

СИНХРОНИЗАЦИЯ И ФАЗИРОВАНИЕ В ЦЕПОЧКЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ СПИНОВЫХ НАНОГЕНЕРАТОРОВ

К.Н. Алешин^{1,2)}, К.Г. Мишагин^{1,2)}

¹⁾Нижегородский госуниверситет

²⁾ЗАО «Время-Ч»

Спиновые наногенераторы в силу своих частотных характеристик и малого размера являются весьма привлекательными для многих приложений. Однако малая мощность излучения таких наногенераторов приводит к постановке задачи о синхронизации нескольких спиновых наногенераторов для когерентного сложения их мощностей.

В [1] показано, что два спиновых наногенератора, связанные через спиновые волны, могут быть взаимно синхронизованы в фазе и в противофазе. В цепочке генераторов возникает мультистабильность синхронных режимов, которая усложняет задачу когерентного сложения мощностей. Для разрешения этой проблемы предлагается простой алгоритм переброса фазы, позволяющий значительно увеличить полную мощность ($P_{\text{полн}}$) излучения цепочки наногенераторов. В силу того, что частота генерации спинового наногенератора зависит от величины протекающего через него электрического тока, вновь подключенный наногенератор можно перестроить по фазе в состояние, при котором разность фаз между ним и фазами других генераторов ансамбля будет минимальна.

Для демонстрации метода рассмотрим систему дифференциальных уравнений, качественно описывающих динамику цепочки связанных наногенераторов:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1 + \Omega \sin(2(\varphi_1 - \varphi_2)) \\ \dot{\varphi}_i = \omega_i + \Omega \sin(2(\varphi_i - \varphi_{i-1})) + \Omega \sin(2(\varphi_i - \varphi_{i+1})), \\ \dot{\varphi}_n = \omega_n + \Omega \sin(2(\varphi_n - \varphi_{n-1})) \end{cases} \quad (1)$$

где φ_k – фаза k -го наногенератора, ω_k – собственная частота колебаний k -го наногенератора, Ω – параметр, пропорциональный силе связи наногенераторов между собой, индекс i изменяется от 2 до $n-1$, где n – номер последнего наногенератора в цепочке. В качестве критерия оценки мощности примем критерий максимума параметра порядка, определяемого следующим соотношением:

$$\eta = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n e^{j\varphi_i} \right|, \quad (2)$$

где j – мнимая единица, η – параметр порядка, по сути, суммарная мощность излучения цепочки в направлении максимума диаграммы направленности.

Численное моделирование системы уравнений (1) проводилось методом Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом. Начальные условия

для каждой реализации выбираются случайным образом с равномерным распределением на интервале от $-\pi$ до π . Параметры ω_k для каждой реализации имели случайное значение с равномерным распределением на интервале $(1, 1+0,05\Omega)$.

Рассмотрим простое последовательное подключение наногенераторов в цепочку. Для иллюстрации эффекта «некогерентного» сложения построим график зависимости параметра порядка, усреднённый по 100 реализаций (кривая 1 на рисунке).

В целях решения проблемы малой суммарной мощности авторы предлагают алгоритм перестройки фазы. Суть метода в том, что при подключении нового элемента происходит измерение мощности генерации. Если суммарная мощность не увеличилась на величину порядка $P_{\text{полн}}/n^2$ раз, где n – количество подключенных элементов на данный момент, а $P_{\text{полн}}$ – это максимальная суммарная мощность цепочки, то подаётся импульс электрического тока на последний элемент. Длительность импульса можно приблизительно оценить из уравнений (2). Кривая 2 на рисунке демонстрирует эффективность алгоритма перестройки фазы относительно ординарного подключения наногенераторов.

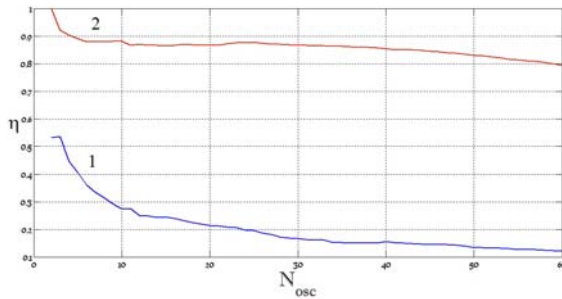


Рис. Зависимость параметра порядка от количества подключенных наногенераторов: 1 – без перестройки фазы, 2 – с использованием алгоритма перестройки фазы.

Таким образом, алгоритм перестройки фазы позволяет добиться значительного увеличения выходной мощности излучения цепочки наногенераторов. Например, для цепочки, состоящей из шестидесяти наногенераторов, выходная мощность при использовании алгоритма в среднем в восемь раз выше, чем без его использования.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 13-08-00844, № 13-02-00918, № 13-02-9708.

- [1] Алешин К.Н., Мишагин К.Г. В кн.: Тр. XVI-й научн. конф. к 100-летию со дня рождения А.Н. Бархатова. /Ред. С.М. Грач, А.В.Якимов. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2012. с.102

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ АКТИВНОСТЬ В НЕЙРОННОМ АНСАМБЛЕ С ВОЗБУЖДАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

А.Г. Коротков, Г.В. Осипов

Нижегородский государственный университет

В данной работе предложена новая модель ансамбля нейроноподобных элементов, для моделирования которой используется обобщённая модель Лотки-Вольтерра с возбуждающими связями. Работа мотивирована тем, что возбуждающие связи составляют преобладающий тип взаимодействия между нейронами головного мозга. В работе показано, что в таком ансамбле в зависимости от связей между элементами существуют два режима: режим с устойчивым гетероклиническим циклом и режим с устойчивым предельным циклом.

Рассмотрим сеть из N элементов типа Лотки-Вольтерра с возбуждающими связями. Каждый элемент задаётся уравнениями

$$\dot{\rho}_j = (I_j + J_j)\rho_j(-1 + I_j - \rho_j^2),$$

где: ρ_j – уровень спайковой активности j -го элемента; $I_j = \sum_{i=1}^N g_{ij}F(\rho_i)$ – входное

воздействие на j -й элемент; g_{ij} – элементы матрицы коэффициентов связей;

$J_j = \sum_{i=1}^N g_{ji}F(\rho_i)$ – дополнительный параметр, который равен 1 тогда и только

тогда, когда активен элемент, который будет активироваться после j -го элемента;

$F(\rho) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho \geq 0,999 \\ 0, & \text{если } \rho < 0,999 \end{cases}$ – функция Хевисайда с порогом $q = 0,999$. Условимся

считать элемент i активным, если $F(\rho_i) = 1$.

Матрица коэффициентов связей имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 2 \\ 2 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система из трёх элементов примет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = (F(\rho_2) + F(\rho_3))\rho_1(-1 + \varepsilon F(\rho_2) + 2F(\rho_3) - \rho_1^2) \\ \dot{\rho}_2 = (F(\rho_3) + F(\rho_1))\rho_2(-1 + \varepsilon F(\rho_3) + 2F(\rho_1) - \rho_2^2) \\ \dot{\rho}_3 = (F(\rho_1) + F(\rho_2))\rho_3(-1 + \varepsilon F(\rho_1) + 2F(\rho_2) - \rho_3^2) \end{cases}.$$

Сначала система исследовалась при $\varepsilon = 0$, что соответствует асимметричным связям между элементами.

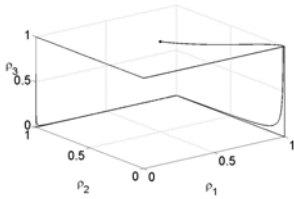


Рис. 1

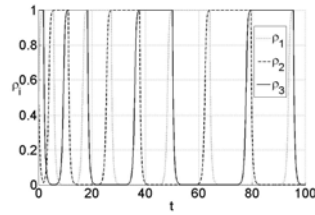


Рис. 2

В фазовом пространстве такой системы существует устойчивый гетероклинический цикл. На рис. 1 представлен фазовый портрет при начальных условиях (0,5, 0,5, 1). В точках (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1) располагаются седла. Изображающая точка поочерёдно заходит в окрестность каждого из них, причём с каждым следующим заходом она приближается.

На рис. 2 представлена соответствующая осциллограмма колебаний. Время активности каждого элемента увеличивается при каждой последующей активации.

Далее была рассмотрена система при $\varepsilon \neq 0$, т. е. с симметричными возбуждающими связями.

В работе показано, что в фазовом пространстве системы с симметричными связями присутствует устойчивый предельный цикл. На полученной с помощью численного расчёта осциллограмме колебаний видно, что время активности каждого элемента остаётся постоянным (рис. 3).

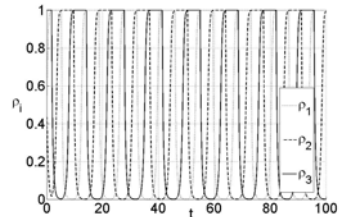


Рис. 3

ВЫЯВЛЕНИЕ СКРЫТЫХ СТРУКТУР АКТИВНОСТИ В СЕТЯХ НЕЙРОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

И.С. Прокин^{1,2)}, В.Б. Казанцев^{1,2)}

¹⁾Нижегородский госуниверситет

²⁾Институт прикладной физики РАН

Пластичность функций нейронных мозга при постоянстве морфологических связей между нейронами позволяет говорить о динамической селекции путей передачи сигналов активности [1]. В сетях нейронных осцилляторов, элементы которых хоть имеют непрерывную динамику, активность выражается в виде времен возникновения коротких импульсов возбуждения [2]. При этом такой импульсной активности можно поставить в соответствие мультиграф функциональных связей, описывающий направленную передачу импульсов [3]. В данной работе предлагается

метод выявления скрытых структур активности значимых для конкретного паттерна направленной импульсной передачи.

Введем $X_j(t)$ – бинарную функцию дискретного времени, описывающую импульсную активность j -го элемента сети. Определим оператор сходства для бинарных функций:

$$X(t_1) \& Y(t_2) = \max_{t \in [t_2 - \eta, t_2 + \eta]} \left(X(t_1) Y(t) \exp \left[- \left(\frac{t - t_2}{\eta/2} \right)^2 \right] \right), \quad (1)$$

где η – ширина окна поиска сходства. Через оператор сходства вводится мера сходства импульсов элементов сети i и j :

$$\sigma_{ij}(\tau) = \sqrt{\frac{1}{K_i^{[\tau+\eta, T]} K_j^{[0, T-\tau-\eta]}} \sum_{t=\tau+\eta}^T X_i(t) \& X_j(t-\tau) \sum_{t=0}^{T-\tau-\eta} X_j(t) \& X_i(t+\tau)}, \quad K_j^{[t_1, t_2]} = \sum_{t=t_1}^{t_2} X_j(t), \quad (2)$$

где τ – временная задержка между каналами, в пределах которой сравнивается активность.

Каждый пик функции $\sigma_{ij}(\tau)$ тестируется на статистическую значимость с помощью суррогатных данных. Суррогатные данные для каждой пары каналов получают сдвигом одноканальных реализаций друг относительно друга. Далее для каждого пика строится вероятностное распределение суррогатных мер сходства $W(\sigma)$. Пик считается значимым при выполнении условия

$$\sum_{\sigma \geq D \sigma_{peak}} W(\sigma) < \alpha, \quad 0 < D < 1, \quad (3)$$

где α – вероятность определить связь при ее отсутствии, D – фактор, определяющий строгость условия (3). В результате получаем набор значимых пиков $\{(\sigma_{ij})_x = \sigma_{ij}(\tau = (\tau_{ij})_x), k \in V_{ij}\}$ и соответствующих задержек $\{(\tau_{ij})_x, x \in V_{ij}\}$, где V_{ij} – множество индексов, нумерующих все значимые пики для пары (j, i) . Каждый значимый пик отождествляется с наличием связи $(j \rightarrow i)_x$, где $(\sigma_{ij})_x$ рассматривается как оценка вероятности передачи импульсов, а $(\tau_{ij})_x$ как оценка задержки передачи импульса по связи.

Работоспособность метода была подтверждена на данных с модельной сети нейронных осцилляторов с динамическими связями, а также на экспериментальных данных активности с нейрональных культур [3]. Имея экспериментальные данные активности и соответствующий мультиграф можно вычислить меру значимости каждого импульса P_{ik} :

$$P_{ijk} = \prod_{x \in I_{ij}} \left(1 - (\sigma_{ij})_x \max_{t \in [(\tau_{ij})_x - \eta, (\tau_{ij})_x + \eta]} [X_j(t_k^i - t)] \right), \quad P_{ik} = \prod_{j \in M_i} P_{ijk}, \quad (4)$$

где M_i – множество индексов нумерующих входные по отношению i -му элементы сети, P_{ik} – вероятность того что k -ый импульс элемента сети i не передан от других элементов, t_k^i – момент времени k -го импульса в i -ом канале. Импульсы с низким значением P_{ik} считаются значимыми (было использовано условие $P_{ik} < 0,5$).

На рисунке приведена импульсная активность нейрональной культуры в разные промежутки времени, где каждый импульс взвешен соответствующим значением P_{ik} . Установлено, что предложенный метод позволяет выявлять импульсы значи-

мые для направленной передачи сигналов (скрытые структуры активности). Кроме того, с помощью расчета распределения доли значимых импульсов по электродам и изменения среднего числа значимых импульсов внутри промежутка времени, показано, что статистические параметры значимых импульсов воспроизводятся во времени.

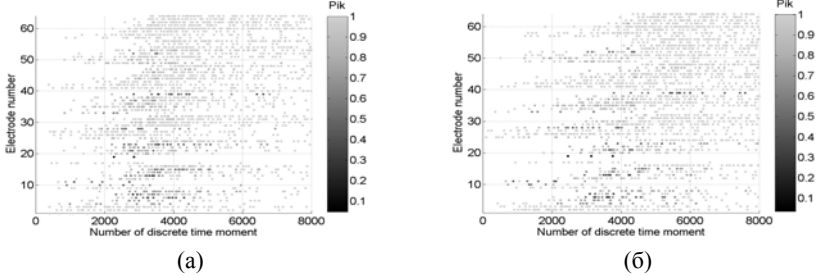


Рис.

Работа поддержана грантами ФЦП 11.519.11.1003, 8055, 14.B37.21.1073, 14.B37.21.0194, 14.B37.21.1203, 11.519.11.1003; РФФИ 13-02-01223 А.

- [1] Battaglia D., Witt A., Wolf F., Geisel T. // PLoS computational biology. 2012. V.8. No.3. P.e1002438.
- [2] Прокин И.С., Казанцев В.Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 2011. вып. 54, № 11. С.848.
- [3] Prokin I., Gladkov A., Mukhina I., Kazantsev V. // Proc. of the 8th Intern. Meeting on Substrate-Integrated Microelectrode Arrays. 2012. P.226.

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ НА СРЕДНЮЮ ЧАСТОТУ СПИНОВОГО НАНОГЕНЕРАТОРА

А.И. Павлин, А.В. Половинкин

Нижегородский госуниверситет

Вследствие наномасштабов, в которых реализуется спиновый генератор, на его динамику существенное влияние оказывает шум внешнего магнитного поля. Подробный анализ воздействия флуктуаций позволяет не только определить качественное поведение системы, но и дать рекомендации по минимизации шумовых факторов.

Объединяя подходы, развитые в работах [1] и [2], стохастическую динамику ориентации намагниченности свободного слоя спинного генератора в сферических координатах будем задавать системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta}{d\tau} = f(\vartheta, \varphi) = \alpha \sin \vartheta \left(\frac{\beta}{\alpha} - (h_z + k_{eff} \cos \vartheta) \right) - \sin \varphi H_{n1} + \cos \varphi H_{n2}; \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = g(\vartheta, \varphi) = h_z + k_{eff} \cos \vartheta - \operatorname{ctg} \vartheta \left(\cos \varphi H_{n1} - \sin \varphi H_{n2} \right) + H_{n3}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\tau = \gamma M_s t$, M_s – максимальная намагниченность свободного слоя, α – параметр затухания прецессии магнитного момента электрона во внешнем магнитном поле, β – параметр, характеризующий величину эффектов, связанных с переносом спина током, h_z – внешнее магнитное поле, k_{eff} – параметр, характеризующий поле анизотропии ферромагнетика, $H_{ni} = H_{ni}(t)$ – обезразмеренные белозумовые гауссовы флуктуации внешнего магнитного поля

$$\langle H_{ni}(\tau) H_{nj}(\tau + \Delta) \rangle = D_H \delta_{ij} \delta(\Delta).$$

где D_H – интенсивность шума внешнего магнитного поля, определяемая выражением [3]:

$$D_H = \frac{2\alpha k_B T}{\mu_0 M_s^2 V}.$$

Здесь k_B – постоянная Больцмана, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, T – абсолютная температура, V – объем свободного слоя.

Второе уравнение системы (1) позволяет найти выражение для средней частоты генератора:

$$\langle \omega \rangle = \langle \dot{\varphi} \rangle = h_z + k_{eff} \langle \cos \vartheta \rangle. \quad (2)$$

Используя систему (1) можно найти выражение для стационарной плотности вероятности переменной θ :

$$W_{st}(\vartheta) = C \exp \left\{ \frac{\alpha}{D_H |k_{eff}|} \left(\frac{\beta}{\alpha} - h_z + k_{eff} \cos \vartheta \right)^2 \right\} \sin \vartheta. \quad (3)$$

Определив с помощью выражения (3) среднее значение $\cos \theta$, найдём среднюю частоту генератора. Для различных значений интенсивности шума внешнего магнитного поля графики средней частоты представлены на рисунке, где приведены также значения средней частоты, полученные путём численного моделирования системы (1).

Как видно из рисунка, смещение частоты относительно значения без шума может быть весьма существенным и всегда возрастает при приближении к границе области генерации. В связи с этим можно дать следующие рекомендации.

1) Необходимо максимально уменьшить интенсивность шума посредством оптимизации размеров генератора или уменьшением температуры.

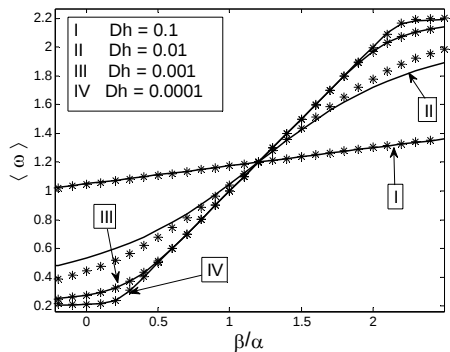


Рис.

2) При использовании прибора в качестве генератора с перестраиваемой частотой не приближаться к границам области генерации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №.11-02-01418-а)

- [1] Bonin R., Bertotti G., Serpico C., Mayergoyz I.D., d'Aquino M. // The Eur. Phys. J. B. 2009. V.68. P.221.
- [2] Brown W.F. //Phys. Rev. 1963. V.130, No.5. P.1677.
- [3] Bonin R., Bertotti G., Serpico C., Mayergoyz I.D., d'Aquino M. // J. Magn. Magn. Mater. 2007. V.316. P.e919.

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ АСТРОЦИТА

Н.В. Болдырева, В.В. Матросов

Нижегородский госуниверситет

Глиальные клетки, к которым относятся астроциты, составляют около половины объема мозга, а их количество значительно превышает количество нейронов. Они выполняют ряд важных функций по жизнеобеспечению нейронов и, кроме того, участвуют в процессах передачи и обработки информации за счет своей химической активности, связанной с изменением внутриклеточной концентрации кальция, регулируемой концентрацией ИТФ.

В докладе представлены результаты компьютерного бифуркационного анализа модифицированной модели астроцита, предложенной в [1]:

$$\dot{I} = \frac{\kappa_{\delta} O_{\delta}}{\kappa_{\delta} + I} \cdot H(C^2, K_{\delta}) - O_{3K} \cdot H(C^4, K_D) \cdot H(I, K_{3K}) - \Omega_{5P} I,$$

$$C = \rho_A (\Omega_N m_{\infty}^3 h^3 + \Omega_L) (C_0 - (1 - \rho_A) C) - O_P H(C^2, K_P),$$

$$\dot{h} = \Omega_h (h_{\infty} - h),$$

где I – концентрация инизотол-1,4,5-трифосфата (ИТФ), C – внутриклеточная концентрация кальция, h – доля инактивированных кальциевых каналов эндоплазматического ретикулума, $m_{\infty} = H(I, d_1) \cdot H(C, d_5)$, $h_{\infty} = Q_2 / (Q_2 + C)$, $\Omega_h = O_2 (Q_2 + C)$, $Q_2 = d_2 (I + d_1) / (I + d_3)$.

Разбиение плоскости параметров ($O_{3K}; O_{5P}$) на области с различным динамическим поведением приведено на рис. 1. Границами областей являются бифуркационные кривые аттракторов. В областях D_{1a} и D_{1b} система гло-

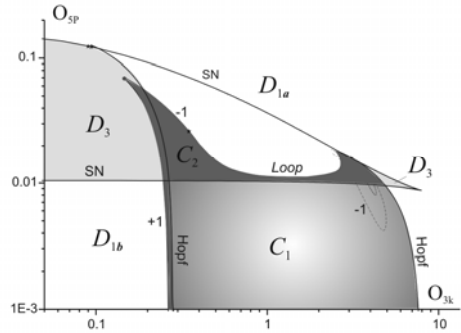


Рис. 1

бально устойчива. При значениях параметров из области D_3 в фазовом пространстве системы существует два устойчивых состояния равновесия, одно из которых соответствует стационарному режиму с высоким уровнем концентрации кальция, а другое – стационарному режиму с низким уровнем концентрации кальция. При

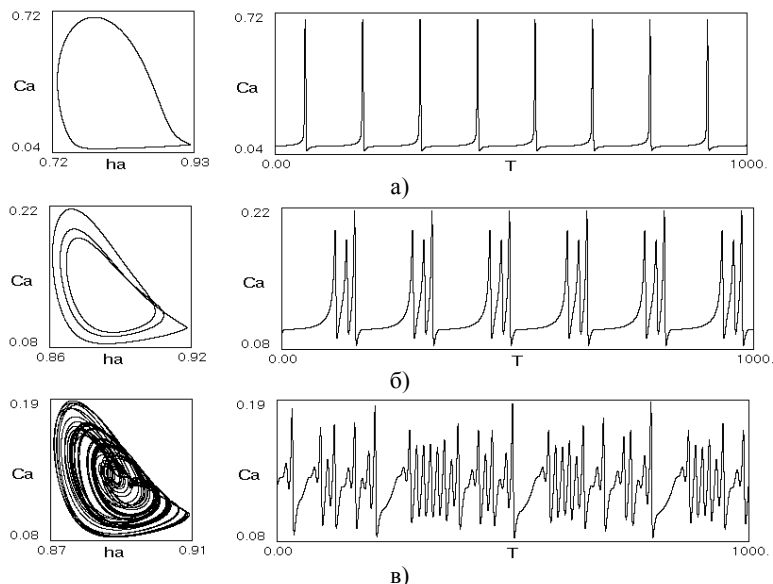


Рис. 2

вариациях параметров в системе наблюдается гистерезис. Другим примером бистабильности динамики системы и гистерезиса служит область параметров C_2 , где режим стационарной концентрации существует с автоколебательным режимом. В области параметров C_1 в системе устанавливаются автоколебания. Основными бифуркационными механизмами установления автоколебаний в данной системе являются бифуркации Андронова-Хопфа, двукратного предельного цикла, петли сепаратрис седла. В зависимости от значений параметров и по мере приближения к бифуркационным границам изменяется форма колебаний. В частности, при приближении к кривой бифуркации петля сепаратрис седла колебания принимают вид последовательности импульсов с увеличивающимся межимпульсным интервалом (рис. 2а). Обнаружены сложные колебания как регулярные (рис. 2б), так и хаотические (рис. 2в).

Работа выполнена при поддержке грантов ФЦП (проект №11.519.11.1003) и РФФИ (грант №13-02-01223 А).

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ ГИРОТРОНА

А.С. Иванов¹⁾, К.Г. Мишагин¹⁾, В.В. Матросов¹⁾, М.Ю. Глявин²⁾,
Г.Ю. Голубятников²⁾, А.Г. Лучинин²⁾, М.В. Морозкин²⁾

¹⁾Нижегородский госуниверситет

²⁾Институт прикладной физики РАН

В последнее время возобновился интерес к задаче стабилизации частоты излучения и управлению фазой гиротрона. Решение данной задачи позволит применить гиротроны для адаптивного подавления гидродинамических неустойчивостей в плазменных ловушках и реализации когерентного сложения мощностей нескольких гиротронов.

Стабилизацию частоты и управление фазой излучения предлагается организовать с помощью системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) ввиду надежности и предсказуемости такой системы [1]. В работе [2] была реализована система ФАПЧ для стабилизации частоты гиротрона с помощью изменения напряжения на одном из электродов магнетронно-инжекторной пушки. Недостатком метода является сложность и дороговизна высоковольтных источников с малым временем изменения напряжения. В настоящей работе рассматривается вариант использования в качестве управляющего элемента системы ФАПЧ дополнительного соленоида малой индуктивности, располагаемого в области резонатора. Использование соленоида вносит дополнительную инерционность в цепь обратной связи системы автоподстройки, что может привести к неустойчивости режима синхронизации. В данной работе проведена оценка порогового значения индуктивности соленоида, ниже которого система устойчива.

Для стабилизации частоты излучения гиротрона относительно внешнего мало-мощного генератора предполагается использование системы ФАПЧ, схема которой приведена на рисунке.



Рис. Схема системы ФАПЧ (слева) и схема фильтра нижних частот с управляющим элементом (справа).

В работе исследуется модель системы фазовой синхронизации частоты гиротрона. На основании стандартной модели для системы ФАПЧ получена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\dot{\varphi} = y, \dot{y} = z, \dot{z} = \frac{1}{b_1 b_2} [\gamma - F(\varphi) - (aF'(\varphi) + 1)y - (b_1 + b_2)z],$$

где γ – относительная частотная расстройка между опорным генератором и гиротроном, $F(\varphi)$ – характеристика фазового дискриминатора, a, b_1, b_2 – параметры цепи управления.

С помощью критерия Рауса-Гурвица исследована устойчивость системы. Была произведена оценка максимально допустимой индуктивности вспомогательного соленоида:

$$L < L^* = \frac{\left(1 + x \frac{R_c}{R_l}\right)}{x - 1} (R_1 + R_c) C \cdot R_l,$$

где $x = R_1 C S_F S E / N$. S_F, S – крутизна характеристики фазового дискриминатора и управляющего элемента соответственно, E – максимальное напряжение на выходе фазового дискриминатора, N – коэффициент деления, L, C, R_1, R_c, R_l – параметры элементов цепи обратной связи системы автоподстройки (см. рис.). Качественный анализ оценки показывает, что инерционность (L/R_l) , вносимая соленоидом в цепь управления, должна быть приблизительно на порядок меньше инерционности фильтра нижних частот.

Полученную оценку планируется использовать при проведении будущего эксперимента.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-08-00844.

- [1] Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. – М.: Связь, 1972, 446 с.
- [2] Голубятников Г.Ю., Крупнов А.Ф., Лубяко Л.В., Лучинин А.Г., Павельев А.Б., Петелин М.И., Fernandez C.A. // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 15. С.13.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНАЯ АКТИВНОСТЬ В АНСАМБЛЯХ СИСТЕМ ПУАНКАРЕ

А.О. Михайлов, М.А. Комаров, Т.А. Леванова, Г.В. Осипов

Нижегородский госуниверситет

Многие динамические процессы в нейронных ансамблях представляют собой последовательные переключения активности между отдельными элементами и/или группами элементов. Такая последовательная нейронная активность может быть связана со многими физиологическими функциями нервной системы [1]. Генерация и распространение возбуждения между отдельными элементами, а также между группами нейронов играют важнейшую роль в функционировании мозга и нервной системы в целом. Например, известно, что подобный тип активности является неотъемлемым свойством нейронных сетей в сенсорных и двигательных системах животных [2]. К примеру, определённый отдел мозга птиц генерирует последова-

тельности пачечной активности, которые, в свою очередь, управляют голосовым аппаратом и обеспечивают воспроизведение песни [3]. Другие примеры, в которых последовательная активность играет ключевую роль в работе нейронной сети, можно найти в [4, 5].

С точки зрения нелинейной динамики причиной последовательной активности в нейронных сетях может быть существование устойчивого гетероклинического контура в фазовом пространстве динамической системы, моделирующей активность нейронной сети [6]. В основе генерации последовательных переключений активности лежит принцип беспобедительной конкуренции [7]. Суть этого принципа заключается в последовательном прохождении изображающей точки в окрестности определённой седловой траектории [8, 9], что означает активацию определённого нейрона или группы нейронов. Таким образом, устойчивый гетероклинический контур в фазовом пространстве является математическим образом последовательных переключений активности в ансамблях связанных нейронов.

Мы исследуем вопрос о существовании устойчивого гетероклинического контура между седловыми предельными циклами в ансамбле связанных систем Пуанкаре.

Рассмотрим следующую модель тормозно связанных систем Пуанкаре:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -y_i + x_i[A(s_i) - (x_i^2 + y_i^2)], \\ \dot{y}_i = x_i + y_i[A(s_i) - (x_i^2 + y_i^2)], \\ \dot{s}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij} F(\rho_j^2) - s_i, \\ 1 \leq i \leq N, \end{cases}$$

где

$$\rho_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, 1 \leq i \leq N; \tau \gg 1; A(s_i) = 1 - s_i^2, 1 \leq i \leq N;$$

$$F(\rho_i^2) = \frac{1}{1 + \exp\left\{\frac{x_0 - \rho_i^2}{k}\right\}} - \frac{1}{1 + \exp\left\{\frac{x_0}{k}\right\}}, 1 \leq i \leq N.$$

Физический смысл переменных, входящих в данную систему, можно интерпретировать следующим образом: x_i – мембранный потенциал i -ой клетки, y_i – активационная переменная, отвечающая за совокупность ионных токов, s_i – переменная, отвечающая за ингибиторные связи i -го элемента, τ – параметр скорости связи, g_{ij} – параметр, отражающий силу влияния ингибиторной связи j -ой клетки на i -ю, N – число элементов в сети, F – активационная функция клетки, x_0 и k – параметры активационной функции.

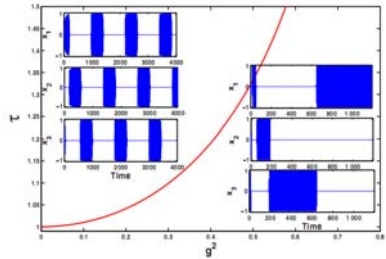


Рис. Граница существования гетероклинического контура и предельного цикла при определенных значениях параметров системы.

Проведя аналитическое исследование на примере сети из трех элементов, мы показали, что при определенных значениях параметров системы существует устойчивый гетероклинический контур и устойчивый предельный цикл, а также выявили границы их существования (см. рис.).

- [1] Komarov M.A., Osipov G.V., Suykens J.A.K., Rabinovich M.I. // Chaos. 2009. V.19. P.015107.
- [2] Rabinovich M.I., Varona P., Selverston A.I., Abarbanel H.D.I. // Rev. Mod. Phys. 2006. V.78. P.1213.
- [3] Hahnloser R.H.R., Kozhevnikov A.A., Fee M.S. // Nature. 2002. V.419. P.65.
- [4] Galan R., Sasche S., Galicia C.G., Herz A.V. // Neural. Comput. 2004. V.16. P.999.
- [5] Levi R., Varona P., Arshavsky Y. I., Rabinovich M.I., Selverstone A.I. // J. Neurophysiol. 2004. V.91. P.336.
- [6] Ashwin P., Burylko O., Maistrenko Y. // Physica D. 2008. V.237. P.454.
- [7] Seliger P., Tsimring L. S., Rabinovich M. I. // Phys. Rev. E. 2003. V.67. P.011905.
- [8] Afraimovich V. S., Rabinovich M. I., Varona P. // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2004. V.14, P.1195.
- [9] Afraimovich V.S., Zhigulin V.P., Rabinovich M.I. // Chaos. 2004. V.14. P.1123.

СИНХРОНИЗАЦИЯ БИЕНИЙ В СВЯЗАННЫХ ФАЗОУПРАВЛЯЕМЫХ ГЕНЕРАТОРАХ

В.В. Матросов, М.А. Мищенко, В.Д. Шалфеев

Нижегородский госуниверситет

Системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) широко применяются в различных областях техники для решения задач синхронизации, стабилизации частоты и фазы, синтеза частот и др. [1]. Основным режимом работы, который используется в таких задачах, является режим синхронизации между опорным и подстраиваемым генератором. Однако при увеличении частотной расстройки в системе возникают биения. В последнее время интерес исследователей обращен на возможность использования систем ФАП в режиме биений в качестве генераторов сложных автомодуляционных колебаний [2].

В работах [3, 4] рассматривалось использование системы ФАП с фильтрами верхних и нижних частот в цепи управления в качестве модели нейроноподобного элемента. Рассмотрим возможность синхронизации колебаний таких генераторов.

В схеме системы ФАП содержится фазовый дискриминатор, на вход которого поступают сигналы от опорного и подстраиваемого генераторов, а на выходе вырабатывается сигнал, содержащий информацию о разности фаз. Используем подобный принцип для связывания двух описанных выше элементов. Используем для этого частотный дискриминатор с характеристикой $\Phi(x) = 2\alpha x / (1 + (\alpha x)^2)$, где α – параметр нелинейности частотного дискриминатора. Тогда система уравнений для двух связанных систем ФАП запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, \quad \frac{dy_1}{d\tau} = z_1, \\
\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12})z_1 - (1 + \varepsilon_{11} \cos \varphi_1)y_1, \\
\frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, \quad \frac{dy_2}{d\tau} = z_2, \\
\varepsilon_{21}\varepsilon_{22} \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})z_2 - (1 + \varepsilon_{21} \cos \varphi_2)y_2 - \delta_y \Phi(y_2 - y_1),
\end{aligned} \tag{1}$$

где ε – параметры инерционности фильтров в цепях управления ФАП, γ – начальные частотные расстройки между опорным и подстраиваемыми генераторами, δ_y – сила связи через частотный дискриминатор.

Определим области синхронизации для режима регулярных биений, описанного в [4]. Зафиксируем следующие параметры системы (1): $\gamma_1=0,2$, $\varepsilon_{11}=2$, $\varepsilon_{21}=2,1$, $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{22}=10$ и будем искать значения γ_2 в зависимости от δ_y , при которых наблюдается синхронизация между двумя генераторами, при нескольких значениях параметра нелинейности α . На рис. 1 различными оттенками выделены области синхронизации для различных значений параметра α (белым – для $\alpha=5$ и т.д.).

Как видно из рис. 1, при увеличении значения параметра α размер области синхронизации увеличивается, но при больших значениях на границах области образуются изгибы, порождая области бистабильности. Кроме того, при больших α внутри области синхронизации могут наблюдаться области асинхронного поведения (пунктирные линии на рис. 1).

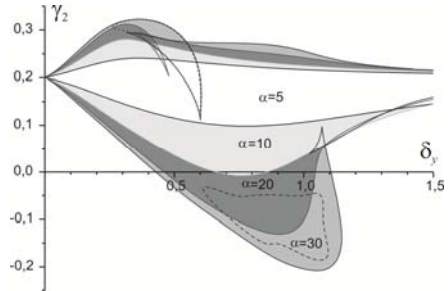


Рис. 1

Исследование синхронизации

предложенных фазоуправляемых генераторов представляет интерес и в контексте использования данных элементов для моделирования нейрноподобной динамики и связанных с этим феноменов. Например, феномена фокуса внимания. В работе [5] рассматривалась синхронизация фазовых осцилляторов центральным элементом, и приводилось обоснование использования такой схемы для моделирования фокуса внимания. Ключевым фактом являлось наличие распределенной во времени синхронизации различных групп нейронов. На рис. 2 приведен пример, иллюстрирующий

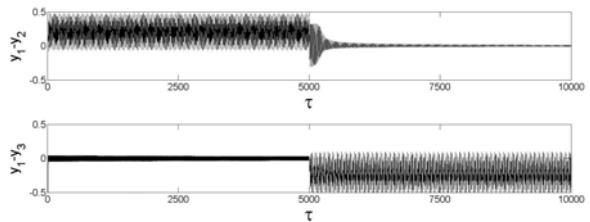


Рис. 2

возможность подобного явления в системе (1) при изменении частоты центрального осциллятора: на первом интервале времени синхронны центральный (под индексом 1) и один из периферийных осцилляторов, а на втором интервале времени – центральный и другой из периферийных, что показывают близкие к нулю значения разностных координат на рис. 2.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракт №14.В37.21.1073) и ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России» на 2007–2013 годы (контракт №11.519.11.1003).

- [1] Системы фазовой синхронизации. /Под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. – М.: Радио и связь, 1982, 288 с.
- [2] Матросов В.В., Шалфеев В.Д. Динамический хаос в фазовых системах. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2009, 271 с.
- [3] Мищенко М. А. //Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т.5, №3. С.279.
- [4] Мищенко, М. А., Шалфеев, В. Д., Матросов, В. В. //Изв. вузов. ПНД. 2012. Т.20, №4. С.122.
- [5] Borisjuk R. M., Kazanovich Y. B. //Biosystems. 2003. V.71, I.1-2. P.29.

СИНХРОНИЗАЦИЯ В АНСАМБЛЕ ИМПУЛЬСНО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ТИПА НАКОПЛЕНИЕ-СБРОС

М.И. Болотов, Г.В. Осипов

Нижегородский госуниверситет

Синхронизация является центральным механизмом для нейронно-информационных процессов, которые осуществляют связь между различными областями мозга. Одним из наиболее общих динамических явлений, наблюдающихся в мозге млекопитающих являются когерентное поведение отдельных связанных популяций нейронов. Многие модели импульсно связанных ансамблей имеют участки в пространстве параметров, в котором ансамбль эволюционирует ни к асинхронному, ни к полностью синхронному состоянию. Эти частично синхронные состояния могут быть следствием внешнего воздействия на ансамбль, тем не менее, многие ансамбли нелинейных осцилляторов могут эволюционировать к частично синхронному состоянию даже в отсутствии внешнего воздействия. В данной работе рассматривается модель ансамбля, эволюционирующего к частично синхронному состоянию при определенных значениях параметров.

Ансамбль состоит из N идентичных осцилляторов, каждый из которых связан со всеми другими осцилляторами. Состояние i -го осциллятора задается переменной x_i , которая принимает свои значения из отрезка $[0;1]$. Эволюция x_i задается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_i = a - x_i + gE(t), \quad (1)$$

где $a > 0$ – параметр, определяющий поведение элемента ансамбля при отсутствии связи, $g > 0$ – параметр, характеризующий прочность связи между осцилляторами, $E(t)$ – динамическая переменная, задающая состояние поля ансамбля [1].

Уравнение (1) определяет поведение на отрезке $[0;1]$. Как только x_i достигает значения $x_i = 1$ с соответствующего осциллятора производится импульс. При импульсе значение x_i немедленно сбрасывается к нулю и происходит изменение закона, задающего переменную поля $E(t)$.

Эволюция поле ансамбля задается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 E(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dE(t)}{dt} + \alpha^2 E(t) = \frac{\alpha^2}{N} \sum_{t|t_n < t} \delta(t - t_n), \quad (2)$$

где $\alpha > 0$ – положительный параметр, характеризующий затухание в уравнении (2), t_n – момент времени поступления n -го импульса [2].

При фиксированных значениях $a = a_0$, $g = g_0$, $N = N_0$, в качестве основного контролируемого параметра рассматривается α , выбор вместо него параметра g был бы эквивалентным вариантом. В зависимости от того меньше или больше α критического значения α_c элементы ансамбля демонстрируют асинхронное поведение, когда поле $E(t) = E_0 = const$, либо частично синхронное, когда поле развивается периодически или квазипериодически.

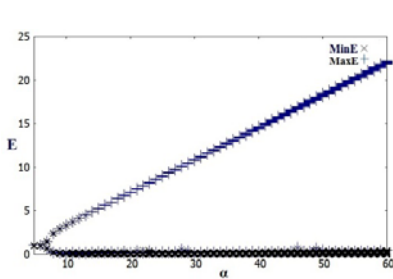


Рис. 1

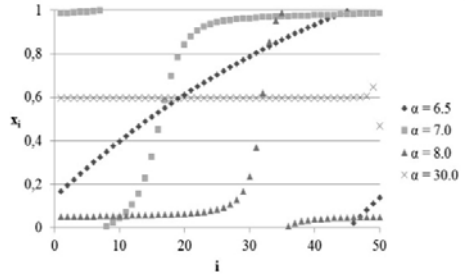


Рис. 2

На рис. 1 отображены значения локальных минимумов и максимумов $E(t)$ при различных значениях α для $a = 1,3$, $g = 0,4$ и $N = 50$. Для данных значений параметров $6.75 < \alpha_c < 7$. При $\alpha < \alpha_c$ элементы ансамбля эволюционируют асинхронно. При $\alpha > \alpha_c$ элементы ансамбля постепенно переходят к состоянию устойчивой частичной синхронизации при увеличении значения параметра α . На рис. 2 отображены координаты элементов ансамбля при различных значениях параметра α .

[1] Van Vreeswijk C. // Physical Review E, 1996, V.54, No.5. P.5522.

[2] Olmi S., Livi R., Politi A., Torcini A. // Physical Review E. 2010. V.81. P.046119.

ДИНАМИКА ЦЕНТРАЛЬНОГО ГЕНЕРАТОРА РИТМА

Р.С. Нагорнов¹⁾, М.А. Комаров²⁾, Г.В. Осипов¹⁾, А.С. Пиковский²⁾, А.Л. Шильников³⁾

¹⁾Нижегородский госуниверситет

²⁾Потсдамский университет, Германия

³⁾Университет штата Джорджия, США

Управление ритмической деятельностью (плаванием, ходьбой, бегом и т.д.) осуществляется без участия сознания. Занимаются этим так называемые малые нервные системы – центральные генераторы ритма (CPGs – Central Pattern Generators). Такие генераторы состоят всего лишь из пяти-шести или нескольких десятков нервных клеток – нейронов, взаимодействующих друг с другом через специальные каналы связи – синапсы. Известно, что важную роль в CPG играет посттормозная активность нейрона. Цель данной работы – показать биологическую основу функционирования CPG на примере халф-центра – центрального генератора ритма состоящего из двух нейронов с посттормозной активностью, связанных быстрой ингибиторной связью. Данное упрощение справедливо, т.к. CPG можно рассматривать как группу связанных халф-центров.

В качестве модели нейрона с посттормозной активностью рассматривается стандартная модель Ходжкина-Хаксли с дополнительными токами. Константы в данной модели получены в результате экспериментов с ретикулярной клеткой таламуса. Динамика халф-центра в общем виде будет описываться системой:

$$C_m \dot{V}_i = -I_{ext(i)} - I_{T(i)} - F_i(V_i, H_i) - \sum_j I_{syn}(V_i, V_j)$$

$$\dot{H}_i = Q_i(V_i, H_i, I_{T(i)})$$

$$I_{syn}(V_i, V_j) = G \cdot S(V_j - \theta_{syn}) \cdot (V_i - E_{syn})$$

$$H_i = (m_i, n_i, h_i, m_{T(i)}, h_{T(i)}, m_{K[Ca]}, [Ca]_{int(i)})^T$$

$$I_{T(i)} = g_{Ca} \cdot m_{T(i)}^2 \cdot h_{T(i)} \cdot (V - E_{Ca})$$

где i – номер нейрона ($i = 1, 2$), I_{ext} – параметр внешнего тока, I_T – медленный низкопороговый Ca^{2+} тока, I_{syn} – быстрый синаптический ток от j -ого нейрона к i -ому, Q_i – вектор-функция, G – параметр максимальной проводимости синаптического тока (параметр связи), g_{Ca} – максимальная проводимость медленного низкопорогового Ca^{2+} тока (подробнее см. в [1]).

В результате исследования динамики изолированного нейрона с посттормозной активностью в зависимости от внешнего тока I_{ext} было показано, что нейрон может находиться в одном из трех режимов: регулярной генерации спайков, возбуждимом состоянии или пачечной активности. При этом стоит заметить, что низкопороговый Ca^{2+} ток I_T не влияет на внутреннюю динамику нейрона.

Было показано существование противофазного пачечного ритма в халф-центре при любом виде собственной динамики нейрона. В случае регулярной генерации спайков быстрая ингибиторная связь заставляет спайки выстраиваться в противофазе. При увеличении параметра связи G спайки группируются в пачки. В случае

возбужденного состояния в зависимости от начальных условий сосуществуют два устойчивых режима: система приходит в состояние равновесия или в противофазный пачечный ритм, причем в этом случае число спайков в каждой пачке меняется хаотически.

Был рассмотрен случай противофазной пачечной синхронизации при индивидуальном пачечном режиме и показана его связь с посттормозной активностью нейронов. Размер области противофазной синхронизации на плоскости параметров внешнего тока I_{ext} и параметра связи G уменьшается с уменьшением параметра проводимости g_{Ca} медленного низкопорогового Ca^{2+} тока. Параметр проводимости g_{Ca} определяет роль тока I_T в динамике системы.

При введении достаточно большой расстройки между параметрами внешнего тока $\Delta I_{ext} = I_{ext1} - I_{ext2}$ было показано существование в системе режима частичной синхронизации [2]. Когда имеет место фазовая синхронизация медленных переменных, периоды медленных переменных совпадают, и их фазы подстраиваются. Число же спайков в пачках различно и может меняться либо периодически, либо хаотически.

Можно акцентировать внимание на том, что в случае собственной пачечной динамики изолированного нейрона введение быстрой ингибиторной связи привело к бистабильности [3]. Помимо противофазного режима в системе были обнаружены устойчивые режимы синфазной пачечной и хаотической синхронизации.

- [1] Destexhe A., Contreras D., Sejnowski T.J., Steriade M. // J. of Neurophysiology. 1994. V.72. P.803.
- [2] Omelchenko I., Rosenblum M., Pikovsky A. // Eur. Phys. J. Special Topics. 2010. V.191. P.3.
- [3] Jalil S., Belykh I., Shilnikov A. // Physical Review. 2010. V.81. P.045201.

МЕТОД НОРМАЛЬНЫХ МОД ДЛЯ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ РЕШЁТОЧНЫХ СИСТЕМ

О.И. Канаков, А.А. Тихомиров

Нижегородский госуниверситет

Нормальными переменными, или модами, называют невзаимодействующие колебательные степени свободы, которые всегда можно надлежащей заменой переменных ввести для консервативных линейных колебательных систем. Нелинейность приводит к появлению взаимодействия между модами. В данной работе исследуется вопрос о применимости модового представления для диссипативных (в том числе, автоколебательных) систем, допускающих формальное гамильтоновское описание.

Рассмотрим сначала классическую задачу о модовом представлении гамильтоновских систем с действительными переменными. Выделим из функции Гамильтона квадратичную часть, которая соответствует линейной части уравнений движения:

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j + H_{nlin}, \quad \ddot{x}_i = - \sum_j k_{ij} x_j + nlin,$$

где x_i, p_i – канонические переменные, H_{nlin} и $nlin$ – остаточные члены после выделения квадратичной (линейной) части в функции Гамильтона (уравнениях движения). Без ограничения общности матрицу $\mathbf{K}=(k_{ij})$ можно считать симметричной: $\mathbf{K}^T=\mathbf{K}$, где символ « T » означает транспонирование. Как известно, симметричная матрица всегда может быть диагонализирована ортогональным преобразованием $\mathbf{K}=\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^T$, где $\mathbf{D}$ – диагональная матрица, а $\mathbf{S}$ – ортогональная матрица: $\mathbf{S}^T=\mathbf{S}^{-1}$. Тогда линейным точечным преобразованием $\mathbf{x}=\mathbf{S}\mathbf{y}$, где $\mathbf{x}=(x_i)$ и $\mathbf{y}=(y_i)$ – векторы, функция Гамильтона и уравнения движения приводятся к искомому модовому представлению:

$$H = \sum_k \left(\frac{p_k^2}{2} + \frac{\omega_k^2 y_k^2}{2} \right) + H_{nlin}, \quad \ddot{y}_k + \omega_k^2 y_k = nlin.$$

В силу ортогональности матрицы $\mathbf{S}$, в исходных переменных моды образуют ортонормированный базис.

Гамильтоновская система может быть записана также в комплексных переменных, где в качестве канонически сопряженных выступают переменные z_i и iz_i^* :

$$H = \sum_{ij} b_{ij} z_i z_j^* + H_{nlin}, \quad i\dot{z}_i = \sum_j b_{ij} z_j + nlin. \quad (1)$$

В этом случае матрица $\mathbf{B}=(b_{ij})$ – эрмитова: $\mathbf{B}^H=\mathbf{B}$, где « H » – эрмитово сопряжение. Такая матрица может быть диагонализирована унитарным преобразованием $\mathbf{B}=\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^H$, где $\mathbf{D}$ – диагональная матрица, а $\mathbf{U}$ – унитарная матрица: $\mathbf{U}^H=\mathbf{U}^{-1}$. Тогда линейным преобразованием $\mathbf{z}=\mathbf{U}\mathbf{a}$, где $\mathbf{z}=(z_i)$ и $\mathbf{a}=(a_i)$ – векторы, функция Гамильтона и уравнения движения приводятся к модовому представлению:

$$H = \sum_k \omega_k a_k^* a_k + H_{nlin}, \quad i\dot{a}_k = \omega_k a_k + nlin.$$

Отметим, что необходимым и достаточным условием каноничности сделанного линейного преобразования является именно унитарность матрицы $\mathbf{U}$. Моды в этом случае образуют унитарный базис.

Заметим теперь, что неконсервативные системы могут допускать формальное гамильтоновское описание, но с комплекснозначной функцией Гамильтона. Типичный пример – автоколебательное комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау, которое может быть получено из гамильтоновского нелинейного уравнения Шрёдингера формальной заменой действительных параметров комплексными – как в функции Гамильтона, так и в уравнениях движения. Отличие этого случая от истинно гамильтоновского состоит в том, что соответствующая матрица $\mathbf{B}=(b_{ij})$ в уравнениях (1) теперь не эрмитова. Это означает, что диагонализуемость унитарным преобразованием, вообще говоря, теперь не гарантируется. Однако такая возможность и не исключается. Так, пространственно-однородные (инвариантные относительно

сдвига на постоянную решетку) решеточные системы с периодическими граничными условиями [1], в силу указанной инвариантности и безотносительно эрмитовости матрицы $\mathbf{B}$, всегда могут быть диагонализированы дискретным преобразованием Фурье, которое для одномерной решетки имеет вид $z_n = N^{-1/2} \sum e^{ink} a_k$, где N – количество элементов в цепочке, и является унитарным. В этих случаях остаются справедливыми все выводы, сделанные выше для гамильтоновских систем с комплексными переменными, в частности, переход к модовому представлению является каноническим преобразованием и может быть сделан как в уравнениях движения, так и в функции Гамильтона, а моды образуют унитарный базис.

Вместе с тем, возможны случаи, когда матрица $\mathbf{B}$ для диссипативной системы диагонализуется, но не унитарным преобразованием. В качестве типичного примера можно привести двухатомную (пространственно неоднородную) цепочку Гинзбурга-Ландау [1]. Тогда уравнения движения всё еще могут быть приведены соответствующей заменой к некоторому «модовому представлению» (без взаимодействия в линейной части), однако аналогичная замена в комплекснозначной функции Гамильтона уже не приводит к правильным уравнениям движения, а модовые уравнения, вообще говоря, не являются гамильтоновскими даже в обсуждавшемся выше формальном смысле. Моды в этом случае уже не образуют в исходных переменных унитарного базиса. В частности, они, вообще говоря, не ортогональны в смысле эрмитова скалярного произведения.

Приведенные соображения могут быть использованы для построения модовых представлений в различных неконсервативных задачах, включая проблемы синхронизации в автоколебательных ансамблях, когерентной генерации в «случайных лазерах» и экситонно-поляритонных конденсатах в ансамблях квантовых точек.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-4028.2012.2 и Фонда некоммерческих программ «Династия».

[1] Тихомиров А.А., Канаков О.И. //в настоящем сборнике.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЛНОВЫХ МОД В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕШЁТОЧНОЙ МОДЕЛИ

А.А. Тихомиров, О.И. Канаков

Нижегородский госуниверситет

Недавно открыто явление конденсации экситонных поляритонов в квантовых точках, образованных полупроводниковыми микрополостями, ограниченными брэгговскими зеркалами. Такие системы представляют фундаментальный интерес в качестве новой экспериментальной реализации бозе-эйнштейновского конденсата. Возможно классическое описание этих систем в форме дискретного уравнения Гинзбурга-Ландау [1]. В пространственно однородном одномерном случае модель записывается в виде

$$\dot{z}_n = - \left[g + (\beta + i\alpha) |z_n|^2 \right] \frac{z_n}{2} - (\gamma - iJ) \frac{z_{n-1} + z_{n+1}}{2}, \quad (1)$$

где z_n – комплексная (классическая) переменная состояния n -го осциллятора, параметры – положительные действительные числа, имеющие следующий физический смысл: g – накачка, β – нелинейная диссипация, α – нелинейный сдвиг частоты, γ и J – радиационная (диссипативная) и джозефсоновская (консервативная) составляющие межэлементной связи [1].

В работе [1] проанализирован лишь случай двух взаимодействующих узлов. Вообще, решёточные модели типа Гинзбурга-Ландау исследовались в литературе, в частности, проведен анализ устойчивости гармонических волновых решений [2]. Цель данной работы – применить аппарат теории слабо-нелинейного взаимодействия мод к диссипативным (автоколебательным) решеточным системам сначала на примере пространственно однородной модели (1), затем в рамках модового описания провести анализ устойчивости волн для двухатомной цепочки.

Рассматривая периодические граничные условия, перейдем к комплексным нормальным переменным a_k с помощью дискретного преобразования Фурье

$z_n = N^{-1/2} \sum e^{ink} a_k$. Уравнение в этих переменных записывается в виде

$$\dot{a}_k = - \left[\frac{g}{2} + (\gamma - iJ) \cos k \right] a_k - \frac{\beta + i\alpha}{2N} \sum_{k_1 k_2 k_3} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}^* \delta_{2\pi}(k_1 + k_2 - k_3 - k). \quad (2)$$

Здесь N – число узлов в цепочке. Данное уравнение имеет одномодовое решение. Периодическому во времени одномодовому решению соответствует в исходных переменных гармоническая бегущая волна определенной амплитуды. Исследуя устойчивость волны с волновым числом k_0 по отношению только к малым одномодовым возмущениям, получим необходимое условие устойчивости решения:

$$\frac{g}{2} + \gamma + 2\gamma \cos k_0 < 0.$$

Исследуем устойчивость волны по отношению к произвольным малым возмущениям. Линеаризуя уравнения (2) в окрестности одномодового решения, получим семейство замкнутых систем уравнений для пар мод с волновыми числами, симметричными относительно волнового числа исходной волны. Из этих уравнений получаются выражения для инкрементов соответствующих пар мод, согласующиеся с результатом [2].

Рассмотрим теперь пространственно неоднородную «двухатомную» цепочку:

$$\dot{z}_n = - \left[g - i\Delta(-1)^n + (\beta + i\alpha) |z_n|^2 \right] \frac{z_n}{2} - (\gamma - iJ) \frac{z_{n-1} + z_{n+1}}{2}. \quad (3)$$

Перейдем к комплексным нормальным переменным a_k^+ и a_k^- при помощи преобразования

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \left[\begin{pmatrix} \xi_k^+ \\ \eta_k^+ \end{pmatrix} a_k^+ + \begin{pmatrix} \xi_k^- \\ \eta_k^- \end{pmatrix} a_k^- \right] e^{ikn},$$

где $x_n = z_{2m}$, $y_n = z_{2m+1}$; $\xi_k^\pm$, $\eta_k^\pm$ выражаются из параметров системы и волнового числа k и удовлетворяют соотношению: $|\xi_k^\pm|^2 + |\eta_k^\pm|^2 = 1$; N – число элементарных ячеек (пар узлов) в цепочке. Было получено уравнение для комплексных нормальных переменных, имеющее семейство двухмодовых инвариантных многообразий, где все моды, кроме двух, соответствующих любому одному волновому числу, равны нулю. Периодическое во времени двухмодовое решение отвечает в исходных переменных гармонической бегущей волне, которая была исследована на устойчивость. Устойчивость исследовалась по отдельности по отношению к возмущениям внутри инвариантного многообразия и возмущениям, выводящим за пределы многообразия. Линеаризация уравнений в нормальных переменных приводит к семейству замкнутых систем для четверок мод $a_k^\pm$, $a_{k'}^\pm$ ($k=k_0+c$, $k'=k_0-c$, k_0 – волновое число исходной волны). Возможны ситуации, при которых исходная волна устойчива, либо при устойчивости внутри двухмодового многообразия имеет место неустойчивость, выводящая за пределы многообразия (с нарастанием всех или части мод с другими волновыми числами). Возможна также неустойчивость внутри многообразия. Аналитические предсказания подтверждаются численным моделированием.

Было также проведено численное моделирование динамики системы из начальных условий, соответствующим малым случайным отклонениям от нулевого состояния равновесия или от неустойчивой волны. Для значений γ меньше или порядка 2 и J больше или порядка 1 выявлена следующая закономерность. Если в пространственно однородной цепочке волна с волновым числом π (либо в «двухатомной» цепочке – с волновым числом 0) линейно устойчива, то система выходит на аттрактор, соответствующий этой устойчивой волне, либо волне с близким волновым числом. Если эта волна неустойчива, то чем более узкий интервал мод в ее окрестности соответствует неустойчивым направлениям (имеет положительный инкремент), тем лучше локализуется по энергии в окрестности указанного волнового числа устанавливающееся решение.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МК-4028.2012.2 и Фонда некоммерческих программ «Династия».

[1] Aleiner I.L., Altshuler B.L., Rubo Y.G. //Phys. Review B. 2012. V.85. P.121301.

[2] Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. //ЖЭТФ. Т.89, вып.1. С.92.

ВЛИЯНИЕ ШУМА НА ПОВТОРЯЕМОСТЬ ПАТТЕРНОВ АКТИВАЦИИ В НЕЙРОННОЙ СЕТИ С СИНАПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИЧНОСТЬЮ

И.А. Кастальский¹⁾, С.А. Лобов¹⁾, В.Б. Казанцев^{1,2)}

¹⁾Нижегородский госуниверситет

²⁾Институт прикладной физики РАН

Изучение сигнальных процессов в нейронных сетях мозга является актуальной задачей современной науки. Одна из таких задач – исследование электрической активности живых тканей *in vitro* находится на стыке нейробиологии, радиофизики, кибернетики и других областей науки.

Целью данной работы является изучение сетевых механизмов генерации и распространения паттернов активности в нейронных сетях, а также факторов, влияющих на эти процессы. Изучение аспектов устойчивости межклеточной сигнализации и свойств элементов – распределителей активности (хабов), может стать ключом к пониманию принципов организации сетей и синаптической пластичности.

В работе проводилось исследование паттернов импульсной активности математической модели двумерной нейронной сети из 500 клеток. Нейроны располагались случайным образом внутри квадратной области, соотношение возбуждающих и тормозных элементов 80% на 20% соответственно, вероятность наличия синаптической связи обратно пропорциональна расстоянию между нейронами. Динамика мембранного потенциала каждого элемента описывалась пороговой моделью Ижикевича [1], синаптические контакты моделировались с кратковременной (частотно-зависимая депрессия, модель Цодыкса-Марккрама [2]) и долговременной пластичностью в виде правила STDP (Spike-timing-dependent plasticity) [3]. Такое правило изменяет силы связей в зависимости от времени импульсов на пре- и постсинапсах так, что изначально заданное гауссово распределение весов в процессе спонтанной сетевой сигнализации преобразуется в асимметричное, соответствующее состоянию гомеостатического равновесия.

Было доказано, что характер электрической активности модели нейросети подобно культурам клеток гиппокампа *in vitro*, выращенных на мультиэлектродных матрицах, представляет собой последовательность популяционных пачечных разрядов (пачек). Примечательно, что в записи наблюдаются похожие по форме разряды, и наиболее выражено это в рисунке фронта распространения сигнала, который, как считается, соответствует оригинальной архитектуре нейронной сети [4].

Теоретически в нейронной сети существует неограниченное число путей передачи возбуждения из одной области сети в другую через синаптические контакты. Было предположено, что за характер распространения сигнала отвечают ключевые элементы сети – хабы, а остальные нейроны участвуют в этом лишь косвенно. Нейрон классифицировался как хаб в случае, если при

нулевым уровне шума стимуляция этого элемента вызывала сетевой пачечный разряд.

Был предложен метод анализа и классификации пачечных разрядов, основанный на детектировании паттернов активации (первых импульсов на каждом нейроне в разряде). Для обработки данных выбирались импульсные последовательности только с хабов. К записи добавлялось соизмеримое число пачек-суррогатов, полученных с помощью случайной перестановки каналов в реальных разрядах из модельного эксперимента. Мера расстояния между паттернами вычислялась по аналогии с нормой разницы двух N -мерных векторов в метрическом пространстве [4]. Далее производился последовательный поиск наиболее близких друг к другу паттернов, результатом которого является цепочка расстояний (рис. 1). Число её звеньев равно числу детектированных пачек + число суррогатов минус 1.

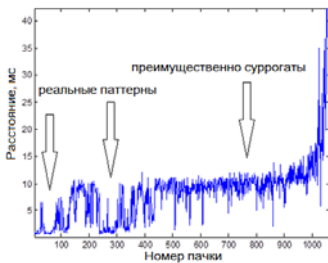


Рис. 1



Рис. 2

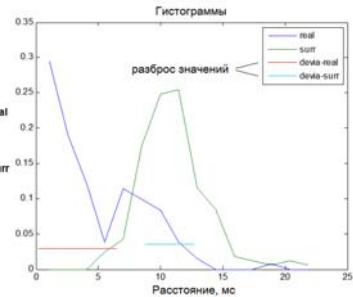


Рис. 3

Разбиение звеньев на две группы – расстояния между реальными паттернами (real) и суррогатными (surr) (рис. 2) – позволяет оценить число оригинальных популяционных разрядов, которые способна генерировать нейронная сеть. В предельном случае подмешивания случайных данных в запись (50 суррогатов на 1 паттерн активации) доля таких разрядов составила порядка 50% от детектированных пачек, несмотря на подавляющее количество разрядов спонтанной формы.

Гистограммы на рис. 3 иллюстрируют наличие в записи неслучайно похожих друг на друга паттернов активации. Группы близких по пространственно-временной структуре разрядов (мотивы) могут быть выделены из цепочки расстояний путём введения порогового расстояния. Число переходов графика на рис. 1 через порог сверху вниз будет соответствовать числу мотивов. Было доказано, что в сетях с более высоким уровнем нейронного шума число мотивов меньше, что интуитивно понятно. В случае нулевого шума сетевой пачечный разряд инициируется только нейроном-хабом, их число ограничено, а при ненулевом уровне возбуждения интегрированный входной синаптический ток способен сгенерировать потенциал действия на любом из

500 элементов с последующим лавинным характером распространения сигнала.

Исследование выполнено при поддержке Программы МКБ РАН и Минобрнауки РФ (соглашения №№ 8055, 14.B37.21.0927, 14.132.21.1663, 14.B37.21.1073, 14.B37.21.0194, 14.B37.21.1203).

- [1] Izhikevich E. M., Gally J. A., Edelman G. M. // Cereb. Cortex. 2004. V.14. P.933.
- [2] Tsodyks M., Uziel A., Markram H. // J. of Neuroscience. 2000. V.20, No.1. P. RC50.
- [3] Morrison A., Diesmann M., Gerstner W. // Biol. Cybern. 2008. V.98, No.6. P. 459.
- [4] Pimashkin A. et al. // Frontiers in Computational Neuroscience. 2011. 5:46. P. 1.

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПАРАМЕТРОВ В АНСАМБЛЕ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ ФИТЦХЬЮ-НАГУМО НА СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ

К.А. Гаврилова

Нижегородский госуниверситет

Пространственно-временная динамика сердечной мышцы приближенно описывается системой ФитцХью-Нагумо. Неоднородность параметров определяется неоднородностью индивидуальных частот элементов системы. Влияние этой неоднородности на процесс распространения возбуждения исследован в данной работе.

Для определения зависимости скорости распространения фронта от разницы между частотой синхронизации и индивидуальными частотами, рассмотрим цепочку из 50 связанных элементов, описываемых системой

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= -y_j + x_j - x_j^3 / 3 + d(x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}) \\ \dot{y}_{i,j} &= \varepsilon(x_j + a_i)\end{aligned}$$

со случайным равномерным распределением параметра a в заданном интервале, когда распределение индивидуальных частот элементов близко к равномерному.

Проведем серию экспериментов с верхней границей 0,995 и нижней границей параметра a : 0,975, 0,985 и 0,994 соответственно (рис. 1). Частота нижней границы распределения индивидуальных частот будет оставаться неиз-

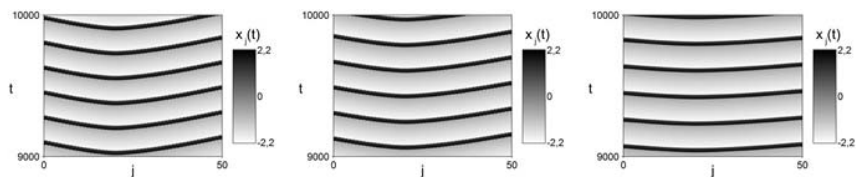


Рис. 1

менной, наибольшая частота будет увеличиваться от первого эксперимента к последующим, а также будет увеличиваться неидентичность распределения.

В итоге распространение возбуждения практически не зависит отдельно от средней частоты ансамбля или частоты синхронизации, а зависит от их разности.

Проведем эксперимент с цепочкой из 20 элементов, описываемых системой с линейным распределением параметра a (от 0,8 до 0,995 с шагом 0,005). На рис. 2 показаны участки осциллограмм некоторых соседних элементов: первого и второго, одиннадцатого и двенадцатого, девятнадцатого и двадцатого, иллюстрирующие временные задержки при передаче возбуждения между элементами. Значения параметров эксперимента: $d = 0,01$, $\varepsilon = 0,02$, граничные условия – свободные концы.

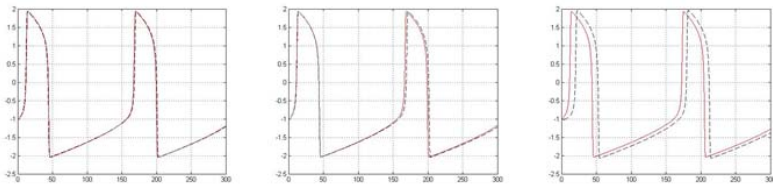


Рис. 2

Таким образом, чем больше расстройка параметра a , тем медленней распространяется волна.

Для исследования характера зависимости скорости распространения волны от частотной расстройки между генератором ритма для среды и индивидуальными частотами элементов, рассмотрим решетку связанных элементов системы ФитцХью-Нагумо:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i,j} &= x_{i,j} - x_{i,j}^3 / 3 - y_{i,j} + d(x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} - 4x_{i,j}), \\ \dot{y}_{i,j} &= \varepsilon(x_{i,j} + a_{i,j})\end{aligned}$$

Характерное мгновенное распределение $x(i,j)$ в решетке, представляющей из себя соединение двух слабо неоднородных высокочастотной (справа) и низкочастотной (слева) решеток представлено на рис. 3. Разница средних частот между решетками значительно превышает разброс индивидуальных частот внутри каждой из них. Значения параметров $d = 0,007$, $\varepsilon = 0,02$, граничные условия – свободные концы.

Так как распределения индивидуальных частот случайное, то генератор ритма находится в произвольной точке правой решетки высокочастотных элементов. В правой части решетки скорость распространения фронта возбуждения довольно высокая, и на масштабе 50 элементов укладывается не более одной волны. В левой части решетки скорость распространения

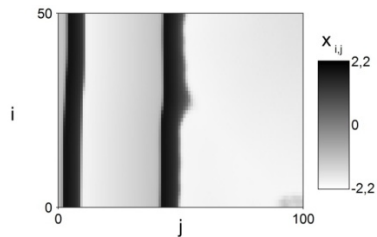


Рис. 3

фронта возбуждения ниже, и на масштабе 50 элементов укладывается две волны. Происходит падение скорости распространения почти в 2 раза за счет большой разницы между частотой синхронизации, установившейся благодаря достаточной связи между элементами, и индивидуальными частотами.

Таким образом, скорость распространения возбуждения обратно пропорциональна расстройке между частотой синхронизации и индивидуальными частотами элементов.

ПОДАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО БЕСПОРЯДКА В ВОЗБУДИМОЙ СРЕДЕ С ПОМОЩЬЮ ЛОКАЛИЗОВАННОГО СЛАБОГО ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В МОДЕЛИ ФИТЦХЬЮ-НАГУМО

И.И. Бастратов

Нижегородский госуниверситет

Согласно одной из гипотез, сердечные аритмии ассоциируются с существованием в фазовом пространстве соответствующей динамической системы пространственно-временного спирального беспорядка. Традиционный способ подавления – мощный электрический импульс, который может нарушить целостность сердечной ткани и ее функциональные способности. Поэтому важно найти решение задачи борьбы с аритмией с помощью слабого внешнего воздействия. В работе предлагается такой метод, реализованный на двумерной среде возбудимых элементов системы ФитцХью-Нагумо.

Рассмотрим систему ФитцХью-Нагумо в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x - x^3 / 3 + I(t) \\ \dot{y} = \varepsilon(x + a) \end{cases}$$

При $I(t) = t(b-a)/\varepsilon$ система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -z + x - x^3 / 3 \\ \dot{z} = \varepsilon(x + b) \end{cases} \quad \text{где } z = y - \varepsilon I(t).$$

Таким образом, подача линейного воздействия в первое уравнение эквивалентна изменению значения параметра a . Поэтому можно сделать элемент автоколебательным с нужной частотой [1].

У данного подхода есть два существенных недостатка. Первый из них заключается в том, что функция является линейной по времени, следовательно, её амплитуда увеличивается, что не позволяет считать такое воздействие слабым. Второй недостаток заключается в том, что таким воздействием мы можем достичь только некой конечной частоты, то есть существует такая область значений параметра a , что воздействием такого типа мы не сможем добиться возрастания частоты окружающей среды достаточного, для вытеснения спиральных волн.

Поэтому рассмотрим новую функцию воздействия, имитирующую связь с элементом, на который подается линейное воздействие. Если такую функцию вычислить заранее, то подавать линейное воздействие в систему уже не потребуется. Вид

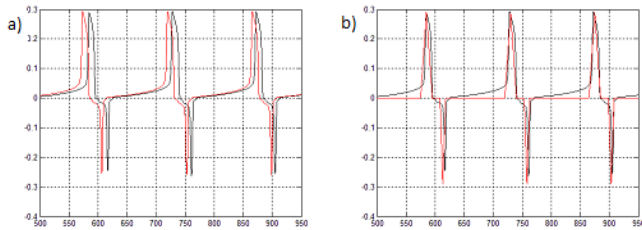


Рис. 1

такой функции для различных значений параметров совпадает. На рис. 1 представлены зависимости функций воздействия от времени для различных элементов. Для её аппроксимации рассмотрим класс периодических кусочно-линейных функций, а параметрами, зависящими только от параметров среды:

$$F(t) = \begin{cases} B(1 - |t/t_1 - 1|), & \text{если } (t \bmod p) \in [0; 2t_1] \\ B(|(t - 2t_1 - t_2)/t_2 - 1| - 1), & \text{если } (t \bmod p) \in [2t_1 + t_2; 2t_1 + t_2 + 2t_3] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Численно были получены оптимальные значения коэффициентов при различных значениях параметров среды, и аппроксимированы следующими кусочно-непрерывными функциями:

$$p = \begin{cases} 1.2(2.55 + |a|)/(0.01 + \varepsilon), & \text{если } |a| < 1 \\ 1.2(2.55 + 2|a|)/(0.01 + \varepsilon), & \text{если } |a| \geq 1 \end{cases};$$

$$B = 1/30d; t_1 = 5(2.55 + a); t_2 = 0.3/(1 + \varepsilon); t_3 = 5(2.55 - a).$$

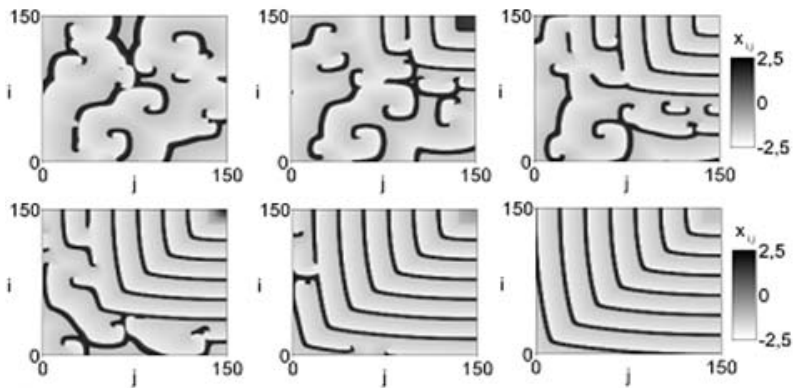


Рис. 2

При этом обе обозначенные проблемы решены: амплитуда малая и не нарастает с течением времени, а частота не ограничена максимальной частотой элемента системы ФитцХью-Нагумо.

Мгновенное распределение $x_{i,j}$ в моменты времени 0, 5000, 10000, 15000, 17500, 20000 в решетке 150×150 элементов при параметрах системы: $a = 1,1$, $\varepsilon = 0,02$, $d = 0,1$ представлено на рис. 2, иллюстрирующем эффективность такого воздействия.

Таким образом, было подобрано локальное слабое внешнее воздействие, вытесняющее пространственно-временной беспорядок в решетке слабо неидентичных связанных элементов, описываемых системой ФитцХью-Нагумо.

- [1] Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Сатаев И.Р., Тюрюкина Л.В. Синхронизация в задачах. – Саратов: Изд. центр «Наука», 2010, 256 с.

ДИНАМИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Т-КЛЕТОЧНЫХ РЕЦЕПТОРОВ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Д.Ю. Зорин, М.В. Иванченко

Нижегородский госуниверситет

Т-клетки (Т-лимфоциты), играющие центральную роль в клеточном иммунитете, имеют на своей поверхности специальные рецепторы (*англ. TCR, T-cell receptor*). Благодаря этим рецепторам Т-клетки специфичны к конкретным антигенам и постоянно контактируют с антигенпрезентирующими клетками (например, дендритными), которые несут на молекулах главного комплекса гистосовместимости (*англ. MHC, major histocompatibility complex*) антигены. Т-клетки имеют антиген-специфические свойства, т.е. определенные Т-клетки могут узнавать определенные пептиды (участки других молекул-антигенов).

Число Т-лимфоцитов у здорового взрослого человека оценивается как 10^{10} – 10^{11} , а их вариантов TCR (клонотипов) 10^7 – 10^8 [1]. Т-клетки обладают перекрестной реактивностью, т.е. отдельный клонотип может распознавать сразу несколько пептидов [2] и, следовательно, конкурировать с другими клонотипами за стимулы к пролиферации. Принято разделять Т-клетки на наивные, еще не принимавшие участия в процессе распознавания чужеродных антигенов, и на эффекторные, которые участвуют в ликвидации чужеродного материала и активируются из наивных Т-лимфоцитов.

Основным инструментом процессинга пептидов является белковый комплекс – протеасома [3]. Существует несколько видов протеасом, среди которых: конституционная, доминирующая в отсутствие инфекции, и иммунная, получаемая из конституционной, например, после стимуляции γ -интерфероном [4].

В предыдущей работе [5] мы сделали предположение о степенном законе распределения пептидных концентраций для большого количества клонов. Для статистической достоверности распределения требуется большая матрица пептидных связей (порядка $10^3 \div 10^4 \times 10^3 \div 10^4$), что в свою очередь обуславливает крайне высо-

кую трудоемкость вычислений, следовательно, появляется необходимость в использовании технологий параллельных вычислений. Использование технологии программирования на графических процессорах CUDA позволило сократить время вычислений для больших сетей в десятки раз (рис. 1), что в свою очередь упрощает

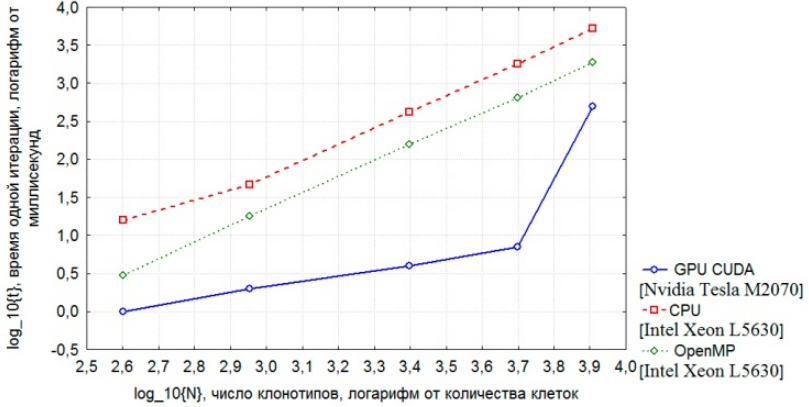


Рис. 1

использование экспериментально полученных данных для предсказательного моделирования.

На основе изложенных выше представлений можно сформулировать математическую модель, которая описывает конкурентную динамику наивных и эффекторных клеток в отсутствие и присутствии инфекции и представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений типа молекулярной кинетики [6, 7]:

$$\frac{dN_i}{dt} = H_i + (2\varphi - 1)\rho_N \sum_{j=1}^{N_{\text{pep}}} K_{ij} F_j N_i - \delta_N N_i \quad (1)$$

$$\frac{dE_i}{dt} = 2(1 - \varphi)\rho_N \sum_{j=1}^{N_{\text{pep}}} K_{ij} F_j N_i + \rho_E \sum_{j=1}^{N_{\text{pep}}} K_{ij} F_j E_i - \delta_E E_i \quad (2)$$

$$F_j = \frac{M_T P_j}{[1 + \sum_{i=1}^{N_{\text{clone}}} K_{ij} (N_i + E_i)]} \quad (3)$$

где N_i – количество клеток в i -ом клонотипе пула наивных клеток; E_i – количество клеток в i -ом клонотипе пула эффекторных клеток; F – количество свободного места на АПК (3); P – пептидная концентрация (доля пептида); K – матрица силы связей i -ого клонотипа с j -ым пептидом; δ_N, δ_E – скорость вымирания наивных и эффекторных клеток соответственно; ρ_N, ρ_E – коэффициенты пролиферации; φ – доля обновления наивных клеток.

Чужеродный патогенный пептид представлен в модели только тогда, когда появляются инфицированные клетки. При больших количествах инфицированных клеток доля патогенного пептида достигает максимальной величины:

$P_v(t) = P_0 I(t) / [I(t) + \theta]$, здесь θ – чувствительность презентации патогенов. Мы предполагаем, что патогенный пептид только один.

Динамика количества инфицированных клеток I описана стандартной моделью [6, 7]: $\frac{dI}{dt} = r(1 - cI)I - D(\sum_{i=1}^{N_{clon}} K_{ip} E_i)I$, где r – коэффициент репликации патогена; c – объем патогена; D – очистка инфицированных клеток.

На основе экспериментальных данных высокопроизводительного секвенирования TCR [8] с помощью ядерной оценки плотности Парзена-Розенблатта (*KDE, kernel density estimation*) мы получили функцию плотности распределения численности клонотипов (рис. 2), которое является аналогичным распределению пептидов P_j [5].

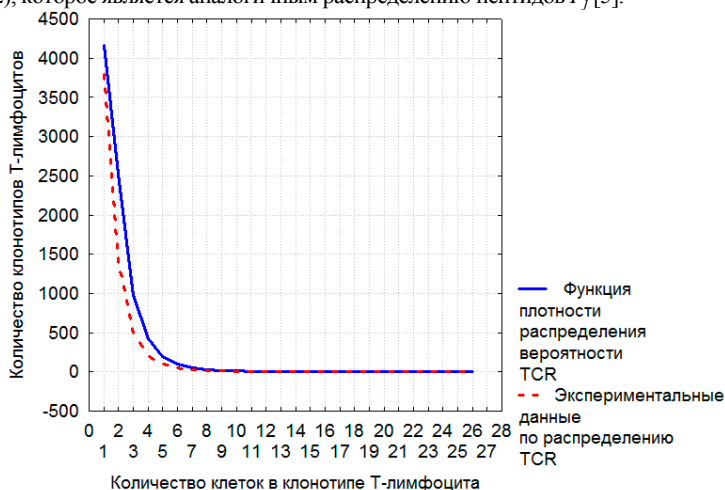


Рис. 2

В дальнейшем необходимо, используя полученное из экспериментальных данных распределение для различных пептидных концентраций, оценить эффективность иммунного ответа как с механизмом иммунопротеасомы, так и без него.

- [1] Jameson S.C. // Nature Reviews Immunology. 2002. V.2. P.547.
- [2] Peters J.M., Franke W.W., Kleinschmidt J.A. // J. of Biolog. Chem. 1994. V.269. P.7709.
- [3] Sharma L.K., Lee N.-R., Jang E.R., Lei B., Zhan C.-G., Lee W., Kim K.-B. // Chem Bio Chem. 2012. V.13. P.1899.
- [4] Sijts A.J., Standera S., Toes R.E., Ruppert T., Beekman N.J., van Veelen P.A., Ossendorp F.A., Melief C.J., Kloetzel P.M. // J. of Immunology. 2000. V.164. P.4500.
- [5] Зорин Д.Ю., Иванченко М.В. // Вестник Нижегородского государственного университета. 2012. №5 (2), С.92.

- [6] De Boer R., Perelson A. // International Immunology. 1997. V.9. P.779.
 [7] Or-Guil M., Luciani F., Carneiro J. // Proc. of the International Symp. on Mathematical and Computational Biology. 2005. P.199.
 [8] Mamedov I.Z., Britanova O.V., Bolotin D.A., Chkalina A.V., Staroverov D.B., Zvyagin I.V., Kotlobay A.A., Turchaninova M.A., Fedorenko D.A., Novik A.A., Sharonov G.V., Lukyanov S., Chudakov D.M., Lebedev Y.B. // EMBO Mol Med. 2011. V.3. P.201.

ДЕЛОКАЛИЗАЦИЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В КЛАССИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНЫХ РЕШЕТКАХ

Т.В. Лаптева, М.В. Иванченко

Нижегородский госуниверситет

Андерсоновская локализация – фундаментальное волновое явление, состоящее в экспоненциальной локализации линейных мод пространственно-неоднородных колебательных решеток [1]. Этот эффект влечет за собой отсутствие бегущих волн в системе и, соответственно, экспоненциально слабыми становятся процессы переноса заряда, энергии, вещества [2, 3]. Нелинейность, неизбежная во многих реальных физических системах, приводит к взаимодействию андерсоновских мод. Здесь закономерно возникают вопросы: разрушается ли андерсоновская локализация в нелинейных системах с беспорядком и будет ли изначально локализованное возбуждение расплываться?

Общим результатом оказывается разрушение начальной локализации волнового пакета и его расплывание с субдиффузионным ростом его второго момента согласно степенному закону $m_2 \propto t^\alpha$ ($\alpha < 1$) [4–7]. В данной работе дается краткий обзор ключевых результатов. Исследования распространения волновых пакетов из ограниченных, компактных начальных возбуждений были проведены в рамках модели Клейн-Гордона (КГ), гамильтониан которой имеет вид:

$$H = \sum_n \left[\frac{1}{2} p_n^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_n x_n^2 + \frac{1}{4} x_n^4 + \frac{1}{2W} (x_{n+1} - x_n)^2 \right], \quad (1)$$

где x_n – отклонение осциллятора из состояния равновесия, p_n – его импульс, ε_n являются равномерно распределенными случайными величинами, параметр W задает характерную длину локализации линейных мод.

Мы предложили единый теоретический подход, основанный на предположении о связи между нелинейными резонансами, генерацией хаоса и делокализацией [8–10]. С использованием критерия, аналогичного критерию нелинейного резонанса Израилева–Чирикова, было получено несколько динамических режимов расплывания волновых пакетов. В зависимости от начальных условий (плотность энергии, сила беспорядка и ширина пакета) возможны: а) при малых амплитудах начального возбуждения – расплывание волнового пакета в асимптотическом режиме «слабого хаоса» (с ростом второго момента как $m_2 \sim t^{1/3}$); б) при больших амплитудах на-

чального возбуждения – расплывание в режиме «сильного хаоса» (с ростом второго момента как $m_2 \sim t^{1/2}$), который является промежуточным и неизбежно переходит в режим слабого хаоса при уменьшении плотности энергии в пакете; в) при экстремально больших плотностях энергии – режим «самолокализации», когда большая часть энергии остается локализованной в области начального возбуждения; г) режим «нелинейной андерсоновской локализации», которая является вероятностной в случае чрезвычайно малых амплитуд начального возбуждения [11]. Примеры пространственно-временной эволюции волновых пакетов в решетках с беспорядком в режимах (а)–(в) представлены на рисунке (показано распределение логарифма плотностей энергии внутри волнового пакета). Полученные подходы и результаты обобщаются также для решеток большей размерности и произвольной степени нелинейности [8–10, 11].

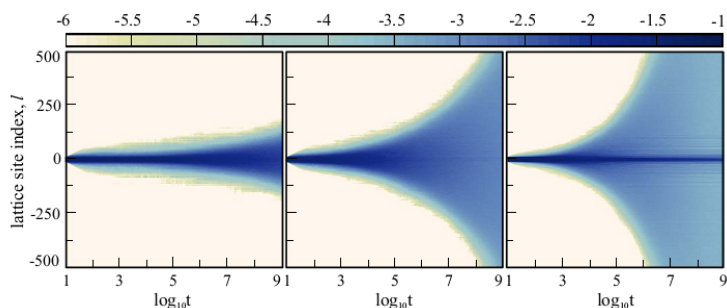


Рис.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ МК-4028.2012.2, РФФИ 12-02-31403, РФФИ 13-02-97028.

- [1] Anderson P.W. //Phys. Rev. 1958. V.109. P.1492.
- [2] Evers F., Mirlin A. //Rev. Mod. Phys. 2008. V.80. P.1355.
- [3] Billy J., Josse V., Zuo Z., Bernard A., Hambrecht B., Lugan P., Clément D., Sanchez-Palencia L., Bouyer P., Aspec A. // Nature. 2008. V. 453. P. 891.
- [4] Shepelyansky D.L. //Phys. Rev. Lett. 1993. V.70. P.1787.
- [5] Veksler H., Krivolapov Y., Fishmanet S. //Phys. Rev. E. 2009. V.80. P.037201.
- [6] Flach S., Krimer D., Skokos Ch. //Phys. Rev. Lett. 2009. V.102. P.024101.
- [7] Skokos Ch., Krimer D.O., Komineas S., Flach S. //Phys. Rev. E. 2009. V.79. P.056211.
- [8] Flach S. //Chem. Phys. 2010. V.375. P.548.
- [9] Bodyfelt J.D., Lapyteva T.V., Gligoric G., Krimer D.O., Skokos Ch., Flach S. //Int. J. Bifurcat. Chaos. 2011. V.21. P.2107.
- [10] Lapyteva T.V., Bodyfelt J. D., Flach S. //Europhys. Lett. 2012. V.98. P.60002.
- [11] Ivanchenko M.V., Lapyteva T.V., Flach S.//Phys. Rev. Lett. 2011. V.107. P.240602.

ДИНАМИКА ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ В ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНЫХ РЕШЁТКАХ

М.В. Иванченко, Т.В. Лаптева

Нижегородский госуниверситет

Взаимное влияние локализации и межчастичного взаимодействия является предметом активных исследований, начиная с момента открытия Андерсоновской локализации [1]. Поскольку непосредственный теоретический анализ подобных систем является весьма сложным и спорным [2], был выбран альтернативный путь – изучение систем нескольких взаимодействующих частиц. Потенциальная возможность применения таких систем к недавним экспериментам с атомарными конденсатами в оптических решетках [3,4], а также возможность управления отдельными атомами, перевела данную проблему в разряд первоочередных исследований.

Модель Хаббарда для двух частиц, взаимодействующих на одномерной решетке, представляет собой гамильтониан

$$H = \sum_j \left(b_{j+1}^\dagger b_j + b_j^\dagger b_{j+1} + \varepsilon_j b_j^\dagger b_j + \frac{U}{2} b_j^\dagger b_j^\dagger b_j b_j \right), \quad (1)$$

где $b^\dagger$, b являются операторами создания и уничтожения частиц, U – силой взаимодействия, а потенциал ε_j является квазипериодическим, т.е. $\varepsilon_j = \lambda \cos(2\pi\alpha j + \Phi)$. Используем два приближения: анализ собственных состояний решетки, полученных путем решения задачи на собственные значения для разреженной матрицы вида

$$A_{i,j} = (\varepsilon_i + \varepsilon_j + \delta_{i,j} U) A_{i,j} + A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} \quad (2)$$

и непосредственное численное интегрирование дискретного уравнения Шредингера для амплитуды плотности состояний

$$i \dot{\phi}_{i,j} = (\varepsilon_i + \varepsilon_j + \delta_{i,j} U) \phi_{i,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}. \quad (3)$$

Установлено, что взаимодействие приводит к перенормировке собственных энергий двухчастичных состояний. Величина перенормировки различается для различных классов фоковых состояний, что приводит к их резонансному взаимодействию в определенных интервалах параметра U и в итоге к делокализации части собственных состояний [5]. Необходимо заметить, что делокализация происходит только для состояний, в которых расстояние между частицами не превышает локализационного объема в отсутствие взаимодействия. Сосуществование локализованных и делокализованных состояний, а также коррелированность частиц в делокализованных состояниях позволяют характеризовать новый режим как «коррелированный металл».

Непосредственное решение динамических уравнений (3) подтверждает неограниченное распыление волновых пакетов в предсказанной области параметров и

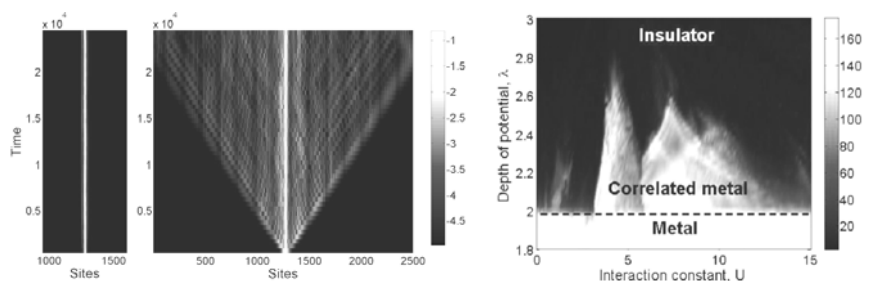


Рис. Слева – локализация и расплывание волновых пакетов в системе двух взаимодействующих частиц: $\lambda=2,5$, $U=2,0$ и $U=4,5$. Справа – диаграмма режимов на плоскости параметров «взаимодействие-неоднородность».

позволяет (путем измерения эффективной ширины волнового пакета) получить детальную карту режимов на плоскости параметров (см. рис.).

Полученные данные, в свою очередь, приводят к новым вопросам о структуре двухчастичного спектра или судьбе локализации при увеличении числа частиц. Возможно, что эти идеи в скором будущем будут поддержаны и дополнены соответствующими экспериментами по неравновесной динамике систем взаимодействующих частиц.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ МК-4028.2012.2, РФФИ 12-02-31403, РФФИ 13-02-97028.

- [1] Anderson P.W. //Phys. Rev. 1958. V.109. P. 1492.
- [2] Basko D. M. , Aleiner I.L., Altshuler B.L. //Ann. Phys. (N.Y.). 2006. V.321. P.1126.
- [3] Lucioni E, Deissler B, Tanzi L, Roati G, Zaccanti M, Modugno M, Larcher M, Dalfovo F, Inguscio M, Modugno G.//Phys. Rev. Lett. 2011. V.106. P.230403.
- [4] Winkler K., Thalhammer G., Lang F., Grimm R., Hecker Denschlag J., Daley A.J., Kantian A., Büchler H.P., Zolleret P. //Nature. 2006. V.441. P.853.
- [5] Flach S., Ivanchenko M.V., Khomeriki R. //Europhys. Lett. 2012. V.98. P.66002.