

Труды XX научной конференции по радиофизике,  
посвященной 110-летию со дня рождения Г.С. Горелика

**Секция  
«Математическое моделирование  
процессов и систем»**

*Председатель  
кандидат физико-математических наук, доцент  
Александр Александрович Дубков*

## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДЕЛЕЙ ФЕРХЮЛЬСТА И ХОНГЛЕРА С ПУАССОНОВСКИМ БЕЛЫМ ШУМОМ

А.А. Дубков, О.В. Руденко, С.Н. Гурбатов

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

Нелинейная динамическая система со скачкообразным изменением состояния может быть описана стохастическим уравнением Ланжевена

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t) \quad (1)$$

с пуассоновским белым шумом

$$\xi(t) = \sum_k a_k \delta(t - t_k), \quad (2)$$

у которого моменты появления дельта-импульсов  $t_k$  образуют пуассоновский поток событий со средней частотой  $\nu$ , а случайные “амплитуды”  $a_k$  имеют одинаковое вероятностное распределение  $W_a(z)$ . Случайный процесс  $x(t)$  в уравнении (1) является марковским, а его плотность вероятности  $P(x,t)$  удовлетворяет обобщенному интегро-дифференциальному уравнению Колмогорова-Феллера [1]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[f(x)P] + \nu \int_{-\infty}^{\infty} W_a(z) \left[ \exp \left\{ -z \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right\} - 1 \right] dz \cdot P(x,t), \quad (3)$$

являющегося частным случаем общего уравнения Колмогорова, полученного в [2] для произвольного негауссова белого шума  $\xi(t)$ . В случае одностороннего экспоненциального вероятностного распределения амплитуд  $W_a(z) = \lambda e^{-\lambda z}$  ( $z > 0$ ), т.е. импульсов положительной полярности в (2), из (3) можно вывести точное соотношение для установившейся плотности вероятности

$$P_{st}(x) = \frac{1}{f(x)} \exp \left\{ - \int \left[ \frac{\lambda}{g(x)} + \frac{\nu}{f(x)} \right] dx \right\}. \quad (4)$$

В более интересной, с физической точки зрения, ситуации двустороннего вероятностного распределения амплитуд импульсов  $W_a(z) = \beta e^{-\beta|z|}/2$  из (3) удается прийти к дифференциальному уравнению второго порядка для стационарной плотности вероятности

$$\left( g(x) \frac{d}{dx} \right)^2 [f(x)P_{st}] + \nu g(x) \frac{d}{dx} [g(x)P_{st}] - \beta^2 f(x)P_{st} = 0, \quad (5)$$

решение которого для произвольных функций  $f(x)$  и  $g(x)$  записать в виде квадратур, в отличие от (4), не удается. Заметим, что уравнение (5) обобщает недавно найденный в [3] результат на случай мультиплективного импульсного шума.

Уравнение Ферхюльста [4] для численности изолированной биологической популяции  $x(t)$  ( $r$  – темп воспроизведения)

$$\dot{x} = rx - \xi(t)x^2 \quad (6)$$

с пуассоновским белым шумом (2) и импульсами положительной полярности может адекватно описывать влияние пандемий, природных катастроф и других негативных явлений, приводящих к заметному сокращению численности популяции за короткий промежуток времени. Полагая в (4), в соответствии с (1) и (6),  $f(x) = rx$  и  $g(x) = -x^2$ , приходим к

$$P_{st}(x) = \frac{\lambda^{\nu/r}}{\Gamma(\nu/r)x^{1+\nu/r}} e^{-\lambda/x} \quad (x > 0), \quad (7)$$

где  $\Gamma(z)$  – гамма-функция. Как показывает анализ, стационарное распределение (7) является унимодальным, достигая максимума в точке  $x_{\max} = \lambda/(1 + \nu/r)$ . Заметим, что наиболее вероятное значение численности популяции оказывается меньшим ее среднего значения из-за наличия у плотности вероятности (7) степенного “хвоста”.

Стохастическое уравнение Хонглера [5]

$$\dot{x} = -\gamma \tanh x + \frac{\xi(t)}{\cosh x} \quad (8)$$

является хорошим приближением модели генетического отбора, поскольку сохраняет некоторые ее особенности. Для пуассоновского белого шума  $\xi(t)$  в (8) с симметричным экспоненциальным распределением амплитуд с помощью довольно сложной процедуры удается найти точное решение уравнения (5)

$$P_{st}(x) = \frac{\beta \cosh x}{\Gamma(\mu)\sqrt{\pi}} \left( \frac{\beta |\sinh x|}{2} \right)^{\mu-1/2} K_{\mu-1/2}(\beta |\sinh x|), \quad (9)$$

где:  $K_a(z)$  – функция Макдональда,  $\mu = \nu/(2\gamma)$ . Как видно из рис. и формулы (9), в нелинейной системе (8) наблюдаются индуцированные шумом переходы [4] – изменение числа максимумов вероятностного распределения при вариации параметра пуассоновского белого шума – частоты появления импульсов  $\nu$ .

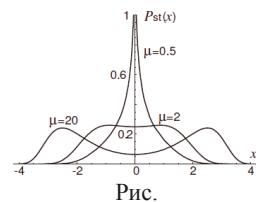


Рис.

- [1] Van den Broeck C. // J. Stat. Phys. 1983. V.31. P.467.
- [2] Dubkov A.A., Spagnolo B. // Fluct. Noise Lett. 2005. V.5. P.L267.
- [3] Dubkov A.A., Rudenko O.V., Gurbatov S.N. // Phys. Rev. E. 2016. V.93. P.062125.
- [4] Хорстхемке Б., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: Теория и применение в физике, химии и биологии. –М.: Мир, 1987, 400 с.
- [5] Hongler M.O. // Helv. Phys. Acta. 1979. V.52. P.280.

## РАДИОЛОКАЦИОННЫЙ АСПЕКТ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ЭЛЕКТРОНА

А.Т. Гаврилин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Прямые прецизионные измерения положения и скорости элементарных частиц могут быть осуществлены лишь посредством электромагнитного поля (ЭМП). В данном сообщении показывается, что приписывание волновых свойств и собственного механического момента частицам с ненулевой массой покоя не является обязательным. При этом мы ограничиваемся классической моделью переносчика информации, т.е. по существу радиолокационной задачей обнаружения цели и измерения ее параметров. Зондирующим сигналом будем считать узкополосный ограниченный по энергии комплекснозначный процесс

$$s(t) = A(t) \exp[i\omega_0 t - i\phi(t)] \equiv \dot{s}(t) \exp[i\omega_0 t], \quad (1)$$

где  $A(t), \phi(t)$  – медленно меняющиеся в сравнении с  $\exp[i\omega_0 t]$  детерминированные функции. Если зондирующий сигнал имеет форму (1), то отраженный от цели в противоположном направлении (и выровненный по энергии с зондирующими) сигнал является уже случайным процессом с математическим ожиданием

$$s_r(t) = \dot{s}(t - \tau(t)) \exp[i\omega_0(t - \tau(t))], \quad (2)$$

где  $\tau(t)$  – положительная функция времени («задержка»), которая медленно меняется за время зондирования. Благодаря последнему обстоятельству, задержку можно представить по формуле Тейлора, беря в ней за отсчетную точку момент переизлучения и ограничившись двумя слагаемыми разложения в быстро осциллирующей экспоненте и одним – в аргументе КА:

$$s_r(t) = \dot{s}(t - \tau(0)) \exp[i\omega_0(t - \tau(0) - \tau'_i(0)t)] \quad (3)$$

Используя обозначения  $\tau(0) = \tau, \omega_0 \tau'_i(0) = \Omega$ , КА рассеянного сигнала можно представить в виде

$$s_r(t) = \dot{s}(t - \tau) \exp[-i\Omega_i t] \quad (4)$$

и трактовать как элемент  $\varphi$ , принадлежащий гильбертову пространству  $\mathbb{N}$  квадратично интегрируемых функций времени и параметризованный парой символов  $\tau, \Omega$ :  $\varphi(\tau, \Omega)$ . Эрмитово скалярное произведение в  $\mathbb{N}$  зондирующего и рассеянного сигналов задается выражением  $\langle \varphi(0,0) | \varphi(\tau, \Omega) \rangle$ , которое в радиолокации принято называть функцией неопределенности Вудворда (ФНВ).

Поскольку скорость света в вакууме постоянна, переизлучение фотона электроном происходит практически мгновенно, а также тот факт, что при нерелятивистских скоростях цели поперечный эффект Доплера пренебрежимо мал, то зависимость от  $\tau, \Omega$  дальности  $q$  и радиального импульса  $p$  цели оказывается

линейной. Делая соответствующую замену переменных в функции  $\varphi(\tau, \Omega)$ , приходим к следующей форме ФНВ, параметризованной в переменных  $q, p$  [1]:

$$\chi(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{s}\left(\frac{q}{2} - r\right) \dot{s}^*\left(\frac{q}{2} + r\right) \exp\left[i \frac{pr}{\hbar}\right] dr \quad (5)$$

Приведенная модель [1] является довольно упрощенной, поскольку нарушение сферической симметрии условий приготовления ансамбля электронов обнаруживает нетривиальную «геометрию» электрона. Из практики радиолокации известно, что при отражении волн круговой поляризации от сферически симметричных объектов (капелек воды в облаке) происходит смена направления вращения вектора поляризации относительно наблюдателя, смотрящего вслед волне. Отраженная волна оказывается поляризованной ортогонально падающей, т.е. «невидимой» для антенны, излучившей волну.

При облучении электрона фотоном с определенной спиральностью у переизлученного фотона в спиральном базисе ненулевыми оказываются обе компоненты вектора поляризации. Таким образом, в унитарном поляризационном пространстве электрон является линейным преобразователем, задаваемым двухрядной эрмитовой матрицей с нулевым следом:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & -a \end{pmatrix} = \text{Re } b \sigma_1 + \text{Im } b \sigma_2 + a \sigma_3 \quad (6)$$

где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in C$ ,  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – матрицы Паули. Современные когерентные приемники оптического излучения (гомодинные приемники с поляризационной диверсификацией [2]) позволяют принимать каждую из циркулярно поляризованных компонент раздельно. Благодаря этому, оказывается возможным восстановить оператор рассеяния – матрицу  $\hat{Q}$ .

Поскольку матрицы Паули линейно независимы над полем вещественных чисел, множество матриц  $\hat{Q}$  образует вещественное трехмерное евклидово пространство с нормой  $\|\hat{Q}\| = \sqrt{|\hat{Q}|}$ . Данное обстоятельство вызывает соблазн отождествить указанное пространство с физическим пространством, а вектор  $\hat{Q}$  в нем считать коллинеарным магнитному моменту электрона. Но даже при таком отождествлении приписывание электрону собственного **механического** момента может быть оправдано лишь ссылкой на совокупность «косвенных улик» не оптического происхождения.

- [1] Гаврилин А.Т. //Актуальные проблемы статистической радиофизики. (малаховский сборник). / Ред. А.В.Якимов. – Н.Новгород: ТАЛАМ, 2007. Т.6. С.45.
- [2] Намай О.Е..// WDM и оптические системы связи, 2008. №4. С.23.

## МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ *VERSUS* БИМОНОПОЛЬ

А.Т. Гаврилин

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

В предыдущем докладе [1] были высказаны сомнения в наличии собственного механического момента у электрона, поскольку для описания движения его центра масс во внешнем магнитном поле достаточно его магнитного момента.

В настоящем докладе рассматриваются две модели магнитного момента электрона применительно к действующей на него силе. Одна из них в форме вращающегося электрически заряженного волчка (ВЗВ), т.е. компактного распределения вихревых токов. Вторая: в форме «магнитной стрелки», представляющей собой пару «слепленных» (не обязательно точечных) магнитных монополей разных знаков – бимонополя (БМП).

1. **ВЗВ в магнитном поле.** Сила Лоренца, действующая со стороны внешнего магнитного поля  $\vec{B}(\vec{r})_i$  на сосредоточенное в области  $\Omega$  стационарное распределение электрического тока  $\vec{j}(\vec{r}_i)$  дается интегралом [2 с.172]

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} [\vec{j}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r})] d^3 r. \quad (1)$$

Квазиоднородное магнитное поле в окрестности точки  $\vec{a} \in \Omega$  можно представить формулой Тейлора

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{a}) + (\vec{r} - \vec{a}, \nabla) \vec{B}(\vec{r})|_a + O(|\vec{r} - \vec{a}|^2). \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), получаем

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \left[ \int_{\Omega} \vec{j}(\vec{r}) d^3 r, \vec{B}(\vec{a}) \right] + \frac{1}{c} \int_{\Omega} [\vec{j}(\vec{r}), (\vec{r} - \vec{a}, \nabla) \vec{B}(\vec{r})|_a] d^3 r, \quad (3)$$

где интеграл в первом слагаемом в (3) для замкнутого ограниченного распределения тока обращается в ноль. Для вычисления второго интеграла необходимо учесть, что  $\text{rot } \vec{B}(r)|_a \equiv \text{rot } \vec{B}_a = 0$  в точке, где отсутствуют источники этого поля. Поэтому

$$0 = [\vec{r}, \text{rot } \vec{B}_a] \equiv [\vec{r}, [\nabla, \vec{B}_a]] = \nabla(\vec{r}, \vec{B}_a) - (\vec{r}, \nabla)\vec{B}_a,$$

так что подынтегральная функция равна

$$[\vec{j}, (\vec{r}, \nabla) \vec{B}_a] = [\vec{j}, \nabla(\vec{r}, \vec{B}_a)] = -[\nabla, (\vec{r}, \vec{B}_a)]\vec{j}.$$

Для ВЗВ  $\text{div } \vec{j} = 0$ , поэтому

$$\vec{F} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \int_{\Omega} (\vec{B}_a, \vec{r}) \vec{j}(\vec{r}) d^3 r = \frac{1}{2c} \operatorname{rot} \left[ \vec{B}_a, \int [\vec{r}, \vec{j}(\vec{r})] d^3 r \right] \equiv \operatorname{rot} [\vec{B}_a, \vec{m}] = (\vec{\mu}, \nabla) \vec{B}_a, \quad (4)$$

где  $\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r}, \vec{j}(\vec{r})] d^3 r$  - магнитный момент ВЗВ. С учетом того, что в данной модели  $\operatorname{div} \vec{B}_a = 0$ , последнее выражение в (4) равно  $(\vec{\mu}, \nabla) \vec{B}_a = \nabla (\vec{\mu}, \vec{B}_a)$ .

**2. БМП в магнитном поле.** Идея существования магнитного монополя была впервые высказана Дираком в 1931 году [3]. В контексте этой гипотезы компактное материальное образование  $\Omega$  с ненулевой плотностью магнитного заряда  $\eta(\vec{r})$  в магнитном поле будет подвержено действию силы

$$\vec{F}(t) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \eta(\vec{r}) \vec{B}(\vec{r}) d^3 r. \quad (5)$$

Подставляя в формулу (5) разложение магнитного поля (2), имеем

$$\vec{F} = \int_{\Omega} \eta(\vec{r}) \vec{B}(\vec{a}) d^3 r + \int_{\Omega} \eta(\vec{r}) (\vec{r} - \vec{a}, \nabla) \vec{B}(\vec{a}) d^3 r. \quad (6)$$

В предположении нулевого магнитного заряда БМП первый интеграл в (6) исчезает, а второй содержит магнитный момент  $\vec{\mu} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \eta(\vec{r}) (\vec{r} - \vec{a}) d^3 r$ .

Таким образом,

$$\vec{F} = (\vec{\mu}, \nabla) \vec{B}_a. \quad (7)$$

Различие силовых полей (4) и (7), по-видимому, должно проявляться в особенностях движения электрона в неоднородном поле. Во всяком случае, в отношении протонов это проявление имеет место [4]. Отметим также, что если эффективное плечо БМП равно классическому радиусу электрона  $r_0 = e^2 / mc^2$ , то деление магнетона Бора  $\hbar e / 2mc$  на  $r_0$  дает значение магнитного заряда  $g_0 = \frac{\hbar c}{2e}$ . Это значение удивительным образом совпадает с наименьшим из спектра возможных значений заряда монополя, полученных Дираком [3] на основе постулатов нерелятивистской квантовой механики.

- [1] Гаврилин А.Т. // Труды 20-й научной конференции по радиофизике, ННГУ, 2016.
- [2] Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. С.172.
- [3] Dirac P.A.M.//Proc. Roy.Soc., 1931. V.A.133. P.60.
- [4] Ball R.D. et al. (NNPDF Collaboration). // Nucl. Phys., 2013. V.B867, P.244.

**УСТАНОВЛЕНИЕ РАВНОВЕСНЫХ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕЖИМОВ  
В СЕТИ НЕЙРОПОДОБНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ДИНАМИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ  
ЧЕРЕЗ ОБЩУЮ СРЕДУ**

А.И. Калякулина, Е.В. Панкратова

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

В данной работе представлены результаты исследования динамики многоэлементной системы нейроподобных элементов ФитцХью-Ринцеля с учётом как прямого взаимодействия между клетками через линейную связь, так и межклеточной коммуникации через общую внешнюю среду:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_i - x_i^3 / 3 - y_i + z_i + \varepsilon(w - x_i) + \sum_{j=1}^n \xi_{ij} x_j \\ \dot{y}_i = \gamma(x_i - b y_i) \\ \dot{z}_i = \mu(c - x_i - d z_i), \quad \dot{w} + h w = \varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i - w), \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

В рассматриваемой системе переменная  $x$  описывает изменение мембранныго потенциала  $i$ -ой нервной клетки, переменные  $y$  и  $z$  определяют изменения ионных токов, переменная  $w$  моделирует влияние среды [1]. Матрица  $G = \{\xi_{ij}\}$  – симметричная матрица связи, положительные элементы ( $\xi_{ij} > 0$ ) которой указывают на наличие диффузионного взаимодействия между  $i$ -м и  $j$ -м осцилляторами сети.

Известно, что процесс подавления колебаний в нелинейных системах может происходить по одному из двух сценариев – осцилляторной (если в фазовом пространстве системы существуют несколько аттракторов, соответствующих различным состояниям равновесия) или амплитудной (если состояние равновесия единственное) смерти [1]. Для системы (1) показано, что при выполнении условия

$$\left[ \frac{1}{b} + \frac{1}{d} - 1 + \frac{h\varepsilon}{h+n\varepsilon} \right]^3 + \frac{9c^2}{4d^2} > 0 \quad (2)$$

состояние равновесия  $O(x_*, y_*, z_*, w_*)$  является единственным и располагается на синхронном многообразии  $M$ :  $\{X_i = \{x_i, y_i, z_i\} \mid X_1 = X_2 = \dots = X_n\}$ . Таким образом, для параметров, удовлетворяющих условию (2), в рассматриваемой сети подавление колебаний происходит по сценарию амплитудной смерти. Использование необходимого условия устойчивости найденного состояния равновесия позволяет получить аналитическое выражение для оценки порогового числа элементов  $n^*$ , обеспечивающего незатухающую колебательную активность системы при

$$n > n^* = \frac{b_1 b_2 - \mu d \gamma b - \gamma - \mu - h(b_1 - b_2)}{\varepsilon[(b_1 - b_2) - \varepsilon]} \quad (3)$$

где  $b_1 = \mu d + \gamma b$ ,  $b_2 = 1 - x_*^2 - \varepsilon$ .

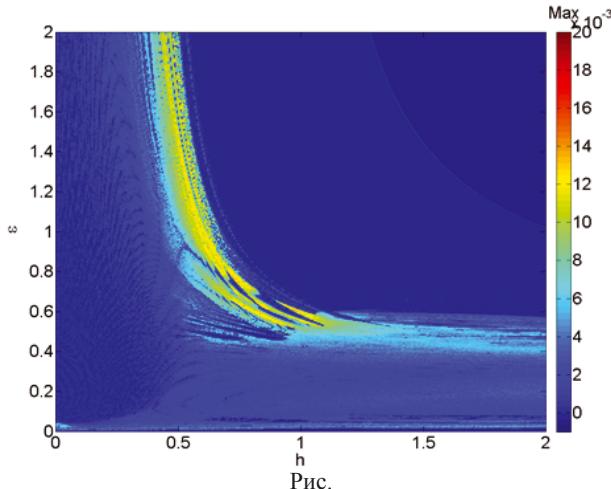


Рис.

Изучение сетевой колебательной динамики показало существенную зависимость её характера от параметра вязкости внешней среды  $h$  и параметра связи  $\varepsilon$ . Вычисление спектра ляпуновских показателей проводилось в области  $\Xi$ :  $\{(h, \varepsilon) \mid h \in [0.01; 2], \varepsilon \in [0; 2]\}$ . В частности, на рисунке представлена диаграмма, полученная при  $c=-1.21$ . Указанная шкала градации цвета отображает различные значения старшего показателя Ляпунова. Наиболее тёмная область, расположенная в правой верхней части диаграммы, соответствует равновесному режиму. Граница этой области определяет рождение предельного цикла в фазовом пространстве системы (1), т.е. переход к регулярному колебательному режиму. Наиболее яркой области в центре диаграммы соответствуют положительные значения старшего показателя Ляпунова и, следовательно, хаотическая динамика. На основе анализа значений мультиплликаторов для периодических решений сделаны выводы о различных сценариях развития хаотической динамики в рассматриваемой системе.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант 16-12-10496).

- [1] Pankratova E.V., Kalyakulina A.I. // Regular and Chaotic Dynamics (submitted).
- [2] Resmi V., Ambika G., Amritkar R.E., Rangarajau G. // Phys. Rev. E, 2012, V. 85, P. 046211.

## ПОВЫШЕНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ НЕКОГЕРЕНТНОГО ПРИЕМА OFDM-СИГНАЛОВ С ФАЗОРАЗНОСТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПОЛУСЛЕПОГО ЭКВАЛАЙЗЕРА

Г.Н. Бочков, К.В. Горохов, А.В. Колобков

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

В некогерентных системах с фазоразностной модуляцией  $k$ -го порядка (ФРМ- $k$ ), как правило, применяют простые в вычислительном плане робастные демодуляторы инвариантные к фазовым искажениям  $(k-1)$ -го порядка. Наилучшую потенциальную помехоустойчивость среди них обеспечивает некогерентный прием ФРМ-1 инвариантный к общему фазовому сдвигу. Платой за простоту реализации и инвариантность является проигрыш в помехоустойчивости. Повысить помехоустойчивость радиосвязи позволяют адаптивные методы приема, использующие оценивание параметров канала связи. В некогерентных системах, как правило, не имеющих обучающих элементов, целесообразно применять методы слепой идентификации канала, восстанавливающие импульсную характеристику с точностью до общего фазового сдвига. Слепые алгоритмы имеют высокую вычислительную сложность, уменьшить ее позволяют полуслепые алгоритмы, использующие как обучающие, так и информационные символы. Для OFDM-сигналов с фазовыми видами модуляции приемлемой вычислительной сложностью и хорошим качеством оценки канала обладает полуслепой  $T(l)$ -PD-алгоритм с управлением фазами (phase directed, PD), основанный на конечности алфавита сигнального созвездия поднесущих передаваемого сигнала [1], где  $l$  – период передачи тестовых OFDM-символов.

В работе представлены результаты исследования помехоустойчивости некогерентного приема OFDM-сигнала с ФРМ-1 во временной области (ВФРМ-1) и частотной области (ЧФРМ-1) [2] и когерентного приема OFDM-сигнала с фазовой модуляцией (ФМ) в двухлучевом канале с релеевскими замираниями при использовании эквалайзера с  $T(l)$ -PD-алгоритмом оценивания канала. Моделирование проведено в рамках модели Ваттерсона [3] при расстоянии между лучами  $L = 6$  отсчетов и следующими параметрами OFDM-сигнала: число поднесущих  $N = 140$ , длина циклического префикса  $N_G = 10$ , позиционность модуляции  $M = 4$ , число активных поднесущих  $N_A = 128$  для ВФРМ-1, ФМ и  $N_A = 129$  для ЧФРМ-1. На рис. 1 и рис. 2 приведены кривые для вероятности битовой ошибки  $P_b$ , характеризующей помехоустойчивость приема, в зависимости от относительной скорости замираний  $F_d T$  при фиксированном среднем отношении удельной энергии на бит сообщения к спектральной плотности аддитивного белого гауссова шума  $\langle E_b/N_0 \rangle = 20$  дБ, где  $T$  – длина OFDM-символа без циклического префикса.

Рис. 1 демонстрирует, что в частотно-селективном канале с замираниями использование полуслепого эквалайзера позволяет повысить помехоустойчивость некогерентного приема ВФРМ-1 и особенно ЧФРМ-1. Причем, если при низкой скорости замираний помехоустойчивость приема с эквалайзером для ЧФРМ-1 незначительно ниже, чем для ВФРМ-1, то при превышении величины скорости

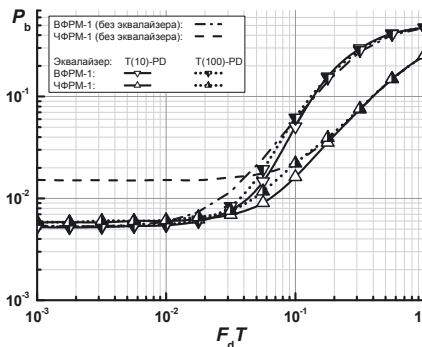


Рис.1.

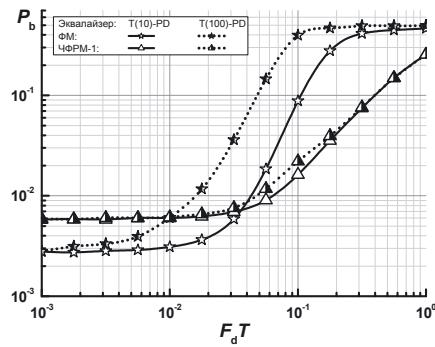


Рис.2.

замираний значения  $F_d T \approx 2 \cdot 10^{-2}$  ЧФРМ-1 начинает превосходить ВФРМ-1 по помехоустойчивости. Это значение скорости замираний примерно в два раза ниже, чем при приеме без эквалайзера.

Рис.2 показывает, что когерентный прием OFDM-сигналов с ФМ более чувствителен к увеличению скорости замираний и уменьшению количества тестовых символов, чем некогерентный прием ЧФРМ-1. Для использованного эквалайзера пороговое значение скорости замираний, выше которого ЧФРМ-1 начинает выигрывать по помехоустойчивости у ФМ, с уменьшением частоты передачи тестовых OFDM-символов с 1/10 до 1/100 уменьшается от  $F_d T \approx 4 \cdot 10^{-2}$  до  $F_d T \approx 10^{-2}$ .

При высокой скорости замираний наблюдается значительное ухудшение помехоустойчивости рассматриваемых алгоритмов приема, что является следствием того, что они разработаны в рамках модели квазистационарного канала. Для обеспечения высокой помехоустойчивости в условиях быстрых замираний необходимо применение алгоритмов приема, учитывающих частотное рассеяние в канале [4].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-07-97037-р\_поволжье\_a).

- [1] Zhou S., Giannakis G.B. // IEEE Trans. Commun. 2001. V. 49, № 8. P. 1402.
- [2] Бочков Г.Н., Горюхов К.В., Колобков А.В. // Изв. вузов Радиофизика. 2010. Т. 53, №8. С. 543.
- [3] Watterson C. C., Juroshek J. R., Bensema W. D. // IEEE Trans. on Commun. Techn. 1970. V. 18, No. 6. P. 792.
- [4] Бочков Г.Н., Горюхов К.В., Колобков А.В. // Изв. вузов Радиофизика. 2016. Т. 59, №1. С. 67.

## АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУД АВТОКОЛЕБАНИЙ ГЕНЕРАТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЗАТУХАНИЕМ

И.А. Литовский

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

В данной работе получено уравнение Фоккера-Планка (УФП) для совместной плотности распределения вероятностей амплитуды и фазы в автогенераторе Ван дер Поля, при аддитивном и мультиплекативном шумовых воздействиях, в случае произвольного порядка нелинейности обратной связи. Также получено общее выражение для стационарного распределения из укороченного УФП. Проанализирован частный случай нелинейной отрицательной обратной связи.

Генератор Ван дер Поля, при воздействии шумов, описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением, понимаемым в смысле Стратоновича:

$$\ddot{y} + \lambda F(y)\dot{y} + [\omega^2 + \eta(t)]y = \xi(t), \quad (1)$$

где  $\omega$  – частота,  $\lambda \ll \omega$  – малый параметр затухания,  $F(y)$  – полином обратной связи,  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  – гауссовые белые шумы с нулевыми средними и интенсивностями  $2D$  и  $2D_I$  соответственно. Переходим в (1) к фазовым переменным обычным способом:

$$y = A \cos(\omega t + \Phi), \dot{y} = -A\omega \sin(\omega t + \Phi). \quad (2)$$

Пользуясь известным представлением [1] функции плотности распределения вероятностей:

$$P(A, \Phi, t) = \langle \delta(A - A(t))\delta(\Phi - \Phi(t)) \rangle \quad (3)$$

и применяя функциональный метод размыкания средних [2] получим общее УФП, приводить которое, ввиду его громоздкости здесь не будем. Усредняя общее УФП по малому параметру  $\lambda$ , и интегрируя её по периоду  $2\pi/\omega$  можно получить укороченное УФП:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\lambda}{4} \frac{\partial}{\partial A} \{[a_0(A) - a_2(A)]AP\} + \frac{\partial}{\partial A} \left\{ \left( \frac{D}{2\omega^2} + \frac{D_I}{8\omega^2} A^2 \right) \left( \frac{\partial P}{\partial A} - \frac{P}{A} \right) \right\}, \quad (4)$$

Здесь  $a_0(A)$ ,  $a_2(A)$  – коэффициенты ряда Фурье функции  $F(A \cos(\omega t + \Phi))$ .

Решение стационарного ( $\partial P / \partial t \approx 0$ ) укороченного УФП имеет вид:

$$P_{st}(A) = c_0 A \exp \left\{ -2\lambda \omega^2 \int A \frac{a_0(A) - a_2(A)}{4D + D_I A^2} dA \right\}, \quad (5)$$

где  $c_0$  – нормировочная постоянная.

Рассмотрим частный случай отрицательной обратной связи при аддитивном шумовом воздействии:

$$F(y) = 1 - \alpha y^2 + \beta y^4, (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (6)$$

Коэффициенты  $a_0(A)$ ,  $a_2(A)$  полинома обратной связи (6) имеют вид:

$$a_0(A) = \frac{3}{4} \beta A^4 - \alpha A^2 + 2, a_2(A) = \frac{1}{2} \beta A^4 - \frac{1}{2} \alpha A^2. \quad (7)$$

Выражение для плотности распределения вероятностей при этом имеет вид:

$$P_{st}(A) = c_0 A \exp\left\{-\frac{\lambda \omega^2 A^2}{16D} \left(\frac{\beta}{3} A^4 - \alpha A^2 + 8\right)\right\}, \quad (8)$$

Зависимость функции распределения (8) от амплитуды автоколебаний приведена на рис.1 для параметров:  $\lambda=0.01$ ,  $\omega=1$ ,  $D=0.01$ ,  $\alpha=1$ ,  $\beta=1/9$ . Видно, что при аддитивном воздействии в случае обратной связи (6) возможен режим двугорбого распределения.

В результате работы был исследован интересный случай немонотонной зависимости стационарного распределения (8) от амплитуды автоколебаний, свидетельствующий о наличии в системе индуцированных шумом переходов.

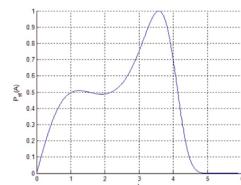


Рис.

- [1] Stratonovich R L 1963 *Topics in the Theory of Random Noise* vol 1 (New York: Gordon & Breach)
- [2] Dubkov A.A., Litovsky I.A. // J. Stat. Phys. 1983. V.31. P.467.

## ВЛИЯНИЕ ШУМА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЕНЕРАЦИИ В СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФУЗИОННО СВЯЗАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ХОДЖКИНА – ХАКСЛИ

Е.Е. Максина, Е.В. Панкратова

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Под действием случайных внешних воздействий характеристики функционирования реальных систем – как живых, так и искусственных – могут существенно меняться. Как показали последние исследования, характер влияния флуктуаций может быть различным. С одной стороны, шум может приводить к регуляризации поведения системы, тем самым определяя конструктивную роль флуктуационных явлений. С другой стороны, шум может ухудшать характеристики функционирования реальных систем.

В данной работе изучение влияния шума проводится в рамках модели биологической системы, представляющей собой диффузионно связанные нелинейные осцилляторы, динамика каждого из которых описывается уравнениями Ходжкина – Хаксли [1]:

$$\begin{aligned} C_m \frac{dV_i}{dt} &= I_{ion}(V_i, m_i, h_i, n_i) + I_{dc} + g_e(V_j - V_i) + D\xi_i(t), \\ \frac{dm_i}{dt} &= \alpha_m^{(i)}(V_i)(1 - m_i) - \beta_m^{(i)}(V_i)m_i, \\ \frac{dh_i}{dt} &= \alpha_h^{(i)}(V_i)(1 - h_i) - \beta_h^{(i)}(V_i)h_i, \\ \frac{dn_i}{dt} &= \alpha_n^{(i)}(V_i)(1 - n_i) - \beta_n^{(i)}(V_i)n_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \tag{1}$$

В рассматриваемой модели переменная  $V$  задает изменение мембранныго потенциала нервной клетки. Кинетика перераспределения частиц через мембрану при наложении электрического поля описывается тремя последними группами уравнений системы (1). Общий ток через мембрану  $I_{ion}(V, h, m, n)$  через мембрану клетки состоит из компонент калиевого, натриевого и тока фоновой утечки:  $I_{ion}(V, h, m, n) = -G_K n^4 (V - V_K) - G_N a m^3 (V - V_Na) - G_L (V - V_L)$ ,  $I_{dc}$  – параметр плотности внешнего постоянного тока, принимающего значения в интервале от 0 до 20 мА/см<sup>2</sup>. Значения параметров системы, а также функции, отражающие зависимости средних скоростей перехода ионных каналов из закрытого состояния в открытое (и наоборот) от величины мембранныго потенциала, выбраны классическими [1]. Случайные возмущения клеточной динамики моделируются путем добавления источника белого гауссова шума  $\xi_i(t)$  с нулевым средним и корреляционной функцией  $\langle \xi_i(t) \xi_j(t+\tau) \rangle = \delta_{ij} \delta(\tau)$  в уравнения для мембранныго потенциала клеток. Взаимодействие нейронов через электрические синапсы моделируются слагаемым  $g_e(V_j - V_i)$ , где  $g_e$  – параметр, определяющий силу связи между  $i$ -й и  $j$ -й клеткой.

Для изолированной нервной клетки ( $g_e = 0$ ), динамика которой описывается уравнениями Ходжкина–Хаксли, исследованы режимы поведения мембранныго

потенциала как в детерминированном случае, так и при наличии шума. Анализ, проведенный при различных значениях параметра  $I_{dc}$  и различных начальных условиях, показал существование областей моностабильного (для которого характерны либо генерация, либо ее отсутствие) и бистабильного поведения (существование колебательного и равновесного режимов), построена бифуркационная диаграмма. Для параметров из области бистабильности обнаружено явление, заключающееся в увеличении среднего времени межимпульсного интервала при воздействии шума определенной интенсивности (рис.1), это явление было названо нами «noise delayed spiking».

Вместе с вычислением среднего значения межимпульсного интервала, проводился анализ значений среднеквадратического отклонения межимпульсных интервалов, а также так называемого «отношения шум-сигнал»:

$$R_p = \frac{\sqrt{\langle T_{id}^2 \rangle - \langle T_{id} \rangle^2}}{\langle T_{id} \rangle} \quad (2)$$

определенного отношением среднеквадратического отклонения межимпульсных интервалов к их среднему,  $T_{id}$  - величина межимпульсного интервала. Показано, что для различных значений параметра  $I_{dc}$  величина максимумов для всех рассматриваемых характеристик изменяется, при этом значение интенсивности шума, при котором наблюдается максимум  $\langle T_{id} \rangle$ , смещается. Для системы, состоящей из двух элементов Ходжкина-Хаксли, связь между которыми определяется взаимодействием нервных клеток через электрические синапсы, показано сохранение наблюдаемого эффекта «noise delayed spiking».

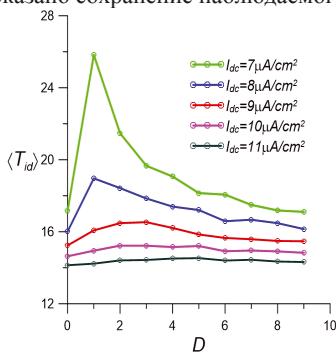


Рис.1

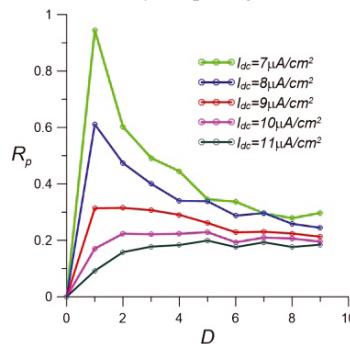


Рис.2

[1] E.R. Kandel, J.H. Schwartz, T.M. Jessell. Principles of Neural Science (Appleton&Lange, Norwalk 1991).

[2] A. Pikovsky, J. Kurths. // Phys. Rev. Lett., 1997, V. 78, P. 5.

## ОЦЕНКА ВОЛАТИЛЬНОСТИ КОРРЕЛИРУЮЩИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

П.Н. Вьюгин, В.В. Курина, С.А. Лапинова, Л.А. Самойлова

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

Волатильность – это статистический показатель, характеризующий некоторую изменчивость данных. Основной аспект эконометрики является оценивание волатильности. В данной статье рассмотрены методы оценки Паркинсона и Гармана-Класса [1].

При оценке методом Паркинсона используются максимальные и минимальные значения на графике. Метод не учитывает полного направленного движения, тренда. В среднем это метод недооценивает волатильность. Рассчитывается по формуле (1):

$$v(1) = \sqrt{(A_{max} - A_{min})^2} \quad (1)$$

Оценка по Гарману-Классу наиболее эффективна для активов с динамикой броуновского движения. Хотя данный метод эффективнее Паркинсона, тем не менее, он, как правило, недооценивает уровень волатильности. Оценка по методу Гармана-Класса производится с помощью следующего выражения (2):

$$v(2) = \sqrt{(k1 * (A_{max} - A_{min})^2 - k2 * (A_{max} - A_{min} - 2 * A_{max} * A_{min}) - k3)^2} \quad (2)$$

где  $k1=0.511$ ,  $k2=0.0109$ ,  $k3=0.383$ .

Для получения случайных данных, сходных по некоторой структуре с биржевыми, использовался аэродинамический стенд ТМЖ1-М, излучателя и четырех приемников, ниже описание идет по двум первым приемникам.. Была получена фазовая скорость акустического потока. Формула для пересчета скорости была взята из статьи [2] и использована в данной статье в следующем виде:

$$U = \frac{\Delta \varphi^2}{2 \cdot c \cdot L \cdot \omega \cdot \cos \theta} \quad (3)$$

где  $c$  – скорость звука в среде (343,1 м/с),  $\omega$  – частота генератора (55 кГц),  $L$  – длина пути (0,14 м),  $\Delta$  – координаты, полученные с осциллографа,  $\theta$  – угол, разный для каждого микрофона.

Измерение фазовой скорости потока при замеренной с помощью трубки Пито-Прандтля скорости потока 14,33 м/с без помехи и с помехой в виде гребенки с шириной зубца и свободного пространства по 2 см представлено на Рис. 1.

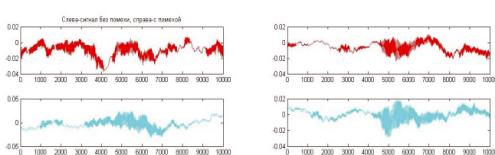


Рис. 1

Далее фазовая скорость была преобразована по формуле(3), в следующем виде:

- для первого микрофона:  $U = \frac{117717.61 \cdot \sin}{245.61 \cdot \cos - 2430}$
- для второго микрофона:  $U = \frac{117717.61 \cdot \sin}{245.61 \cdot \cos + 2430}$

На Рис. 2 представлены полученные скорости.

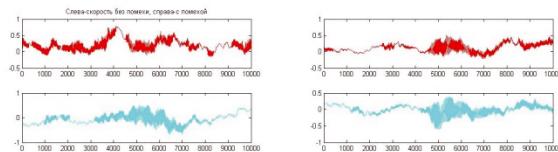


Рис. 2

Оценка волатильности преобразованной скорости представлена двумя моделями – Гармана-Класса и Паркинсона для каждого микрофона при идеальной скорости потока = 14.33 м/с на рисунке 3.

В данном опыте целесообразнее использовать модель Паркинсона так, как установка создает серьезное зашумление, от которого не спасает ни фильтрация, ни выбор определенного режима усреднения на осциллографе, данная модель несколько сглаживает созданное искажение за счет неполного оценивания резких скачков и изменений.

Dependent Variable: v3				
Method: Least Squares				
Date: 05/05/16 Time: 11:10				
Sample: 5/16/2016 12:00 - 5/16/2016 19:00				
Included observations: 421				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
M031	3.228318	0.847134	3.928916	0.0001
M032	-28.74303	0.741295	-38.77410	0.0000
M033	-4.837750	1.976507	-2.447626	0.0148
M034	31.12411	1.479773	21.03393	0.0000
Mean dependent var	14.33000	S.D. dependent var	0.000000	
S.E. of regression	1.271422	Akaike Info criterion	3.327605	
Sum squared resid	674.0862	Schwarz criterion	3.326014	
Log likelihood	-895.4508	Hannan-Quinn criter.	3.342784	

Рис.4

Был проведен тест на стационарность – тест Дики-Фуллера, показавший разные результаты для разных интервалов времени. Были выбраны стационарные участки.

[1] Slepaczuk R. ,Working Paper No. 13/2009 (23).

[2] Смирнов. В.А., Курин В.Б., Вьюгин П.Н. // Лабораторные исследования характеристик акустического анемометра. 2015. Труды 20-й Нижегородской сессии молодых ученых.

Так же к вычисленной скорости потока, преобразованной из фазовой, были получены весовые коэффициенты при помощи программы Eviews. Данные веса представлены для каждого приемника в столбце Coefficient (к Рис.2 первые два значения)(Рис. 4).

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ БЕССЕЛЯ-ФУБИНИ

А. Е. Китаев, А. А. Потапов, А.Э. Рассадин

*HPO РНТОРЭС им. А. С. Попова*

Хорошо известно, что задача Коши для уравнения Римана

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad v(x,0) = V_0 \cdot \sin(k_0 \cdot x) \quad (1)$$

имеет точное решение (так называемое разложение Бесселя-Фубини) вида [1]:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x,t) \quad (2)$$

где ( $J_n(\dots)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка):

$$V_n(x,t) = 2 \cdot V_0 \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{J_n(n \cdot \tau)}{n \cdot \tau} \cdot \sin(n \cdot k_0 \cdot x) \quad (3)$$

справедливое в безразмерном времени  $\tau = k_0 \cdot V_0 \cdot t$  вплоть до наступления градиентной катастрофы [1], т. е. при  $0 < \tau < 1$ .

Рассмотрим вопрос о точности приближения функционального ряда (2) его  $N$ -частичной суммой:

$$v_N(x,t) = \sum_{n=1}^N V_n(x,t). \quad (4)$$

Очевидно, что при всех  $x \in R$  и  $\tau \in (0,1)$  справедливо неравенство:

$$|v(x,t) - v_N(x,t)| \leq \frac{2 \cdot V_0}{\tau} \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|J_n(n \cdot \tau)|}{n} \quad (5)$$

Из представления функции Бесселя  $n$ -го порядка в виде степенного ряда [2] найдём, что для любого натурального  $n$  во всей комплексной плоскости  $z$ :

$$|J_n(z)| \leq \frac{1}{n!} \cdot \left( \frac{|z|}{2} \right)^n \cdot \exp \left[ \frac{|z|^2}{4 \cdot n} \right] \quad (6)$$

Далее, для оценки  $n!$  применим неравенство, полученное в [3], а именно:

$$\left( \frac{e}{n} \right)^n \cdot \frac{n!}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n}} \geq \frac{1 - \sqrt{n} \cdot \exp[-\alpha(\varepsilon) \cdot (n-1)]}{\sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon}} \quad (7)$$

где  $n \in N$ ,  $\alpha(\varepsilon) = (1+2\cdot\varepsilon)\cdot\delta^2(\varepsilon)/2$ , а  $0 < \delta(\varepsilon) < 1$  таково, что для  $\varepsilon \in (0, 1/2)$  и для всех  $\xi \in [-\delta(\varepsilon), \delta(\varepsilon)]$  выполняется неравенство [3]:

$$|-\xi + \ln(1+\xi) + \xi^2/2| < \varepsilon \cdot \xi^2 \quad (8)$$

Комбинируя оценки (6) и (7) при  $N > N_0(\alpha(\varepsilon))$ , где

$$N_0(\alpha) = \frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} \cdot [2 \cdot \alpha \cdot \exp(-2 \cdot \alpha)]^k \quad (9)$$

— решение уравнения  $\sqrt{n} \cdot \exp[-\alpha \cdot (n-1)] = 1$  в виде ряда Бурмана-Лагранжа [2], получим, что:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|J_n(n \cdot \tau)|}{n} \leq \frac{A(\varepsilon)}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\exp[n \cdot f(\tau)]}{n^{3/2}}, \quad (10)$$

где  $f(\tau) = \tau^2/4 + \ln(e \cdot \tau/2)$  — монотонно возрастающая функция, отрицательная на интервале  $\tau \in (0, \tau_*)$  с  $\tau_* \approx 0,659$ , а  $A(\varepsilon) = \frac{\sqrt{1+2\cdot\varepsilon}}{1 - \sqrt{N_0(\alpha(\varepsilon)) + 1 \cdot \exp[-\alpha(\varepsilon) \cdot N_0(\alpha(\varepsilon))]}}$ .

Так как при  $n \geq N+1$   $n^{-3/2} \leq (N+1)^{-3/2}$ , то, применяя в (10) формулу суммирования геометрической прогрессии, найдём, что при  $\tau \in (0, \tau_*)$ ,  $N > N_0(\alpha(\varepsilon))$  и  $x \in R$  искомая оценка сходимости разложения Бесселя-Фубини имеет следующий вид:

$$|v(x, t) - v_N(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{V_0 \cdot A(\varepsilon)}{\tau \cdot (N+1)^{3/2}} \cdot \frac{\exp[(N+1) \cdot f(\tau)]}{1 - \exp[f(\tau)]}. \quad (11)$$

- [1] Гурбатов С. Н., Руденко О. В., Саичев А. И. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 496 с.
- [2] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
- [3] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т. 2. — М.: Высш. шк., 1988. — 576 с.

## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТАНОВИВШИХСЯ ПОЛЕТОВ ЛЕВИ В БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

А.А. Харчева

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Ранее в работе [1] было получено общее выражение для стационарной плотности вероятности координаты частицы в гладком симметричном потенциале вида  $U(x)=\gamma x^{\beta m}/2m$  при аномальной диффузии в форме полетов Леви с индексом Леви  $\alpha=1$ . В данной работе показано, как этот результат можно применить для отыскания установившегося вероятностного распределения в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме длины  $L$

$$U(x) = \begin{cases} 0, |x| < L \\ \infty, |x| > L \end{cases} \quad (1)$$

без применения условий непроницаемости её стенок.

Заметим, что в случае предельно большого показателя  $m$  гладкий потенциал превращается в бесконечно глубокую прямоугольную потенциальную яму (1) при соответствующей замене крутизны  $\gamma$  на  $\gamma/L^{2m}$ .

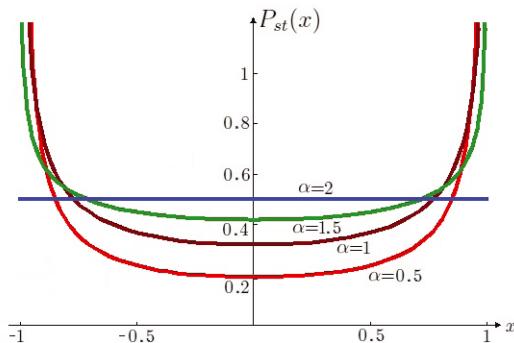
Итоговое выражение для установившегося вероятностного распределения имеет вид известного распределения арксинуса [2]

$$P_{st}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{L^2 - x^2}}, & |x| < L, \\ 0, & |x| > L. \end{cases} \quad (2)$$

Справедливость полученного результата может быть подтверждена сравнением (2) с точными результатами, полученными в [3] для шума с произвольным индексом Леви  $\alpha$

$$P_{st}(x) = \frac{(2L)^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(\alpha/2)(L^2 - x^2)^{1-\alpha/2}}, \quad (3)$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция. Однако, формула (3) была получена путем применения специальных условий на непроницаемых границах  $x = \pm L$ .



Установившиеся плотности вероятности (3) для различных значений индекса Леви  $\alpha$  показаны на Рис... Установившиеся спектральные характеристики полетов Леви в потенциальном профиле (1) не могут быть получены аналитически для произвольного индекса Леви  $\alpha$ . Однако, асимптотическое выражение для спектральной плотности мощности установившихся полетов Леви в рассматриваемом потенциале может быть получено: первая производная корреляционной функции в нуле  $K'[0]=-\infty$ , что отличается от случая обычного броуновского движения ( $\alpha=2$ ), когда  $K'[0]=-D$  ( $D$  – параметр интенсивности белого гауссового шума).

- [1] Dubkov A.A., Spagnolo B.// Acta Phys. Pol. B. 2007. V.38. P. 1745.
- [2] Kharcheva A.A. et al.// J. Stat. Mech. 2016 (в печати).
- [3] Denisov St. I. et al.// Phys. Rev. E. 2008. V. 77. P. 061112.

Секция «Математическое моделирование процессов и систем»

Заседание секции проводилось 20 мая 2016 г.

Председатель секции – А.А. Дубков, секретарь – А.А. Харчева.  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.