -\frac{nhK}{2e|e|N}.$$

Здесь  $R_H$  – холловское сопротивление. Величина  $R_H$  будет положительной ( $e < 0$ ). Отметим также, что вращающийся вокруг такого вихря с магнитным потоком  $\Phi_{qn}$  электрон имеет момент, равный  $n\hbar$ . Варьируя величины  $n$  (целое или полуцелое),  $N$  и  $K$  (целые), мы получим холловское сопротивление как для целочисленного, так и для дробного квантового эффекта Холла. Например, для случая  $N = K$  (когда вокруг каждой «трубки» с квантом магнитного потока вращается лишь один электрон – это является особенностью тонких образцов) и для половинного азимутального квантового числа мы получим целочисленный квантовый эффект Холла [4].

[1] Максимов Е.Г. // УФН. 2010. Т. 180. С. 1231.

[2] Китаев А.Е. // Труды XIX Научной конференции по радиофизике. – Н.Новгород: ННГУ, 2015.

[3] Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М. “Наука” 1976. С. 213.

[4] Фон Клитцинг К. // УФН. 1986. Т. 150. С.107.

## КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР С СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ КОНДЕНСАТОРОМ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЁМКОСТЬЮ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

О.С. Костромина<sup>1</sup>), А.А. Потапов<sup>2</sup>), И.В. Ракуть<sup>1</sup>)

<sup>1</sup>)ННГУ им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup>)Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

С конца прошлого века во всём мире ведутся интенсивные исследования в рамках нового междисциплинарного научного направления, заключающегося в объединении активных диэлектрических материалов с технологиями микроэлектронного производства. Это направление, получившее название «интегрированные сегнетоэлектрики», даёт возможность создания нового поколения элементной базы современной радиоэлектроники, основанной на нелинейных эффектах в таких соединениях [1].

Мощный импульс в развитии интегрированных сегнетоэлектриков даёт открытие двуслойных сегнетоэлектрических систем, обладающих отрицательной ёмкостью [2] при комнатной температуре. Мы будем называть такие системы с отрицательной ёмкостью  $NC$ -конденсаторами. Напряжение на  $NC$ -конденсаторе связано с зарядом  $q$  на его обкладках выражением:

$$U_{NC} = -\alpha \cdot q + \beta \cdot q^3, \quad (1)$$

следующим из теории сегнетоэлектричества, развитой В. Л. Гинзбургом в статье [3] в рамках теории Ландау фазовых переходов второго рода. Параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , входящие в формулу (1), считаются положительными и зависят как от свойств материалов, образующих сегнетоэлектрическую пару и обеспечивающих термодинамическую устойчивость эффекта отрицательной ёмкости, так и от геометрии  $NC$ -конденсатора [2]. Для  $NC$ -конденсатора, полученного в экспериментах, описанных в статье [2],  $\alpha \sim 10^{10} \text{ В} \cdot \text{Кл}^{-1}$  и  $\beta \sim 0,5 \cdot 10^{29} \text{ В} \cdot \text{Кл}^{-3}$ .

В данном докладе рассмотрен колебательный контур с  $NC$ -конденсатором под воздействием напряжения  $U(t)$ , которое является гауссовским дельтакоррелированным случайным процессом интенсивностью  $D_U$  с нулевым средним:

$$\langle U(t) \rangle = 0, \quad \langle U(t) \cdot U(t') \rangle = 2 \cdot D_U \cdot \delta(t - t'). \quad (2)$$

Используя 2-й закон Кирхгофа и формулу (1), получим для заряда  $q$   $NC$ -конденсатора в контуре нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$L \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} - \alpha \cdot q + \beta \cdot q^3 = U(t), \quad (3)$$

где  $L$  — величина индуктивности контура.

Для проведения дальнейшего анализа удобно перейти к безразмерным переменным

$$\tau = \sqrt{\frac{\alpha}{L}} \cdot t, \quad x = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot q, \quad \xi(\tau) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^3}} \cdot U(t).$$

В этих переменных задача (2)-(3) будет выглядеть следующим образом:

$$\ddot{x} - x + x^3 = \xi(\tau), \quad \langle \xi(\tau) \rangle = 0, \quad \langle \xi(\tau) \cdot \xi(\tau') \rangle = 2 \cdot D_\xi \cdot \delta(\tau - \tau'), \quad (4)$$

где точка над безразмерным зарядом  $x$  означает дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ , а интенсивность случайного процесса перенормируется как

$$D_\xi = D_U \beta / (\alpha^2 \sqrt{\alpha L})$$

Следуя классическому методу [4], перепишем уравнение второго порядка в (4) в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^3 + \xi(\tau), \quad (5)$$

и затем перейдём к уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для плотности вероятности  $p(x, y, \tau)$ :

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + y \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + (x - x^3) \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = D_\xi \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (6)$$

Однако описание статистических свойств рассматриваемой системы с помощью параболического уравнения (6) представляется нам довольно сложным.

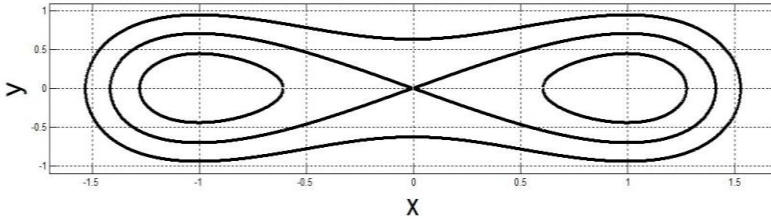


Рис.

Для того, чтобы найти более простое статистическое описание нашей системы, рассмотрим сначала ситуацию при отсутствии случайных возмущений, т. е. когда  $\xi(\tau) = 0$ . В этом случае система (5) является гамильтоновой с функцией Гамильтона:

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \quad (7)$$

Её фазовые траектории  $H(x, y) = h$ , где  $h$  — безразмерная энергия в контуре, представлены на рисунке. Без внешнего случайного воздействия система (5) сводится к уравнению Дуффинга с гомоклинической восьмёркой:

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0, \quad (8)$$

решения которого выражаются через эллиптические функции Якоби [5].

Вычислим теперь производную по времени от функции Гамильтона (7) в силу системы (5):

$$\frac{dH(x, y)}{d\tau} = y \cdot \xi(\tau) \quad (9)$$

Из формулы (9) видно, что при не очень сильном случайном воздействии энергия в контуре за период невозмущённых колебаний меняется незначительно, следовательно, можно провести усреднение уравнения (9) по этому периоду:

$$\frac{dh}{d\tau} = \xi_h(\tau) = \overline{y \cdot \xi(\tau)} \quad (10)$$

где

$$\overline{f} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(\tau) \cdot d\tau \quad (11)$$

а в качестве порождающего решения взято точное решение невозмущённого уравнения Дуффинга (8).

Случайный процесс  $\xi_h(\tau)$ , входящий в правую часть уравнения (10), обладает следующими средними:

$$\langle \xi_h(\tau) \rangle = 0, \quad \langle \xi_h(\tau) \cdot \xi_h(\tau') \rangle = 2 \cdot D(h) \cdot \delta(\tau - \tau') \quad (12)$$

где  $D(h) = D_\xi \cdot \overline{y^2}$  — переменный коэффициент диффузии.

Из правила усреднения (11) следует, что

$$\overline{\frac{d(x \cdot \dot{x})}{d\tau}} = \overline{\dot{x}^2} + \overline{x \cdot \ddot{x}} = 0$$

значит, в силу уравнения (8):

$$\overline{y^2} = \overline{x^4} - \overline{x^2} \quad (13)$$

Входящие в формулу (13) средние значения степеней безразмерного заряда вычислены в [6], поэтому переменный коэффициент диффузии равен:

$$D(h) = \begin{cases} \frac{2 \cdot D_\xi}{3} \cdot \frac{1}{2 - k_1^2} \cdot \left[ \frac{E(k_1)}{K(k_1)} - \frac{2 \cdot (1 - k_1^2)}{2 - k_1^2} \right], & -\frac{1}{4} \leq h < 0 \\ \frac{2 \cdot D_\xi}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot k_2^2 - 1} \cdot \left[ \frac{E(k_2)}{K(k_2)} + \frac{1 - k_2^2}{2 \cdot k_2^2 - 1} \right], & h > 0 \end{cases} \quad (14)$$

где  $k_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \sqrt{1+4 \cdot h}}{1 + \sqrt{1+4 \cdot h}}}$ ,  $k_2 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1+4 \cdot h}}{2 \cdot \sqrt{1+4 \cdot h}}}$ , а  $K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно.

Таким образом, согласно общей методике [4], стохастическому уравнению (10) с случайным процессом (12) можно поставить в соответствие уравнение ФПК вида:

$$\frac{\partial \Pi(h, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 [D(h) \cdot \Pi(h, \tau)]}{\partial h^2} \quad (15)$$

Уравнение ФПК (15) для функции распределения  $\Pi(h, \tau)$  по средним энергиям за период проще, чем уравнение ФПК (6), потому что даёт огрублённое описание исследуемой нами системы.

Перспективами данной работы является численное и аналитическое исследование огрублённого уравнения ФПК (15), а также распространение развитого выше метода на более реалистические ситуации, например, учёт сопротивления в колебательном контуре и рассмотрение негауссовских и немарковских случайных входных напряжений. Наконец, результаты, изложенные в докладе, будут служить теоретическим обоснованием ряда ключевых фрагментов, полностью открытых для отечественного пользователя систем автоматизированного проектирования радиоэлектронных приборов на базе интегрированных сегнетоэлектриков.

- [1] Воротилов К.А., Мухортов В.М., Сигов А.С. Интегрированные сегнетоэлектрические устройства. – М.: Энергоатомиздат, 2011. 174 с.
- [2] Khan A.I., et al. // Appl. Phys. Lett. 2011. Vol. 99. P. 113501-1-3.
- [3] Гинзбург В.Л. // ЖЭТФ. 1945. Т. 15, вып. 12. С. 739.
- [4] Андронов А.А., Витт А.А., Понтрягин Л.С. // ЖЭТФ. 1933. Т. 3, вып. 3. С. 165.
- [5] Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. –М.-Ижевск: РХД, 2005. 420 с.
- [6] Костромина О.С., Потапов А.А., Ракуть И.В., Рассадин А.Э. // В кн.: Proc. 10-th Int. Scientific Conf. «Chaos and Structures in Nonlinear Systems. Theory and Experiment», devoted to the 75th anniversary of Prof. Z. Zhanabaev (Kazakhstan, Almaty, June 16 – 18, 2017). – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2017. P. 315.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОПОТОЧНОЙ СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ С ОЧЕРЕДЬЮ

А.А. Лапинов<sup>1)</sup>, С.А. Лапинова<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup>ННГУ им. Н.И. Лобачевского

<sup>2)</sup>НИУ ВШЭ Нижний Новгород

Современные технологии, связанные с совершенствованием компьютерных систем и систем связи привели к значительному увеличению объемов обрабатываемой информации. Хранение и обработка данных выходят на первое место в ряду научно-исследовательских задач. На сложность рассматриваемых процессов и моделей влияют как количество всевозможных структурных подходов к построению систем в зависимости от их назначения, так и сложность обрабатываемых данных, а именно их тип, размер и характер поставленных задач. Выстраивание моделей взаимодействия между различными этапами обработки информации с точки зрения оценки вероятности состояний, в которых может находиться система, занимается теория массового обслуживания, а описываемые математические модели называются системами массового обслуживания [1]. В качестве примеров подобных систем можно привести производственные поточные линии, системы передачи данных см. рис. 1 [2], удаленные хранилища данных, MIMD, SIMD, MISD архитектуры см. рис. 2, а также любые системы, требующие больших вычислительных мощностей. В данной работе рассматривается модель системы, способной хранить и распределять задачи между несколькими параллельными узлами обработки данных.

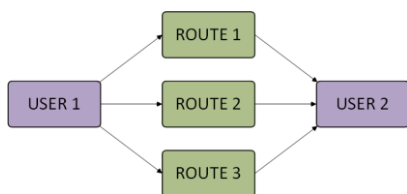


Рис. 1

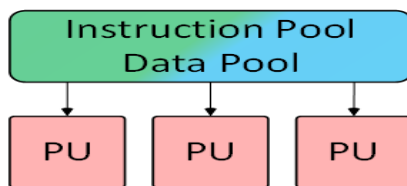


Рис. 2

Одной из главных целей анализа подобных структур является определение оптимальных параметров работы и расчет распределения вероятностей состояний системы. В основе модели рассматривается многофазная система массового обслуживания с конечной очередью, состоящая из накопителя с памятью на  $N$  пакетов и  $M$  узлов обработки данных. Каждый пакет обрабатывается независимо.  $\lambda$  – плотность потока входящих в систему пакетов,  $r$  – плотность потока между блоками памяти и обработки,  $p$  – плотность потока, исходящего из блока обработки информации. Для упрощения нашей модели, мы предполагаем, что передача информации из блока памяти в ячейку обработки происходит мгновенно и при нахождении свободной ячейки устройство сразу начинает искать новую свободную ячейку для следующей задачи. В этом случае поток  $r$  можно представить, как  $r = (M - m)\phi$ , где  $m$  – количество занятых ячеек обработки информации, а  $\phi$  – параметр, отвечающий за обнаружение свободной ячейки. Поток  $p = m\mu$ , где

$\mu$  – количество пакетов, обрабатываемых одним узлом в единицу времени или зависящее от блоков, стоящих после системы. Результирующая схема устройства представлена на рис. 3. Используя заданные параметры, предлагается рассчитать время нахождения системы в разных состояниях, описываемых вектором:  $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_{00}, \mathcal{S}_{10}, \dots, \mathcal{S}_{ij}, \dots, \mathcal{S}_{NM}\}$ , где  $\mathcal{S}_{ij}$  – состояние, когда система обрабатывает  $j$  пакетов  $0 \leq j \leq M$ , а в накопителе находится  $i$  пакетов  $0 \leq i \leq N$ . Уровень загрузки системы соответствует  $i + j$  пакетам.

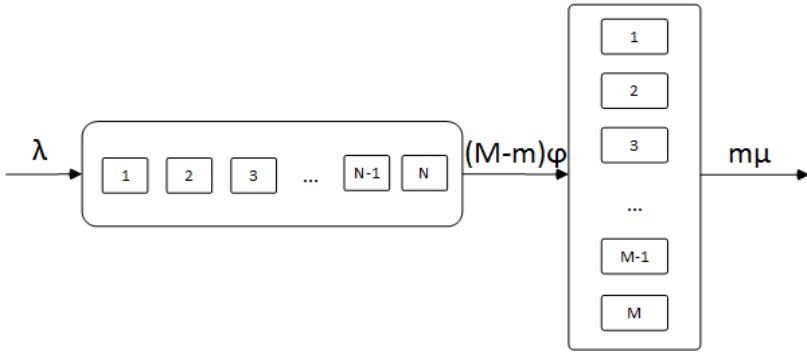


Рис. 3

Граф состояний систем с потоками между модулями представлен на рис. 4.

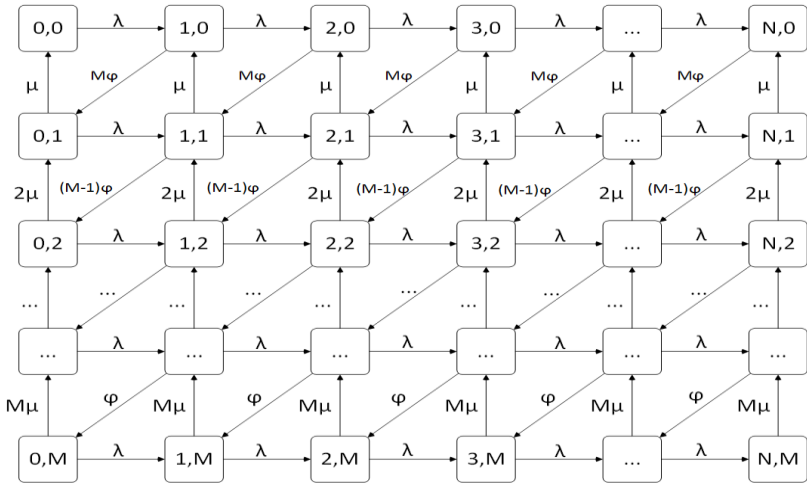


Рис. 4

Для моделирования таких систем используют Пуассоновские случайные процессы. В этом случае вероятности состояний описываются системой дифференциальных уравнений с условием нормировки. В случае установившихся процессов система дифференциальных уравнений заменяется на линейную алгебраическую систему. Для данной математической модели с очередью  $N = 5$ ис количеством обрабатывающих узлов  $M = 4$  было выполнено численное моделирование с графическим представлением в пакете Matlab. Для параметров  $\lambda, \phi$  и  $\mu$  одного порядка график функции распределения представлен на рис. 5.

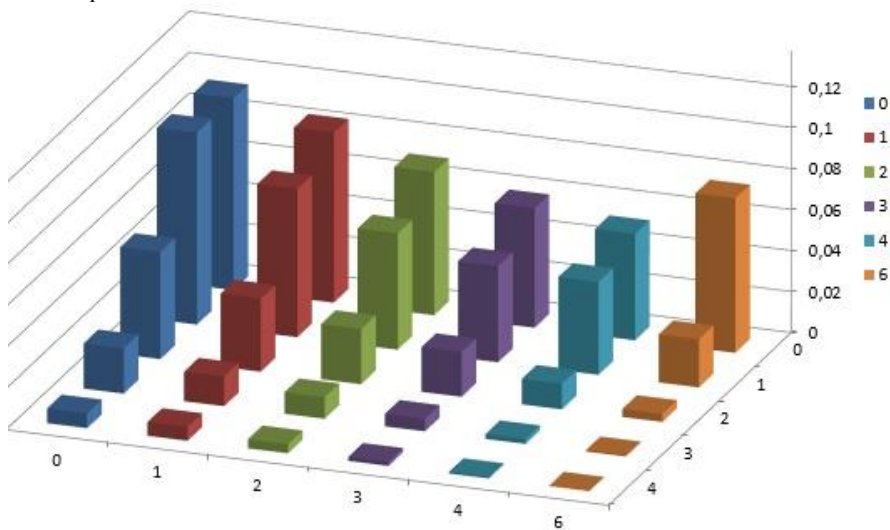


Рис. 5

- [1] Кениг Д., Штойян Д. Методы теории массового обслуживания. – М.: Радио и связь, 1981. С. 130.
- [2] Олифер В.Г., Олифер Н.А. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы. – СПб.: Питер, 2010. С. 944.
- [3] Iqbal W., Dailey M., Carrera D., Janecek P. // Journal of Future Generation Computer Systems. 2011. Vol. 27, № 6. P. 871.

Секция «Математическое моделирование  
процессов и систем»

Заседание секции проводилось 19 мая 2017 г.  
Председатель – А.А. Дубков, секретарь – А.А. Харчева.  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.