

**OPENCL-РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕНИ ПРОХОЖДЕНИЯ СОЛИТОНА ПО ЦЕПОЧКЕ  
ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ**

Г.В. Грищенко<sup>1,4</sup>, А.Л. Панкратов<sup>1,2,3</sup>, Е.В. Панкратова<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Нижегородский госуниверситет

<sup>2</sup>Институт физики микроструктур РАН

<sup>3</sup>НГТУ им. Р.Е. Алексеева

<sup>4</sup>Волжская государственная академия водного транспорта

Использование новых технологий, в частности методов параллельного программирования, в настоящее время позволяет значительно повысить быстродействие алгоритмов вычисления различных характеристик отклика больших массивов элементов при учёте внешних случайных воздействий. Одним из примеров таких многоэлементных систем являются так называемые джозефсоновские среды, состоящие из большого числа джозефсоновских контактов [1], исследование особенностей генерации которых имеет важное значение с точки зрения целого ряда приложений.

В данной работе на примере одномерной цепочки джозефсоновских контактов исследуются характеристики времени прохождения солитона от одного конца цепочки до другого с учётом влияния флуктуационного тока. Для полученного набора статистических реализаций исследуются зависимости среднего времени  $\tau = \langle t_s \rangle$  и среднеквадратичного отклонения  $\sigma = (\langle t_s^2 \rangle - \langle t_s \rangle^2)^{1/2}$  от числа контактов в цепочке при фиксированной интенсивности флуктуаций. При исследовании динамики массива джозефсоновских контактов использовалась резистивно-шунтированная модель [2-5]. Известно, что нормировка времени на обратную плазменную частоту ( $\omega_p^{-1} = (L_j C)^{1/2}$ ,  $L_j = \Phi_0 / (2\pi I_C)$  – эффективная джозефсоновская индуктивность,  $C$  – ёмкость джозефсоновского перехода,  $\Phi_0$  – квант магнитного потока) позволяет записать уравнение для джозефсоновской фазы  $n$ -го элемента массива в следующем виде:

$$\ddot{\varphi}_n + \alpha \dot{\varphi}_n + \sin \varphi_n = i_b + (\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1})/l + i_f(t), \quad (1)$$

где:  $n = 1, \dots, N$  – номер контакта в цепочке;  $\alpha = \omega_p / \omega_c$  – затухание;  $\omega_c$  – характерная джозефсоновская частота перехода ( $\omega_c = 2\pi I_C R_N / \Phi_0$ ,  $R_N$  – нормальное сопротивление джозефсоновского перехода);  $i_b$  – ток питания, нормированный на критический ток  $I_C$ ;  $l$  – соединительная индуктивность, также нормированная на критическую;  $i_f$  – флуктуационный ток, который моделируется белым гауссовым шумом:  $\langle i_f(t) \rangle = 0$ ,  $\langle i_f(t) i_f(t + \tau) \rangle = 2\alpha D \delta(\tau)$ , где  $D$  – безразмерная интенсивность шума.

Для вычисления среднего и среднеквадратического отклонения времени движения солитона по цепочке был разработан и реализован алгоритм вычислений на базе программного интерфейса OpenCL – открытого стандарта параллельных вычислений [6]. Стандарт нацелен на ускорение вычислений на центральных процессорах, графических картах и других устройствах, для которых существует драйвер

OpenCL, и лучше всего подходит для реализации параллелизма задач и параллелизма по данным. Используемая в данной работе схема численного счёта основана на методе Хюна для стохастических дифференциальных уравнений [7]. Моделирование флуктуаций производилось с подключением библиотеки ГСЧ Random123 [8]. Для оценки результатов реализации были проведены тесты на следующем оборудовании: центральный процессор Intel® Core™2 Duo E7300, 2 ядра, частота 2,66 ГГц; графическая карта AMD® Radeon™ HD 6950, 22 «ядра», частота графического процессора 800 МГц.

На рис. 1 приведён график зависимости среднеквадратичного отклонения времени движения солитона по цепочке контактов от числа элементов  $N$ . Корневая зависимость  $\sigma \sim cN^{0.5}$  согласуется с результатами, полученными в работе [9].

На рис. 2 представлены времена счёта на графическом (GPU) и центральном (CPU) процессоре для различного числа реализаций для усреднения. Из графиков видно, что версия для графической карты работает в несколько раз быстрее версии на центральном процессоре.

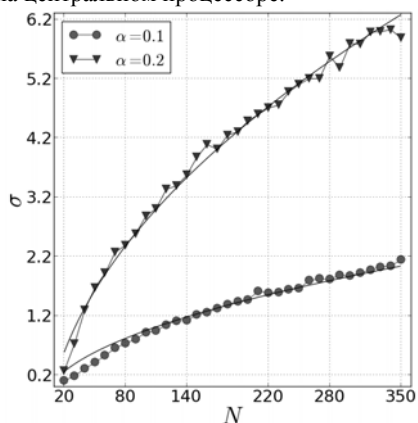


Рис. 1

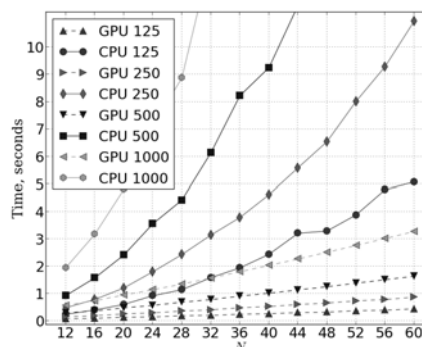


Рис. 2

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 14-02-31727, № 12-01-00694).

- [1] Сонин Э.Б. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47, № 8. С. 415.
- [2] McCumber D.E. // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. P. 3113.
- [3] Stewart W.C. // Appl. Phys. Lett. 1968. V. 12, P. 277.
- [4] Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. – М.: Наука, 1985, 320 с.
- [5] Ustinov A.V. // Physica D 1998. V. 23. P. 314.
- [6] Mannella R. // Int. J. Modern Phys. C 2002. V. 13, No. 9. P. 1177.
- [7] Gaster B., Kaeli D.R., Howes L., Mistry P., Schaa D. Heterogeneous computing with OpenCL. – Morgan Kaufmann, 2011, 400 p.

- [8] Salmon J.K., Moraes M.A., Dror R.O., Shaw D.E. // In Proc. Intern. Conf. for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (SC'11). – NY: ACM, 2011, p.16.
- [9] Pankratov A.L., Gordeeva A.V., Kuzmin L.S. // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 109. P. 087003.

**ДЕМОДУЛЯЦИЯ OFDM-СИГНАЛОВ  
С ФАЗОРАЗНОСТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ  
В КАНАЛАХ С РАССЕЯНИЕМ ВО ВРЕМЕНИ И ПО ЧАСТОТЕ**

Г.Н. Бочков<sup>1)</sup>, К.В. Горохов<sup>1,2)</sup>, А.В. Колобков<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup>Нижегородский госуниверситет

<sup>2)</sup>ОАО НПП «Полёт»

Оптимальные демодуляторы OFDM-сигналов в каналах с рассеянием во времени и по частоте позволяют, как известно [1], эффективно использовать только обусловленное быстрыми замираниями разнесение во времени. Тем не менее, даже при таком ограничении они способны достигать помехоустойчивости более высокой, чем в каналах с рассеянием только во времени или по частоте. Причина этого заключается в том, что оптимальные демодуляторы фактически осуществляют не «борьбу с межканальной интерференцией», сопровождающей замирания, а её использование для нивелирования негативного влияния глубоких замираний сигнала во времени и по частоте. Однако в общем случае они обладают чрезмерной сложностью. Поэтому актуальной является задача построения субоптимальных демодуляторов, обладающих приемлемой сложностью и помехоустойчивостью. В работе [2] для OFDM-сигналов с оптимальной трифазовой модуляцией (ОТФМ) [3] на выходе канала, нестационарная передаточная характеристика которого известна с точностью до общего фазового сдвига, разработан субоптимальный некогерентный демодулятор с обратной связью по решению (СНД-ОСР). В нём для вынесения решения об элементе сообщения используется  $N_{rx}$  принимаемых поднесущих и  $(2Q+1)$  смежных диагоналей канальной матрицы, описывающей нестационарную передаточную характеристику канала и имеющей квазидиагональную структуру. Сложность СНД-ОСР характеризуется перебором  $M_0^{Q+N_{rx}-3}$  вариантов на элемент, где  $M_0$  – позиционность модуляции.

В данной работе с целью уменьшения сложности СНД-ОСР были разработаны алгоритмы с сокращенным перебором. Эти алгоритмы реализованы не только для ОТФМ, но и для других видов фазоразностной модуляции (ФРМ) в частотной области таких, как ФРМ первого порядка (ЧФРМ-1) и ФРМ второго порядка (ЧФРМ-2) [3]. Сложность этих демодуляторов характеризуется перебором  $K_0[1+M_0(N_{rx}-N_{rx,0}+Q-Q_0)]$  вариантов на элемент, где  $K_0$  – число вариантов для начального перебора, осуществляемого при использовании  $N_{rx,0}$  принимаемых поднесущих и  $(Q+Q_0+1)$  смежных диагоналей канальной матрицы. Для ОТФМ  $K_0 = M_0^{Q+N_{rx,0}-3}$ .

Результаты исследования помехоустойчивости СНД-ОСР для OFDM-сигналов с 4-х позиционными ОТФМ и ЧФРМ-1 в двулучевом канале с рэлеевскими замира-

ниями и аддитивным белым гауссовым шумом представлены на рис. 1 и рис. 2. На рисунках  $BER$  – вероятность битовой ошибки,  $\langle E_b/N_0 \rangle$  – среднее отношение удельной энергии на бит сообщения к спектральной плотности мощности шума. Моделирование проводилось при следующих параметрах: общее количество поднесущих  $N = 140$ , активных поднесущих  $M = 130$  для ОТФМ и  $M = 129$  для ЧФРМ-1, статистически эквивалентные замирания в лучах с относительной скоростью  $f_d T = 0,75$  и  $f_d T = 0,3$  (где  $T$  – длина сигнала), задержка между лучами  $\tau_0 f_s = 6$  отсчетов.

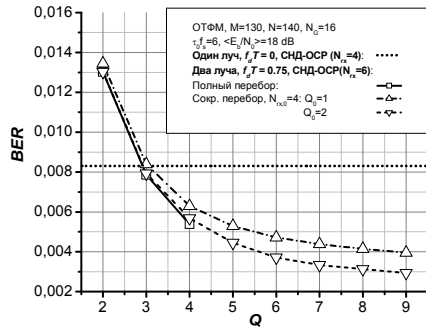


Рис. 1

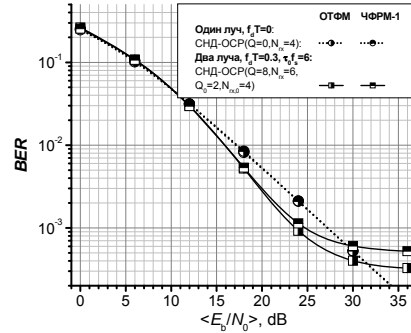


Рис. 2

Результаты, приведенные на рис. 1 для ОТФМ, демонстрируют, что СНД-ОСР с сокращенным перебором при  $Q_0=2$  и  $Q \leq 4$  практически не уступает по помехоустойчивости СНД-ОСР с полным перебором, а за счет уменьшения сложности сокращенный перебор позволяет использовать в два раза большие значения  $Q$ . При этом по сравнению с полным перебором при  $Q = 4$  сокращенный перебор при  $Q = 8$  обеспечивает в 1,7 раз меньшую вероятность ошибки и почти в 10 раз меньшую сложность. Рис. 2 показывает, что при  $\langle E_b/N_0 \rangle \leq 18$  дБ помехоустойчивости СНД-ОСР (при  $Q = 8$ ,  $N_{rx} = 6$ ,  $Q_0 = 2$  и  $N_{rx,0} = 4$ ) для ОТФМ и ЧФРМ-1 совпадают, а при больших отношениях «сигнал-шум» ОТФМ выигрывает у ЧФРМ-1. Отметим, что для обоих видов модуляции помехоустойчивости СНД-ОСР в двулучевом канале с быстрыми замираниями ( $f_d T = 0,3$ ) в диапазоне  $12 \text{ дБ} \leq \langle E_b/N_0 \rangle \leq 30 \text{ дБ}$  превосходят помехоустойчивости приема в однолучевом канале с общими замираниями ( $f_d T = 0$ ), т.е. демонстрируют срабатывание разнесения во времени, обусловленного быстрыми замираниями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-07-97037-р\_поволжье\_a).

- [1] Cai X., Giannakis G.B. // IEEE Trans. Commun. 2003. V. 51, No. 12. P. 2047.
- [2] <http://www.rf.unn.ru/rus/sci/books/13/pdf/mathem.pdf>.
- [3] Бочков Г.Н., Горохов К.В., Колобков А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, №8. С. 543.

**РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ВЫЯВЛЕНИЯ НЕШТАТНЫХ СИТУАЦИЙ  
НА МНОГОНИТОЧНОМ МАГИСТРАЛЬНОМ ГАЗОПРОВОДЕ****В.А. Фролов, В.Д. Исаев***ФНПЦ НИИИС им. Ю.Е. Седякина*

Газотранспортная система России, собственником которой является ОАО «Газпром», не имеет аналогов в мире. Общая протяженность только магистральных газопроводов (МГ) составляет более 154 тысяч километров. В настоящий момент изношенность основных элементов газотранспортной системы составляет до 56%, что приводит к возникновению нештатных ситуаций (НС) на элементах газотранспортной системы. Поскольку аварийные ситуации на многониточном магистральном газопроводе возникают достаточно редко, то вследствие отсутствия опыта, диспетчер не всегда может быстро и адекватно оценить ситуацию. Неверные действия диспетчера при локализации НС и управлении газовыми потоками посредством систем автоматики и телемеханики могут привести к значительным экологическим и финансовым потерям. В связи с этим, возникает необходимость в создании системы выявления нештатных ситуаций (СВНС), предназначенной для раннего выявления НС на многониточном магистральном газопроводе в режиме реального времени, определения типа и места НС и помощи диспетчеру в их локализации.

На линейной части МГ возможны следующие типы НС: утечка газа на МГ или разрыв МГ, несанкционированная перестановка линейных кранов на МГ, переток газа между МГ с различными газодинамическими режимами транспорта, а также отказ датчиков давления.

В основу системы СВНС положена математическая модель реального времени, обеспечивающая достаточно точное (2%) моделирование линейной части и компрессорных цехов контролируемого участка МГ. Наличие НС определяется путем сравнения данных реального времени, поступающих от систем линейной телемеханики (СЛТМ) и автоматики компрессорных цехов (САУ КЦ), и данных процесса моделирования в реальном времени. На основе разницы в значениях, моделируемых и реальных, определяется наличие НС. Алгоритм определения состоит из четырех этапов.

– Первый этап. Определение по матрице прецедентов наличия признаков НС на каждом линейном кране по значениям изменения показаний датчиков давления и состояния крана (получение предварительной степени уверенности).

– Второй этап. При определении НС по первому этапу происходит подтверждение уверенности в возникновении НС посредством анализа смежных линейных кранов, соединенных перемычками (получение высокой или средней степени уверенности).

– Третий этап. При наличии разрыва МГ система, исходя из данных по соседним нитям и соседним контролируемым пунктам (КП), определяет место утечки, со временем уточняя его. При обнаружении места разрыва используется параболический метод [1]. Суть метода заключается в том, что при разрыве МГ на графиках давления по протяженности нити образуется впадина, экстремум которой предпо-

ложительно является местом утечки. Показания датчиков давления аппроксимируются параболой и находится ее экстремум.

– Четвертый этап. Для обеспечения наивысшей степени уверенности производится моделирование прогнозируемой НС в ускоренном режиме. При совпадении данных ускоренного моделирования и реальных данных, накопленных в стеке, происходит дополнительное подтверждение НС и сообщение диспетчеру о наличии на трассе НС.

Поскольку при отладке нет возможности работать с реальными данными НС, то авторами было предложено использовать в качестве поставщика данных реального времени тренажер диспетчера ЛПУ разработки НИИИС. Такой тренажер обеспечивает моделирование данных по ЛЧ и КЦ в реальном масштабе времени и формирование всех видов возможных НС. Разработанная схема позволила провести разработку прототипа СВНС и отработать алгоритмы обнаружения НС.

СВНС является начальным этапом создания системы поддержки принятия решений (СППР), которая обеспечит рекомендации диспетчеру по оптимальной локализации аварийных ситуаций с применением используемых систем автоматики и телемеханики. Наличие СВНС или СППР на пункте управления поможет диспетчеру быстрее сориентироваться в случае возникновения нештатной ситуации и локализовать ее с минимальным ущербом для окружающей среды и газотранспортной системы.

[1] Методы и модели поддержки принятия решений в нештатных ситуациях при эксплуатации магистральных трубопроводных сетей /Под ред. Д.В. Александрова. – М.: Финансы и статистика, 2013. С. 102.

### **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ФАКТОРОВ РИСКА В ОТНОШЕНИИ СТРЕСС-КОРРОЗИИ**

**Н.Е. Казачек**

*Нижегородский госуниверситет*

Оценка состояния трубопроводов, анализ безопасности их эксплуатации и ранжирование участков трубопроводов по срокам ремонта является важной и актуальной задачей для компаний газовой и нефтяной промышленности. Тотальное обновление трубопроводной системы практически нереальная задача для любой крупной газовой или нефтяной компании.

Серьезной и опасной проблемой для газопровода является стресс-коррозия - явление, которое не подвергается исследованием дефектоскопии. На сегодняшний день это нерешенная проблема, которая приводит к большим непредсказуемым разрушениям газопровода. Организации, создающие и эксплуатирующие трубопроводный транспорт, постоянно совершенствуют методики, позволяющие оценить ресурс и надежность трубопроводов.

Предлагается по интегральному показателю степени опасности стресс-коррозии выявить на технологическом трубопроводе газа компрессорной станции (КС) наиболее опасные участки в отношении стресс-коррозии, в которых выполняется экскавация трубопровода для приборного обследования с целью выявления трещин стресс-коррозии.

В данном исследовании в качестве  $n_i$  факторов, способствующих образованию стресс-коррозии на трубопроводах компрессорных станций (КС) газа, рассматриваются: напряженно-деформированное состояние, тип грунта, коррозионная активность грунта, состояние изоляционного покрытия, уровень грунтовых вод, водотоки, магнитные аномалии поверхности Земли, аномалии, обнаруживаемые при внутритрубном обследовании, геометрические параметры труб. Количество факторов равно девяти. Экспериментально определяются различные дискретные значения перечисленных показателей.

В результате инструментальной съемки находятся координаты  $m_i$  точек оси участка технологического трубопровода газа. Исходной информацией является массив в виде координат точек оси участка и экспериментальные значения показателей. Далее осуществляется аппроксимация кривых, представляющие собой оси трубопроводов газа КС.

Установлено, что для практического применения с целью получения небольшой погрешности коэффициентов использовались сплайны невысоких степеней [1-2]. Данные функции обладают хорошими сплайн-аппроксимативными свойствами и удобны при реализации на ЭВМ построенных на их основе алгоритмов. Погрешность в определении коэффициентов оценивалась с помощью числа обусловленности матрицы коэффициентов линейной системы. Выполнялись условия минимизации невязок численных и измеренных значений в заданных точках.

[1] Максимов В.М. // Газовая промышленность. 2012, № 7.

[2] Максимов В.М. // Газовая промышленность. 2005, № 7.

## КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ ИЗМЕРИТЕЛЬ МОЩНОСТИ ВСПЫШЕК

А.Т. Гаврилин

*Нижегородский госуниверситет*

Оценка энергетических параметров стохастических сигналов обычно ограничивается случаем стационарных процессов и их реализаций, достаточно протяженных в сравнении со временем корреляции. Между тем в ряде технических областей актуальна задача прецизионного измерения мощности кратковременных сильно нестационарных процессов. При этом физические представления о механизмах генерации процесса позволяют считать его корреляционную функцию известной с точностью до мультипликативного параметра  $R(t_1, t_2) = \alpha \rho(t_1, t_2)$ . Здесь  $\rho(t_1, t_2)$  – известный невырожденный коэффициент корреляции значений процесса в моменты  $t_1$  и  $t_2$ . Когда процесс складывается из большого числа независимых элементарных актов, его, в силу центральной предельной теоремы [1], можно с высокой степенью точности моделировать как гауссовский.

Итак, пусть динамический диапазон детектора позволяет без искажений в течение интервала  $[0, T]$  фиксировать реализацию центрированного нормального случайного процесса  $\xi(t, \alpha)$ , зависящего от энергетического параметра  $\alpha$ . Последний характеризуется априорной плотностью вероятности  $w(\alpha)$ . Здесь мы применяем байесовский подход [2] и считаем априорную информацию о параметре апостериорной информацией предшествующих опытов. Ищем оценку  $\alpha$  в виде квадратичного функционала от реализации  $\xi(t, \alpha)$  на интервале  $[0, T]$ :

$$\hat{a}[\xi_0^T] = K_0 + \int_0^T \int_0^T K_2(t_1, t_2) \xi(t_1) \xi(t_2) dt_1 dt_2, \quad (1)$$

где  $K_0, K_2(t_1, t_2)$  - соответственно положительная константа и гладкое ядро. В качестве критерия качества оценки выбираем байесовский риск вида

$$R = \left\langle \left( \hat{a}[\xi_0^T] - a \right)^2 \right\rangle, \quad (2)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по условным (с известным  $\alpha$ ) распределениям процесса, тогда как черта сверху - по  $\alpha$  с весом  $w(\alpha)$ . Подставляя (1) в (2) и проводя стандартную вариационную процедуру, после исключения  $K_0$  приходим к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода относительно ядра  $K_2(t_1, t_2)$ :

$$\int_0^T \int_0^T K(u_1, u_2) \rho(t_1, u_1) \rho(t_2, u_2) du_1 du_2 = \frac{D_a}{2a^2} \left[ 1 - \int_0^T \int_0^T K(u_1, u_2) \rho(u_1, u_2) du_1 du_2 \right] \rho(t_1, t_2). \quad (3)$$

Как хорошо известно [3], решение такого уравнения представляет собой некорректно поставленную задачу. В качестве способа ее регуляризации, имеющего физическое оправдание, «подмешаем» в процесс  $\xi(t, \alpha)$  аддитивный белый шум с исчезающе малой спектральной плотностью  $N_0$  и разложим ядро  $K_2(t_1, t_2)$  в ряд по собственным ортонормированным функциям корреляционного оператора  $\int_0^T \rho(t, u) * du$  ( $\int_0^T \rho(t, u) \varphi_k(u) du = \lambda_k \varphi_k(t)$ ):

$$K_2(t_1, t_2) = \sum_n k_n \varphi_n(t_1) \varphi_n(t_2). \quad (4)$$

Т.к.  $\varphi_n(t)$  взаимно ортогональны, то уравнение Фредгольма 2-го рода, порождаемое уравнением (3) за счет включения в исследуемый процесс белого шума, сводится к счетному множеству алгебраических уравнений относительно неизвестных  $k_1, k_2, k_3, \dots$

$$2k_n \left( a^2 \lambda_n^2 + 2aN_0 + N_0^2 \right) = D_a \lambda_n \left( 1 - \sum_{m=1}^{\infty} k_m \lambda_m \right), \quad (5)$$

откуда

$$k_n = D_a \lambda_n \left( 1 - \sum_{m=1}^{\infty} k_m \lambda_m \right) / 2(a\lambda_n + N_0)^2. \quad (6)$$

В итоге имеем



$$\hat{a}[\xi_0^T] = \frac{\bar{a} + D_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2 - N_0}{2(a\lambda_n + N_0)^2} \lambda_n}{1 + D_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{2(a\lambda_n + N_0)^2}}, \quad (7)$$

где  $x_n = \int_0^T \xi(t) \varphi_n(t) dt$  – случайные координаты Карунена-Лозва наблюдаемого процесса.

Средний риск оценки (7) задается формулой

$$R = \frac{D_a}{1 + D_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{2(a\lambda_n + N_0)^2}}. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что при  $N_0 \rightarrow 0$  риск (8) также стремится к нулю, т.е. оценка (7) в пределе становится безошибочной. Может показаться удивительным, что сколь угодно короткая реализация случайного процесса однозначно удостоверяет величину его дисперсии. Однако в рамках принятой модели координаты Карунена-Лозва представляют собой независимые нормально распределенные случайные величины, поэтому средневзвешенная (с весами  $1/\lambda_n$ ) сумма их квадратов, согласно теоремам математической статистики, сходится в среднеквадратическом к дисперсии «длины» центрированного случайного вектора. Учет белого шума, всегда присутствующего в канале, делает алгоритм (7) устойчивым как к малым отклонениям процесса  $\xi(t, \omega)$  от «нормальности», так и к неточности формы коэффициента корреляции  $\rho(t_1, t_2)$ .

- [1] Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 2. – М.: Физматлит, 1994, 368 с.  
 [2] Гаврилин А.Т. // РЭ. 1975. Т. 20, № 3. С. 642.  
 [3] Забрейко П.П. и др. Интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1968, 446 с.

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ШИРИНЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ ГЕНЕРАЦИИ В ЦЕПОЧКАХ ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫХ БЕЗГИСТЕРЕЗИСНЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ

А.С. Мясников<sup>1,4</sup>, А.Л. Панкратов<sup>1,2,3</sup>, Е.В. Панкратова<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Нижегородский госуниверситет

<sup>2</sup>Институт физики микроструктур РАН

<sup>3</sup>НГТУ им. Р.Е. Алексеева

<sup>4</sup>Волжская государственная академия водного транспорта

В настоящее время разработано много моделей, учитывающих различные свойства джозефсоновских контактов (ДК). Однако для описания фазовой динамики

ки контактов наиболее широкое распространение получила резистивно-шунтированная модель (RCSJ) [1]. В рамках данной модели по закону Кирхгофа полный ток  $I$ , проходящий через ДК, определяется суммой джозефсоновского тока  $I_j = I_c \sin \varphi$ , тока смещения  $I_n = V/R_n$  и емкостного тока  $I_d = C dV/dt$ :

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\Phi_0}{2\pi R_n} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\Phi_0 C}{2\pi} \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (1)$$

где:  $I_c$  – значение критического тока,  $\varphi$  – разность фаз параметра порядка,  $V = (\Phi_0/2\pi)d\varphi/dt$  – напряжение,  $R_n$  – нормальное сопротивление,  $C$  – емкость контакта,  $\Phi_0$  – квант магнитного потока. После введения безразмерного времени  $\tau = t(2\pi I_c / (\Phi_0 C))^{1/2}$  уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\varphi}{d\tau} + \sin \varphi = i_{dc}, \quad (2)$$

где  $i_{dc} = I/I_c$  – нормированный постоянный ток, проходящий через ДК. Коэффициент диссипации  $\alpha = \beta^{-1/2}$ , где  $\beta = 2\pi C I_c R_n^2 / \Phi_0$  – параметр Маккамбера-Стюарта, определяющий вид вольтамперной характеристики (ВАХ) ДК.

Для изучения спектральных характеристик генерации в параллельной цепочке индуктивно связанных ДК рассмотрим систему:

$$\frac{d^2\varphi_j}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\varphi_j}{d\tau} + \sin \varphi_j = i_{dc} + \varepsilon(\varphi_{j-1} - 2\varphi_j + \varphi_{j+1}) + i_f(\tau), \quad (3)$$

где:  $j=1, \dots, n$  – номер контакта в цепочке,  $\varepsilon$  – параметр связи, равный  $\varepsilon=1/l$ , где  $l$  – безразмерная индуктивность между соседними элементами цепочки. Флуктуационный ток  $i_f(\tau)$  моделируется белым гауссовым шумом:  $\langle i_f(\tau) \rangle = 0$ ,  $\langle i_f(\tau) i_f(\tau + \tau^*) \rangle = 2\alpha \gamma \delta(\tau^*)$ , где  $\gamma$  – безразмерная интенсивность шума. Индуктивность и количество контактов связаны следующим образом:  $nl^{1/2} = L$ , где  $L$  – пространственная длина цепочки. Параметр затухания  $\alpha=3$ , поэтому ВАХ ДК является безгистерезисной.

Известно, что малые широкополосные флуктуации приводят к спектру, состоящему из низкочастотной части и серии линий гармоник джозефсоновской генерации, уширенных по Лоренцу [1]. На рис. 1 на кривую, численно полученную для спектральной плотности мощности одиночного ДК, наложена пунктиром кривая Лоренца:

$$S_{L\omega}(\omega) = \frac{S_0 \Delta\omega}{(\omega - \omega_j)^2 + (\Delta\omega)^2}. \quad (4)$$

Аппроксимация с помощью выражения (4) численно полученных спектральных кривых при изменении параметра инжектируемого тока  $i_{dc}$  позволяет получить зависимость ширины линии  $\Delta\omega(i_{dc})$ . С другой стороны, для определения ширины линии генерации в пределе большого затухания можно использовать формулу Лихарева [1]:

$$\Delta\omega(i_{dc}) = \frac{2\gamma(i_{dc}^2 + 0.5)}{i_{dc}^2 - 1}. \quad (5)$$

Было установлено, что в одномерных цепочках в пределе большого затухания ширина линии генерации уменьшается обратно пропорционально числу ДК  $n$ , т.е. справедлива зависимость:

$$\Delta\omega(i_{dc}) = \frac{1}{n} \frac{2\gamma(i_{dc}^2 + 0.5)}{i_{dc}^2 - 1}. \quad (6)$$

На рис. 2 показаны кривые  $\Delta\omega(i_{dc})$ , полученные по формуле (6) для одного ДК и для цепочек из  $n=3, 4$  и  $5$  контактов (сверху вниз). Маркерами на рисунке обозначены результаты численного счета. Из полученных графиков следует, что увеличение инжектируемого тока в рассматриваемом диапазоне приводит к уменьшению ширины линии генерации, однако при дальнейшем его увеличении наблюдается эффект насыщения. Более того, зависимость  $\Delta\omega \sim 1/n$  наблюдается, если число контактов мало, т.е. размеры системы не превышают характерной джозефсоновской длины  $\lambda_j$ , что согласуется с результатами, полученными в работе [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 14-02-31727, 12-01-00694).

- [1] Лихарев К. К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. – Москва: Наука. Физматлит, 1985. С.320.  
 [2] Корнев В.К., Арзуманов А.В. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. С. 23.

### ВЛИЯНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО БАРЬЕРА НА КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЕТОВ ЛЕВИ В БИСТАБИЛЬНОМ СИММЕТРИЧНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

А.А. Дубков, А.А. Харчева

*Нижегородский госуниверситет*

Аномальная диффузия в форме полетов Леви наблюдается в системах самой различной природы [1, 2]. Данный вид супердиффузии представляет собой негауссов марковский процесс, характеризующийся присутствием в реализациях экстре-

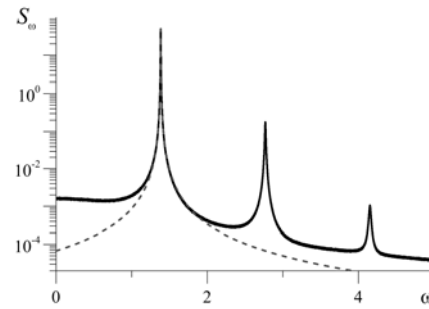


Рис. 1

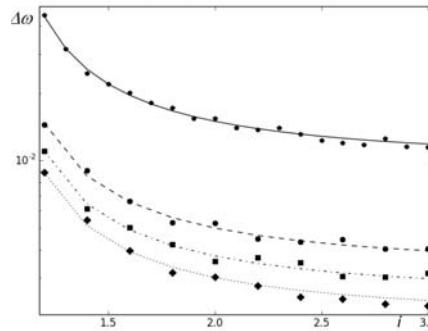


Рис. 2

мально больших скачков, в результате чего моменты, начиная со второго порядка, неограниченны ( $\langle x^2(t) \rangle = \infty$ ). Это своеобразное свойство существенно отличает полеты Леви от обычного броуновского движения, для которого все моменты координаты частицы конечны.

В силу сложности математического аппарата описания полетов Леви аналитические результаты удастся получить лишь для стационарных характеристик супердиффузии. В настоящей работе выводится точное соотношение для времени корреляции установившихся полетов Леви в бистабильном симметричном потенциале и анализируется влияние высоты потенциального барьера на корреляционные характеристики диффузии.

Диффузию в форме полетов Леви можно описать следующим стохастическим уравнением Ланжевена для координаты частицы с аддитивным стационарным шумом  $\xi_\alpha(t)$ , обладающим устойчивым симметричным распределением Леви:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU}{dx} + \sigma \xi_\alpha(t), \quad (1)$$

где  $U(x) = \gamma(x^4/4 - ax^2/2)$  – симметричный бистабильный потенциал,  $\gamma$  – крутизна потенциала,  $a$  – неотрицательный параметр, позволяющий регулировать высоту потенциального барьера и положение минимумов потенциала,  $\alpha$  – индекс Леви ( $0 < \alpha < 2$ ),  $\sigma$  – масштабный параметр, характеризующий интенсивность возмущающего шума. Соответствующее уравнению (1) уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности координаты с дробной пространственной производной имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dU}{dx} P \right) + \sigma^\alpha \frac{\partial^\alpha P}{\partial |x|^\alpha}. \quad (2)$$

С помощью преобразования Фурье из уравнения (2) можно получить точную формулу для стационарного вероятностного распределения координаты в случае возмущающего шума с устойчивым распределением Коши ( $\alpha=1$ ) (см. [3]):

$$P_{st}(x) = \frac{p^3 - q^3}{\pi [x^4 - (p^2 + 4pq + q^2)x^2 + (p^2 + pq + q^2)^2]}, \quad (3)$$

где  $p = [R + D/(2\gamma)]^{1/3}$ ,  $q = [R - D/(2\gamma)]^{1/3}$ ,  $R = [(a/3)^3 + D^2/(4\gamma^2)]^{1/2}$ . Вероятностное распределение (3), являющееся бимодальным как при наличии ( $a=2$ ), так и в отсутствие ( $a=0$ ) потенциального барьера, представлено на рис. 1 для значений параметров  $\sigma=1, 1, \gamma=1$ .

На основе метода, развитого в [4], и формы стационарной плотности вероятности (3) из уравнения Фоккера-Планка (2) по аналогии с работой [5] нами было найдено точное выражение для времени корреляции установившихся полетов Леви в бистабильном симметричном потенциале:

$$\tau_c = \frac{2}{\sqrt{3}\gamma(p^2 - q^2)} \arctan \frac{p + q}{\sqrt{3}(p - q)}. \quad (4)$$

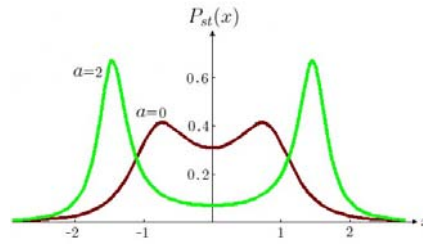


Рис. 1

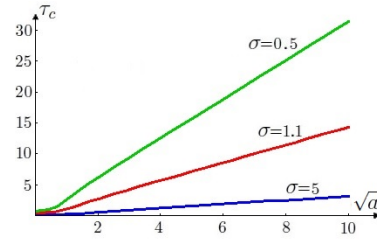


Рис. 2

Интересно определить зависимость времени корреляции от высоты потенциального барьера  $\Delta U = \gamma a^2/4$ , которая для обычной диффузии в соответствии с формулой Крамерса является экспоненциальной. В пределе достаточно высокого барьера  $\Delta U/(a\sigma) \gg 1$  из (4) приходим к степенному закону:

$$\tau_c \approx \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sigma} \sim \sqrt[4]{\Delta U}. \quad (5)$$

На справедливость «нового закона Крамерса» (5) указывает приведенная на рис. 2 зависимость времени корреляции (4) от параметра  $a$  для различных значений  $\sigma$  при фиксированной крутизне потенциала  $\gamma=2$ . Отметим также, что в отсутствии потенциального барьера ( $a=0$ ) соотношение (4) переходит в формулу для времени корреляции установившихся полетов Леви в моностабильном потенциале четвертой степени, полученную недавно в работе [5].

- [1] Chechkin A.V. et al // Adv. Chem. Phys. 2007. V.133. P. 439.
- [2] Dubkov A.A., Spagnolo B., Uchaikin V.V. // Int. J. Bifurc. Chaos. 2008. V. 18. P. 2649.
- [3] Sliusarenko O.Yu. et al // Eur. Phys. J. Special Topics. 2013. V. 216. P. 133.
- [4] Dubkov A.A. et al // Radiophys. Quant. Electr. 2000. V. 43. P. 335.
- [5] Dubkov A.A., Spagnolo B. // Eur. Phys. J. 2013. V. 216. P. 31.

### О НАЛИЧИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ОДНИМ УСТОЙЧИВЫМ СОСТОЯНИЕМ

А.А. Дубков, И.А. Литовский

*Нижегородский госуниверситет*

Явление стохастического резонанса, заключающееся в увеличении отклика нелинейной динамической системы на внешний синусоидальный сигнал за счет выбора оптимальной интенсивности шума, наблюдается в объектах самой различной природы (см., например, библиографию в [1]). Хотя данный пороговый эффект проявляется в бистабильных системах, имеются теоретические и экспериментальные подтверждения его существования при броуновской диффузии в моностабильных потенциальных профилях

специальной формы [2, 3]. Заметим, что в этих исследованиях применялась стандартная теория линейного отклика, базирующаяся на малости внешнего синусоидального сигнала.

В настоящей работе проведен строгий анализ наличия стохастического резонанса в системе с достаточно простым моностабильным потенциалом без предположения о малости внешнего периодического воздействия.

Рассмотрим одномерное броуновское движение частицы в среде с большой вязкостью, описываемое уравнением Ланжевена,

$$\dot{x} = -U'(x) + F(t) + \xi(t), \quad (1)$$

где:  $x(t)$  – координата частицы,  $U(x)$  – потенциал,  $F(t)$  – внешний периодический сигнал,  $\xi(t)$  – гауссов белый шум с нулевым средним значением и интенсивностью  $2D$ . В качестве потенциального профиля  $U(x)$  рассмотрим бесконечную яму ширины  $L$ , а в качестве сигнала – меандр с амплитудой  $A_0$  и периодом  $T$ :

$$F(t) = A_0 \operatorname{sgn} \left[ \sin \left( \frac{2\pi}{T} t \right) \right]. \quad (2)$$

Соответствующее (1) уравнение Фоккера-Планка (УФП) для плотности вероятности координаты частицы

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{dU}{dx} - F(t) \right) P + D \frac{\partial P}{\partial x} \right] \quad (3)$$

будем решать с начальным условием:  $P(x,0)=1/L$  и с граничными условиями:  $G(0,t)=G(L,t)=0$ , означающими непроникновение частицы за стенки ямы ( $G(x,t)$  – поток вероятности, определяемый выражением в квадратных скобках в уравнении (3)). В адиабатическом приближении [4], т.е. в приближении достаточно быстрой релаксации системы на полупериоде сигнала:  $\lambda_1 T/2 \gg 1$ , где  $\lambda_n = \pi^2 n^2 D/L^2 + A_0^2/(4D)$ , с помощью метода разделения переменных было получено выражение для  $P(x,t)$ . Путем интегрирования соотношения для плотности вероятности  $P(x,t)$  найдено среднее значение координаты частицы  $\langle x(t) \rangle$

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(t+T) \rangle = \begin{cases} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n(t-T/2)}, & T/2 \leq t \leq T, \\ L - c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n(t-T)}, & T \leq t \leq 3T/2 \end{cases}, \quad (4)$$

где коэффициенты  $c_n$  имеют довольно сложные выражения. Зависимость  $\langle x(t) \rangle$  от времени представлена на рис. 1 для трех значений интенсивности шума:  $D=2$  (кривая 1),  $D=2,5$  (кривая 2),  $D=3$  (кривая 3) и параметров  $A_0=10$ ,  $L=1$ . Разлагая периодический сигнал (4) в ряд Фурье, определяем амплитуду первой гармоники

$$r_1 \approx \frac{4}{\pi} \left( c_0 - \frac{L}{2} \right) + 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n^2 T^2}. \quad (5)$$

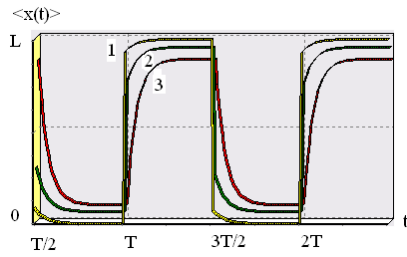


Рис. 1

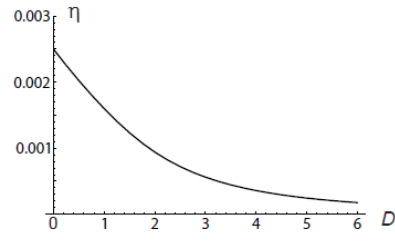


Рис. 2

Выполняя аналогичную процедуру с меандром (2), определяем в адиабатическом приближении из (5) искомый коэффициент усиления сигнала по мощности

$$\eta = \frac{r_1^2 \pi^2}{16A_0^2} \approx \left[ \frac{L}{2A_0} \left( \coth \frac{\beta}{2} - \frac{2}{\beta} \right) \right]^2, \quad (6)$$

где  $\beta = A_0 L / D$ . Представленная на рис. 2 монотонная зависимость (6) коэффициента усиления от интенсивности шума для тех же значений параметров, что и на рис. 1, свидетельствует об отсутствии стохастического резонанса в рассматриваемой системе (1).

Примененный в работе метод решения УФП дает надежды на более точное аналитическое описание мультистабильных стохастических систем за рамками теории линейного отклика.

- [1] Gammaioni L. et al // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 223.
- [2] Evstigneev M. et al // Eur. Phys. Lett. 2004. V. 65. P. 7.
- [3] Agudov N.V. et al // Phys. Rev. E. 2010. V. 81. P. 051123.
- [4] Гинзбург С.Л., Пустовойт М.А. // ЖЭТФ. 1999. V. 116. P. 1484.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ВОЛАТИЛЬНОСТЕЙ ДОХОДНОСТИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

С.А. Лапинова

НИУ ВШЭ

Внутридневная волатильность имеет решающее значение как индикатор риска для оценки доходности финансовых активов. Прогнозирование различных видов волатильности на текущий момент и предсказание их поведения в следующий момент времени является сложной математической задачей. Существует довольно много инструментов оценки и их модификаций реализованной волатильности (см., например, [1, 2]). Основная идея их строительства основывается на использовании цены открытия и закрытия на некотором интервале. Другой распространенной практикой является использование не двух значений (открытие-закрытие) логариф-

ма цены в пределах определенного временного шага, а четырех значений, где используются еще и максимум и минимум логарифма цены (OHLC) на заданном интервале. Хорошо известными примерами здесь являются оценщики [3–5].

Одной из интересных проблем, связанных с волатильностью, является проблема взаимного влияния волатильностей на различных рынках. Основная цель данной работы заключалась в получении коэффициентов, характеризующих влияние волатильности различных финансовых продуктов.

В качестве эстиматора волатильности использовался броуновский мост (bridge estimator, OHLC), применяемый к случайным временным точкам с учетом максимумов и минимумов в пределах определенного временного шага. Дисперсия, полученная данным эстиматором, значительно более эффективна, чем полученные указанными выше оценщиками (см. [6]). Еще одно замечательное свойство моста заключается в том, что его оценки меньше зависят от дрейфа процесса. Мы полагаем, что лог-цена  $X(t)$  некоторого инструмента следует процессу Ито и подчиняется дифференциальному уравнению

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t) dW(t), \quad X(0) = X_0,$$

где  $W(t)$  – стандартный винеровский процесс, в то время как  $\mu(t)$  – мгновенная скорость дрейфа, а  $\sigma^2(t)$  – мгновенная дисперсия процесса  $X(t)$ .

Применим эстиматор Бриджа для оценки условной дисперсии:

$$V(t) = W(t) - tW(1),$$

где:  $t \in (0,1]$ ,  $W(0)=0$ .

Применим для построения авторегрессии одного финансового инструмента  $GARCH(1,k)$  модель с переключениями следующего вида:

$$V_{jt} = V_{j0} + \gamma_{j1} V_{j,t-1} 1(\mu_t > \mu_0) + \gamma_{j2} V_{j,t-1} 1(\mu_t < \mu_0) + \beta_j \xi_{t-1}^2$$

Для обсуждения мультифакторной модели с влиянием между  $m$  рынками рассмотрим уравнение:

$$V_t = V_0 + \gamma_{11} V_{t-1} 1(\mu_t > \mu_0) + \gamma_{12} V_{t-1} 1(\mu_t < \mu_0) + \beta \xi_{t-1}^2$$

где:  $V_{j0}$  – базовый (почти нулевой) уровень волатильности,  $\gamma_{j1,2}$  – факторы реакции рынка  $j$  на волатильности  $V_{j,t-1}$ , в дополнение можно сказать, что  $\gamma_{j1,2}$  зависят от рыночного тренда в момент времени  $t-1$ ,  $\xi_{t-1}^2$  – непредсказуемый шок, который возникает из-за внешних новостей и других случайных факторов в момент  $t-1$ . Мы предполагаем, что  $\xi_{t-1}^2$  имеет нормальное распределение  $\sim N(0, \sigma^2)$ . Как известно, плохие новости имеют большее влияние на волатильность, чем хорошие новости, т.е. ожидается большая волатильность на падающем рынке, чем на растущем. Этот эффект иногда называют эффектом рычага.

Рассмотрим модель, которая учитывает наблюдаемую асимметрию на финансовых рынках. Учитывая указанные выше факты, вводим в модель направление тренда  $\mu_t$ . Так, для «предсказуемой» ситуации с определенным направлением движения рынка и без глобальных внешних новостей  $\mu_t > \mu_0$ , с другой стороны  $\mu_t <$



$-\mu_0$ . Кроме того, предполагаем, что ситуация, когда  $|\mu_t| < \mu_0$  соответствует хаосу на рынках или боковому тренду. Здесь  $\mu_0$  – «нулевой» уровень тренда.

Для многомерной модели  $V_t, V_0$  –  $m \times 1$  матрицы, а  $\gamma_{1,2}$  –  $m \times m$  асимметричная матрица коэффициентов взаимного влияния финансовых инструментов. Кроме того, будем считать, что инструменты (или рынки, где они торгуются) подчиняются закону *Zipfa*. Этот закон использует эмпирические результаты и ссылается на то, что многие типы данных можно приблизить с помощью *Zipfian*-распределения, одного из семейства родственных дистрибутивных дискретных степенных законов вероятности. Согласно нему, если рынок  $j$  является значительно большим, чем рынок  $i$  по объему торгов, или объем торгов инструмента  $j$  больше, чем торгов инструментом  $i$ , то коэффициент влияния  $\gamma_{ij} \neq \gamma_{ji}$ .

Данная модель была проверена на волатильности доходности акций крупных и средних банков. Результаты показали, что наибольшее взаимное влияние наблюдается между банками с примерно равными капиталами.

- [1] Sahalia, Y., Mykland P.A., Zhang L. // *Rev. Fin. Stud.* 2005. V. 18. P. 351.
- [2] Andersen, T.G., Bollershev T., Diebolt F. X., Labys P. // *Econometrica.* 2003. V. 71. P. 529.
- [3] Garman, M., Klass M. J. // *J. Business.* 1980. V. 53. P. 67.
- [4] Parkinson M. // *J. Business.* 1980. V. 53. P. 61.
- [5] Rogers L.C.G., Satchell S.E. // *Annals Appl. Probability.* 1991. V. 4. P. 504.
- [6] Lapinova S., Saichev A., Tarakanova M. // *Physica A* 2013. V. 392. P. 1439.