

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОПРАВОК В ПРИЛОЖЕНИИ К ЛЕГИРОВАНИЮ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

Е.А. Булаева¹⁾, Е.Л. Панкратов²⁾

¹⁾Нижегородский архитектурно-строительный госуниверситет

²⁾Нижегородский госуниверситет

При формировании некоторых устройств твердотельной электроники применяется легирование используемых материалов [1, 2]. Одними из наиболее распространенных способов легирования являются диффузионный и ионный типы легирования [1, 2]. В процессе отжига радиационных дефектов после проведения ионного легирования происходит уширение распределения примеси за счет высокотемпературной диффузии. Для описания диффузии примеси в процессе ее отжига и/или отжига радиационных дефектов используется уравнение диффузии:

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \right], \quad (1)$$

где $x \in [0, L]$ – текущая координата, изменяющаяся в пределах легируемой структуры, $t \in [0, \infty]$ – текущее время, $C(x, t)$ – концентрация примеси. Дополним уравнение (1) граничными и начальными условиями:

$$\left. \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad C(x,0) = f(x). \quad (2)$$

Коэффициент диффузии D аппроксимируем с помощью следующего соотношения [2]:

$$D = D_L(x, T) \left[1 + \xi \cdot \frac{C^r(x, t)}{P^r(x, T)} \right], \quad (3)$$

где $P(x, T)$ – предел растворимости примеси, T – температура отжига, параметр ξ учитывает разброс экспериментальных значений растворимости примеси. Второе слагаемое в квадратных скобках соотношения (3) является существенным при сильном легировании материала. $D_L(x, T)$ – коэффициент диффузии при низком уровне легирования, зависящий от координаты (при диффузии в многослойных материалах) и температуры отжига по закону Аррениуса.

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом функциональных поправок [3, 4]. В рамках данного метода представим функцию $D_L(x, T)$ в следующей форме: $D_L(x, T) = D_{0L} [1 + \varepsilon \cdot g(x, T)]$, где D_{0L} – её среднее значение, $0 \leq \varepsilon < 1$, $|g(x, T)| \leq 1$. Далее решение уравнения (1) будем искать в виде ряда:

$$C(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{j=0}^{\infty} \xi^j C_{ij}(x, t). \quad (4)$$

Подстановка данного ряда в уравнение (1) и условия (2) позволяет получить уравнения для функций $C_{ij}(x, t)$ и условий для них. Решение данных уравнений стандартными методами [5, 6] позволяет получить функцию $C(x, t)$ с требуемой точностью.

Следует заметить, что рассматриваемый в данной работе метод базируется на идее метода малого параметра. Однако малое изменение значений параметров ε и ξ может привести к существенному изменению функции $C(x, t)$. Кроме того, ряд по обоим параметрам является сходящимся за счет естественных физических ограничений: значение коэффициента диффузии всегда положительно, а при условии $C(x, t) > P(x, T)$ не представляется возможным обсуждать легирование материалов. Еще одним достоинством данного метода является возможность отказаться от «сшивки» решений на границах раздела при анализе процессов массопереноса в многослойных структурах.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 11.G34.31.0066 и стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов.

- [1] Гусев В.Г., Гусев Ю.М. Электроника. – М.: Высшая школа, 1991, 622 с.
 [2] Готра З.Ю. Технология микроэлектронных устройств. – М.: Радио и связь, 1991, 528 с.
 [3] Pankratov E.L., Bulaeva E.A. // Int. J. Nanosci. 2012. V. 11, № 5. P.1250028-1.
 [4] Pankratov E.L., Bulaeva E.A. // Rev. Theor. Sci. 2013. V. 1(1). P.58.
 [5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972, 735 с.
 [6] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твёрдых тел. – М.: Наука, 1964, 487 с.

МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОПРАВОК В ЗАДАЧАХ МАССОПЕРЕНОСА

Е.Л. Панкратов¹, Е.А. Булаева²

¹Нижегородский госуниверситет

²Нижегородский архитектурно-строительный госуниверситет

В процессе легирования материалов при легировании устройств твердотельной электроники представляет интерес прогноз распределения концентрации примеси. Анализ динамики перераспределения примеси проводился путем решения следующего уравнения [1, 2]:

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right], \quad (1)$$

где $x \in [0, L]$ – текущая координата, изменяющаяся в пределах легируемой структуры, $t \in [0, \infty]$ – текущее время, $C(x, t)$ – концентрация примеси. Дополним уравнение (1) граничными и начальными условиями:

$$\left. \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad C(L, t) = 0, \quad C(x, 0) = f(x). \quad (2)$$

Коэффициент диффузии D аппроксимируем с помощью следующего соотношения [2]:

$$D = D_L(x, T) \left[1 + \xi \cdot C^\gamma(x, t) / P^\gamma(x, T) \right], \quad (3)$$

где $P(x, T)$ – предел растворимости примеси, T – температура отжига, параметр ξ учитывает разброс экспериментальных значений растворимости примеси. Второе слагаемое в квадратных скобках соотношения (3) является существенным при сильном легировании материала. $D_L(x, T)$ – коэффициент диффузии при низком уровне легирования, зависящий от координаты (при диффузии в многослойных материалах) и температуры отжига по закону Аррениуса.

Для решения уравнения (1) преобразуем его к следующей интегральной форме:

$$C(x, t) = C(x, t) + \frac{1}{L^2} \left\{ \int_0^t \int_0^x D(v, T) \frac{\partial C(v, \tau)}{\partial v} dv d\tau - \int_0^{\Theta L} \int_0^T D(v, T) \frac{\partial C(v, \tau)}{\partial v} dv d\tau - \int_0^x (x-v) \times \right. \\ \left. \times C(v, t) dv + \int_0^L (L-v) C(v, t) dv + \int_0^x (x-v) f(v) dv - \int_0^L (L-v) f(v) dv \right\}, \quad (4)$$

где Θ – длительность отжига.

Одним из методов решения уравнения (4) является метод осреднения функциональных поправок [3]. В рамках данного метода искомая функция $C(x, t)$ заменяется на её пока неизвестное среднее значение α_1 в правой части уравнения (4). Таким образом, получаем первое приближение концентрации примеси $C_1(x, t)$. Среднее значение α_1 определяется стандартно:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Theta L} \int_0^{\Theta L} \int_0^L C_1(x, t) dx dt.$$

Приближения второго и более высоких порядков искомой функции $C(x, t)$ определяется её заменой в правой части уравнения (4) на сумму $\alpha_i + C_{i-1}(x, t)$, где $i \geq 2$ – порядок приближения:

$$\alpha_i = \frac{1}{\Theta L} \int_0^{\Theta L} \int_0^L [C_i(x, t) - C_{i-1}(x, t)] dx dt.$$

Достоинствами метода осреднения функциональных поправок является отсутствие необходимости «сшивки» решений на границах раздела при анализе процессов в многослойных структурах и отсутствие необходимости вычислять производные от параметров материалов (например, от коэффициента диффузии). Первое достоинство представляет интерес при плавном изменении параметров материалов в многослойных структурах, а второе – при резком изменении данных параметров.

Для уменьшения количества итерационных шагов метода осреднения функциональных поправок выберем более точное исходное распределение концентрации примеси. В качестве него может быть выбрано, например, распределение концентрации примеси при усредненном коэффициенте диффузии D_0 [4]. В ряде случаев такое исходное распределение позволяет уменьшить и объём полученных соотношений.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 11.G34.31.0066 и стипендии Президента РФ для студентов и аспирантов.

- [1] Гусев В.Г., Гусев Ю.М. Электроника. – М.: Высшая школа, 1991, 622 с.
 [2] Готра З.Ю. Технология микроэлектронных устройств. – М.: Радио и связь, 1991, 528 с.
 [3] Соколов Ю.Д. // Прикладная механика. 1955. № 1. С. 23.
 [4] Pankratov E.L. // Eur. Phys. J. B. 2007. V. 57(3). P. 251.
 [5] Pankratov E.L. // J. Appl. Phys. 2007. V. 101, № 11. P.114308.

ВЛИЯНИЕ ВИДА ФУНКЦИИ ВКЛЮЧЕНИЯ-ВЫКЛЮЧЕНИЯ ИСТОЧНИКА НА УЭПР РАСТУЩЕЙ СНЕЖНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А.Э. Рассадин

НПО НТОРЭС им. А.С. Попова

Для внешней калибровки радиолокационных станций с синтезированием апертуры антенны (РСА) необходимо построение точных моделей удельной эффективной поверхности рассеяния (УЭПР). В работе [1] решение такой модели получено в мелкомасштабном приближении для случая растущей снежной поверхности (СП) при условии отсутствия эффектов затенения её дальними участками, а именно, если приповерхностный источник снега имеет вид $f(\vec{x}, t) = Q(\vec{x}) \cdot A(t)$, где $Q(\vec{x})$ – двумерное статистически однородное поле на плоскости $\vec{x} = (x^1, x^2)$ с ненулевым средним, а $A(t)$ – детерминированная функция времени с компактным носителем $\text{supp } A(t) = [0, T]$, характеризующая включение и выключение источника, то изменение УЭПР за счёт действия такого источника пропорционально квадрату функции

$$\Phi(q) = \left| \int_0^T A(t) \cdot \exp(-i \cdot q \cdot t) \cdot dt \right|^2, \quad (1)$$

зависящей от $q = \vec{k} \cdot \vec{c}_{\parallel}$ (\vec{k} – волновой вектор, а \vec{c}_{\parallel} – скорость движения начального профиля СП по горизонтальной плоскости в отсутствие источника).

При резком включении и выключении источника $A(t) = \theta(t) \cdot \theta(T - t)$. Значит

$$\Phi_{\infty}(q) = T \cdot \left| \frac{\sin(q \cdot T/2)}{q \cdot T/2} \right|. \quad (2)$$

Учесть нерезкость включения-выключения источника можно, задав функцию включения-выключения $A(t)$ с помощью атомарной функции (АФ) $h_a(x)$ [2] в виде:

$$A(t) = \frac{2}{a} \cdot h_a \left[\frac{t - T/2}{(a-1) \cdot T/2} \right]. \quad (3)$$

При $|x| \leq \frac{a-2}{a \cdot (a-1)}$ $h_a(x) = a/2$. Кроме того, $h_a(x)$ обладает компактным носителем

$\text{supp } h_a(x) = \left[-\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1} \right]$, причём относительная ширина её изменения равна $2/a$ и убывает с ростом параметра a .

Таким образом, для функции (3) по формуле (1) получим:

$$\Phi_a(q) = \frac{a-1}{a} \cdot T \cdot \left| F_a \left[\frac{(a-1) \cdot q \cdot T}{2} \right] \right|, \quad (4)$$

где

$$F_a(p) = \prod_{s=1}^{\infty} \frac{\sin p/a^s}{p/a^s} \quad (5)$$

– известный Фурье-образ АФ $h_a(x)$ [2].

При $a \gg 1$ формула (4) немного упрощается:

$$\Phi_a(q) \approx T \cdot \left| F_a \left[\frac{a \cdot q \cdot T}{2} \right] \right| = \Phi_{\infty}(q) \cdot \left| F_a \left[\frac{q \cdot T}{2} \right] \right|. \quad (6)$$

Перемножая разложения в ряд Тейлора сомножителей в (6) при $q \cdot T/2 \ll 1$, найдём:

$$\Phi_a(q) = T \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) \cdot \left(\frac{q \cdot T}{2} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (7)$$

Из сравнения (7) с разложением (2) в ряд Тейлора

$$\Phi_{\infty}(q) = T \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{q \cdot T}{2} \right)^2 + \dots \right\} \quad (8)$$

видно, что конечность времени включения-выключения источника снега $\Delta t = T/a$ приводит к сужению главного лепестка функции (4) по сравнению с функцией (2), соответствующей мгновенному включению-выключению.

В такой постановке рассмотренная задача близка по своему смыслу к задаче квантовой механики о переходе между состояниями квантовой системы под влиянием возмущения, действующего в течение конечного времени [3], поэтому описанный алгоритм применим для вычисления вероятностей перехода квантовой системы под действием нестационарного возмущения с временной амплитудой вида (3).

- [1] Рассадин А.Э. // Материалы XIX МНТК «Информационные системы и технологии «ИСТ-2013». – Н. Новгород: НГТУ, 2013. С. 400.
- [2] Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. – М.: Радиотехника, 2003, 512 с.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – М.: Наука, 1989, 768 с.

КВАЗИМАРТИНГАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НАБЛЮДАЕМОГО ДВИЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МИКРОЧАСТИЦЫ

А.Т. Гаврилин

Нижегородский госуниверситет

В работах [1, 2] последовательность измеренных (в случайные моменты времени) положений нерелятивистской скалярной микрочастицы интерполировалась непрерывной реализацией процесса Ито [3]. При учете физически мотивированных ограничений модель [1, 2] приводит к уравнению Шредингера для комплекснозначной функции, составленной из характеристик процесса Ито. Как и в модели Нельсона [4], в указанной модели время в сравнении с пространственными координатами играет особую роль, так что схема стохастического квантования не обладает свойством релятивистской ковариантности. Поскольку для многих физиков специальная теория относительности продолжает оставаться «священной коровой», представляется небезынтересным рассмотреть возможность интерполяции пространственно-временных точек, отвечающих показаниям приборов, реализациями случайного процесса с ковариантными распределениями в пространстве Минковского.

В предлагаемой схеме измеряемыми величинами являются не только пространственные координаты микрочастицы, но и моменты ее контактов с измерителями местоположения. Точки на 4D-шкале соответствующего прибора не обязательно разделены времени-подобными интервалами, поэтому и от интерполирующих кривых нельзя требовать, чтобы они являлись мировыми линиями. В предлагаемой конструкции возможный пространственно-подобный характер приращений траекторий списывается на их непредсказуемую компоненту, описываемую четырехмерным винеровским процессом. Постулируется, что измеряемый 4-вектор по отношению к некоторому инвариантному параметру $\tau \in \mathfrak{R}$ (в качестве которого может выступать усредненное по ансамблю реализаций собственное время объекта) «эво-

люционирует» как процесс Ито. Именно, пусть M^4 – пространство Минковского с интервалом $s : s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$, и $v(\tau)$ – непрерывный случайный процесс на двустороннем относительно τ полном стохастическом базисе $(\Omega, Y, Y_{\leq}, Y_{\geq}, P)$, имеющий значения в M^4 и характеризуемый независимыми приращениями вида $v(\tau_2) - v(\tau_1) \sim N(0, G|\tau_2 - \tau_1|)$. Здесь G – «диффузионная» матрица, отличающаяся от метрического тензора g_{λ}^{μ} в M^4 лишь множителем \hbar/m , где m – масса частицы. Такой выбор G продиктован не только требованием релятивистской ковариантности выводимых уравнений нелинейной фильтрации скоростей частицы, но и спецификой «радиолокационного» мониторинга ее движения [5]. Процесс $\xi(\tau)$ будем называть процессом Ито по отношению к $v(\tau)$, если существуют два Y_{\leq} и Y_{\geq} согласованных процесса $(p_+(\tau)$ и $p_-(\tau)$ соответственно), такие, что ковариантные стохастические дифференциалы $\xi(\tau)$ представимы в виде:

$$D_{\pm} \xi(\tau) = \frac{1}{m} p_{\pm}(\tau) d\tau + D_{\pm} v(\tau). \quad (1)$$

В (1) подстрочные индексы плюс и минус метят соответственно прямой и обратный (по отношению к росту τ) ковариантные дифференциалы случайных процессов, пребывающих в M^4 . Отметим, что в отличие от диффузионного процесса, выражения (1) не являются стохастическими дифференциальными уравнениями, поскольку коэффициенты сноса $p_+(\tau)$ и $p_-(\tau)$ не являются функциями $\xi(\tau)$.

В отношении $p_+(\tau)$ и $p_-(\tau)$ полагаем, что они допускают ковариантные стохастические дифференциалы вида:

$$D_{\pm} p_{\pm}(\tau) = F_{\pm}(\tau) d\tau + D_{\pm} \eta(\tau), \quad (2)$$

где для заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле с 4-потенциалом $A = A_{\mu}$ детерминированная (при известном значении процесса $\xi(\tau)$) составляющая «сил» F_{\pm} равна $F_{\nu}^{\mu} = e g_{\lambda}^{\mu} (\partial_{\nu} A_{\lambda} - \partial_{\lambda} A_{\nu})$, а $\eta(\tau)$ – квадратично интегрируемый мартингал, ортогональный к $v(\tau)$ [3].

Процедура стохастического квантования системы (1), (2) сводится к усреднению уравнений нелинейной фильтрации [3] коэффициентов сноса $p_+(\tau)$ и $p_-(\tau)$ по возрастающему и убывающему (относительно τ) потокам σ -алгебр, порожденных прообразами борелевских подмножеств в M^4 при отображении $\xi : \Omega \rightarrow M^4$, когда «настоящее» процесса $\xi(\tau)$ фиксировано: $\xi(\tau) = x$.

Данная процедура отличается от аналогичной процедуры в [2] лишь деталями (в частности, кулоновская калибровка ЭМП заменяется на лоренцевскую), приводя в итоге к уравнению Фока-Штукельберга [5, 6] для волновой функции $\Phi : M^4 \times T \rightarrow C$:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2m} \left((i\hbar \partial_x - eA_x(x))(i\hbar \partial_x^2 - eA_x^2(x)) \right) \Phi(x, \tau) + mc^2 \Phi(x, \tau). \quad (3)$$

Для стационарных по τ состояний уравнение (3) сводится к чисто волновому уравнению, впервые написанному (но не опубликованному) Шредингером (1925 г.), к вариантам которого вскоре независимо и на основе различных эвристических соображений пришли Клейн, Фок и Гордон. Уравнение (3) по сравнению с уравнением Клейна-Гордона, помимо большей формальной общности, имеет ту привлекательную черту, что в нем волновая функция и ее производная по времени наблюдателя x^0 не могут выступать в качестве независимых начальных (по x^0) условий. Эта «подчиненность пятому измерению» устраняет ряд патологических (с точки зрения интерпретации) свойств, которые присущи решениям уравнения Клейна-Гордона.

- [1] Gavrilin A.T. // Proc. of the Symp. "The Present Status of the Quantum Theory of Light". 1997. P.217.
- [2] Гаврилин А.Т. // Актуальные проблемы статистической радиофизики (Малаховский сборник). 2006. Т.5. С.35.
- [3] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974, 696 с.
- [4] Nelson E. // Phys. Rev. 1966. V.150. P.1079.
- [5] Гаврилин А.Т. // Актуальные проблемы статистической радиофизики (Малаховский сборник). 2008. Т.7. С.30.
- [6] Фок В.А. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1937. Т.4–5. С.551; Fock V.A. // Phys. Zeit. Sow. 1937. V. 12. P.841.
- [7] Stueckelberg E.C.G. // Helv. Phys. Acta. 1941. V.14. P.322.

СИНТЕЗ ДЕМОДУЛЯТОРОВ СИГНАЛОВ С ТРИФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ В КАНАЛАХ С РАССЕЯНИЕМ ВО ВРЕМЕНИ И ПО ЧАСТОТЕ

Г.Н. Бочков¹⁾, К.В. Горохов^{1,2)}, А.В. Колобков^{1,2)}

¹⁾Нижегородский госуниверситет

²⁾ОАО НПП «Полёт»

Многочастотные OFDM-сигналы широко используются в различных цифровых системах высокоскоростной передачи информации. В условиях замирающего канала с большим частотным рассеянием нарушается ортогональность поднесущих OFDM-сигналов и, как результат, появляется межканальная интерференция (МКИ), что влечет за собой полную или частичную потерю работоспособности алгоритмов приема OFDM-сигналов, разработанных для частотно-селективного канала с медленными замираниями [1]. Для квазикогерентного приема OFDM-сигналов с абсолютными видами модуляции в таких условиях требуется высокая точность синхронизации и оценивания нестационарной импульсной характеристики канала связи. Трифазовая модуляция (ТФМ) и алгоритмы некогерентного приема позволяют

ослабить требования к точности оценивания параметров канала связи. В классе ТФМ наилучшую помехоустойчивость обеспечивают варианты ТФМ с двумя опорными поднесущими (ОТФМ), участвующими в образовании всех информационных трифаз, и оптимальном перераспределении энергии сигнала [2].

В работе проведен синтез некогерентных демодуляторов сигналов с ОТФМ на выходе канала с рассеянием во времени и по частоте на основе правила обобщенного максимального правдоподобия в условиях, когда нестационарная передаточная характеристика канала известна с точностью до общего фазового сдвига. Полученное оптимальное правило поэлементного приема, основанное на минимизации некогерентной метрики отличия всех принимаемых поднесущих от ожидаемых, имеет чрезмерную вычислительную сложность, поскольку число перебороч при принятии решения о каждом информационном элементе, составляет M^{K-2} , где M – позиционность модуляции, K – число активных поднесущих. В разработанном субоптимальном некогерентном демодуляторе (СНД) ограничивается число N_{rx} анализируемых принимаемых поднесущих и используется только $(2Q+1)$ смежных диагоналей канальной матрицы, описывающей нестационарную передаточную характеристику канала и имеющей квазидиагональную структуру [1]. В этом случае число перебираемых альтернатив уменьшается до значения $M^{4Q+N_{rx}-1}$. Предложенный демодулятор с обратной связью по решению (СНД-ОСР), который в решающей статистике принимаемого информационного элемента использует принятые значения для предыдущих элементов, позволяет сократить перебор до $M^{2Q+N_{rx}-3}$ вариантов.

Результаты исследования помехоустойчивости разработанных некогерентных демодуляторов при приеме OFDM-сигналов с 4-х позиционной ОТФМ в двухлучевом канале с релейскими замираниями и аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ) представлены на рис. 1 и рис. 2, где BER – вероятность битовой ошибки, $\langle E_b/N_0 \rangle$ – среднее отношение удельной энергии на бит сообщения к спектральной плотности шума. Моделирование проводилось при следующих параметрах: общее количество активных поднесущих $K = 130$, статистически эквивалентные замирания в лучах с относительной скоростью $f_d T = 0,05$ (где T – длина сигнала), задержка между лучами $\tau_0 = T/26$. Результаты демонстрируют, что при равных значениях N_{rx} и Q СНД-ОСР, по сравнению с СНД, обеспечивает не только значительное сокращение вычислительной сложности, но и выигрыш в помехоустойчивости. При расширении интервала обработки до значений $N_{rx} = 6$ и $Q = 2$ помехоустойчивость СНД-ОСР практически достигает помехоустойчивость СНД и СНД-ОСР в однолучевом канале с общими замираниями при $f_d T = 0$, когда отсутствует МКИ и частотная селективность канала. Дальнейшее увеличение используемой глубины МКИ $Q \geq 3$ и числа анализируемых принимаемых поднесущих $N_{rx} \geq 5$ позволяет превзойти помехоустойчивость приема в однолучевом канале с общими замираниями. Это означает, что при данной скорости замираний $f_d T = 0,05$ и превышении границы ($N_{rx} = 5, Q = 3$) не только подавляется мешающее влияние многолучевости и МКИ, но и начинает срабатывать временное разнесение, обусловленное конечной скоростью замираний в канале.

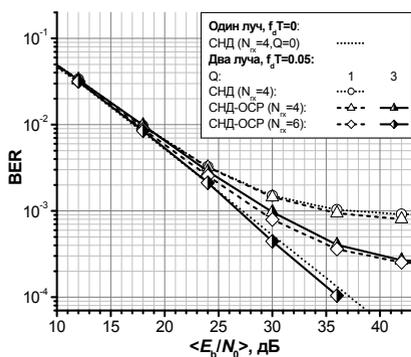


Рис. 1

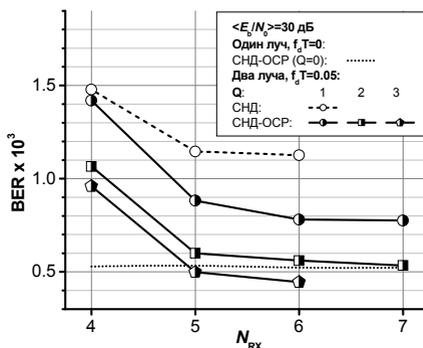


Рис. 2

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-07-97024-р_поволжье_a).

- [1] X. Cai, G.B. Giannakis // IEEE Trans. Commun. 2003. V. 51, No. 12. P. 2047.
 [2] Бочков Г.Н., Горохов К.В., Колобков А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, №8. С. 543.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ТИПА «ХИЩНИК-ЖЕРТВА» С КОНТРОЛИРУЕМОЙ ТОПОЛОГИЕЙ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

А.Б. Корчагин, А.С. Мирошин

Нижегородский госуниверситет

В физике, экономике, биологии и в других науках существует огромное количество моделей, которые описываются определенными полиномиальными векторными полями с предельными циклами. Поэтому всестороннее изучение моделей, содержащих предельные циклы, является важной задачей.

В данной работе исследуется широко известная модель Лотка-Вольтерра типа «хищник-жертва», а также всевозможные её модификации. Динамика любой экологической системы может быть описана с помощью уравнений, которые получаются путём внесения в основную модель дополнительных факторов, таких как борьба за ресурсы или ограниченность территорий. Всё это – многофакторные модификации уравнения Лотка-Вольтерра.

Но можно задать динамику системы заранее. Предположим, что на фазовой плоскости решений дифференциального уравнения должен находиться предельный цикл. Он обеспечит наличие в системе автоколебаний, которые не исчезают со временем. Получить его можно следующим образом.

Рассмотрим дифференцируемую функцию $H(x,y)$. Пусть C – компонента уровня $L^c = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid H(x,y) = c\}$, причем C – это компонента, гомеоморфная стандартной окружности S^1 .

Используем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{H_x + \beta(y-b)\xi(H)}{H_y - \alpha(x-a)\eta(H)}, \quad (1)$$

где α, β, a, b – действительные числа, $\xi(x), \eta(x)$ – аналитические функции.

В статье [1] доказано, что если с действительный корень функций $\zeta(x), \eta(x)$, т.е. $\zeta(c) = \eta(c) = 0$ и $\alpha\eta(x) - \beta\xi(x)$ не нулевая функция, тогда каждая компонента C уровня L^c – это предельный цикл для уравнения (1).

Будем называть функцию $H(x,y)$ – функцией стабилизации.

Рассмотрим замкнутую траекторию (при $c > 27$) следующего вида

$$\frac{(px + qy + 1)^3}{xy} - c = 0. \quad (2)$$

Введем функцию стабилизации

$$H(x,y) = \frac{(px + qy + 1)^3}{xy}. \quad (3)$$

Подставим функцию стабилизации (3) в уравнение (1) при условии, что $a=b=0$, $\alpha = -\beta = \mu$, $\zeta(H) = \eta(H) = H - c$, и запишем получившееся дифференциальное уравнение в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + px^2 - 2qxy - \mu x^2 y \left[(px + qy + 1) - \frac{cxy}{(px + qy + 1)^2} \right], \\ \dot{y} = -y - qy^2 + 2pxy - \mu xy^2 \left[(px + qy + 1) - \frac{cxy}{(px + qy + 1)^2} \right]. \end{cases} \quad (4)$$

Предельный цикл на рисунке будет устойчивым (неустойчивым) при $\mu > 0$ ($\mu < 0$). Размеры предельного цикла можно изменять при изменении параметров p, q, c , причем здесь $c > 27$.

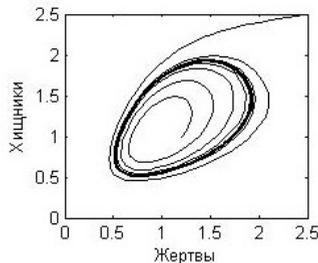


Рис.

В этой системе ярко выражены ранее изученные модификации уравнения Лотка-Вольтерра [2]. Численность жертв растет как $\dot{x} \sim x + px^2$, а убывает пропорционально количеству встреч хищников с жертвами $\dot{x} \sim -2qxy$. Аналогичные модификации входят и в уравнение для хищников. Новые слагаемые получаются как раз за счет функции стабилизации. Как видно из системы, они достаточно сложны для объяснения. Можно только предположить, что они могут объяснять не рассматриваемые ранее взаимодействия между хищниками, жертвами и их окружением. Однако стоит отметить, что зависимость скорости изменения хищников и жертв от новых слагаемых одинакова.

Система уравнений (4) может описывать динамические системы типа «хищник-жертва». Основным её преимуществом перед другими системами является то, что система (4) уже содержит предельный цикл. И если в других уравнениях приходится искать область параметров, при которых в системе возможно наличие предельных циклов, то в системе (4) предельный цикл уже получен, а параметрами c и μ можно его изменять и контролировать.

[1] Korchagin A.B. //Theory of Dynam. Syst. 2005. V.6. P. 217.

[2] Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985.

АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ АВТОГЕНЕРАТОРА С ЖЕСТКИМ РЕЖИМОМ ВОЗБУЖДЕНИЯ МЕТОДОМ УКРОЧЕННОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

А.А. Дубков, И.А. Литовский

Нижегородский госуниверситет

Исследование поведения нелинейных динамических систем (в частности, автоколебательных [1]), подверженных стохастическим воздействиям различной природы, остается весьма актуальной задачей. Эффективным математическим методом, позволяющим решать сложные статистические задачи, является аппарат теории марковских случайных процессов. В настоящей работе рассматривается неавтономный автогенератор с жестким режимом возбуждения со случайными источниками, описываемый уравнением 2-го порядка

$$\ddot{y} + \lambda(\beta y^4 - \alpha y^2 - 1)\dot{y} + [\omega^2 + \eta(t)]y = \xi(t), \quad (1)$$

где: $0 < \lambda < \omega$, $\alpha, \beta > 0$, $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – статистически независимые белые гауссовы шумы с нулевыми средними значениями и интенсивностями D и D_1 соответственно. Переходя от (1) к эквивалентной системе уравнений первого порядка, и вводя с помощью стандартной замены фазовые переменные A и Φ , приходим к следующему уравнению Фоккера-Планка (УФП) для совместной плотности вероятности $W(A, \Phi, t)$ амплитуды и фазы колебаний

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & \lambda \sin^2 \Psi \frac{\partial}{\partial A} [AF(A \cos \Psi)W] + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial \Phi} [F(A \cos \Psi)W \sin 2\Psi] + \\ & + \frac{D}{\omega^2} \left(\sin \Psi \frac{\partial}{\partial A} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \Phi} \cos \Psi \right)^2 W + \frac{D_1}{\omega^2} \left(\frac{\sin 2\Psi}{2} \frac{\partial}{\partial A} A + \frac{\partial}{\partial \Phi} \cos^2 \Psi \right)^2 W, \end{aligned} \quad (2)$$

где: $F(A \cos \Psi) = \beta A^4 \cos^4 \Psi - \alpha A^2 \cos^2 \Psi - 1$, $\Psi = \omega t + \Phi$. В приближении малости параметра λ амплитуда A и фаза Φ медленно меняются на периоде колебаний $2\pi/\omega$, как и их совместное вероятностное распределение $W(A, \Phi, t)$. Это обстоятельство позволяет применить к уравнению (2) стандартную процедуру усреднения по периоду колебаний и получить укороченное УФП. Интегрируя его по фазе Φ в пределах $[-\pi; \pi]$, приходим к уравнению для плотности вероятности амплитуды $P(A, t)$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A} \left[\lambda A \left(\frac{\beta A^4}{8} - \frac{\alpha A^2}{4} - 1 \right) P + \frac{1}{\omega^2} \left(D + \frac{D_1 A^2}{4} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial A} - \frac{P}{A} \right) \right]. \quad (3)$$

Установившееся решение уравнения (3) имеет вид

$$P_\infty(A) = c_0 A \left(D + \frac{D_1 A^2}{4} \right)^{-q} \exp[-S(A)], \quad (4)$$

где: c_0 – постоянная нормировки и

$$q = \frac{2\lambda\omega^2}{D_1} \left(2\beta \frac{D^2}{D_1^2} + \alpha \frac{D}{D_1} - 1 \right), \quad S(A) = \frac{\lambda\omega^2 A^2}{D_1} \left(\frac{\beta A^2}{8} - \beta \frac{D}{D_1} - \frac{\alpha}{2} \right). \quad (5)$$

В отсутствие флуктуаций частоты ($D_1=0$) формула (4) для установившейся плотности вероятности амплитуды принимает более простой вид

$$P_\infty(A) = c_1 A \exp \left\{ -\frac{\lambda\omega^2 A^2}{2D} \left(\beta \frac{A^4}{12} - \alpha \frac{A^2}{8} - 1 \right) \right\}, \quad (6)$$

а без аддитивного шума ($D=0$) соответственно

$$P_\infty(A) = c_2 A^{1+4\lambda\omega^2/D_1} \exp \left\{ -\frac{\lambda\omega^2 A^2}{2D_1} \left(\beta \frac{A^2}{4} - \alpha \right) \right\}. \quad (7)$$

На рис. 1 и рис. 2 приведены типичные зависимости (6) и (4) стационарного вероятностного распределения амплитуды автоколебаний при наличии одного аддитивного шума $\zeta(t)$ в уравнении (1) и при совместном воздействии аддитивного и мультипликативного шумов. Характерный максимум указывает на наиболее вероятное значение амплитуды установившихся колебаний, которое мало изменяется при учете флуктуаций частоты $\eta(t)$. В то же время, в случае наличия дополнитель-

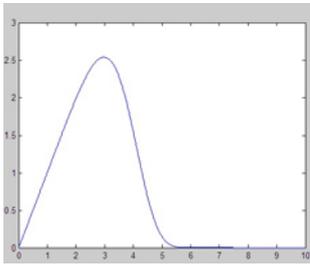


Рис. 1

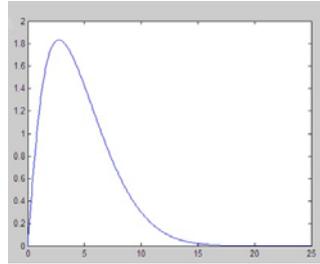


Рис. 2

ного параметрического шумового воздействия величина максимума установившейся плотности вероятности амплитуды увеличивается по сравнению со случаем одного аддитивного шума. Полученные результаты хорошо стыкуются с результатами работы [2], где был рассмотрен автогенератор Ван-дер-Поля с мягким режимом возбуждения ($\beta=0$, $\alpha<0$) и тремя источниками шума.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-02-01418).

- [1] Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. – М.: Наука, 1968, 660 с.
 [2] Медведев С.Ю., Музычук О.В. //Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т.24, №1. С.49.

ЭВОЛЮЦИЯ МОМЕНТНЫХ И ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛИ МАЛЬТУСА-ФЕРХЮЛЬСТА-БЕРНУЛЛИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ БЕЛЫХ И ЦВЕТНЫХ ШУМОВ

А.А. Дубков, А.А. Харчева

Нижегородский госуниверситет

В современной науке особую роль играют нелинейные модели. Особенно необходимыми и плодотворными оказались нелинейные подходы в изучении и моделировании живых систем в биологии и экологии. Одной из наиболее известных эволюционных моделей является модель Мальтуса-Ферхюльста-Бернулли, согласно которой численность популяции изменяется в соответствии с уравнением

$$\dot{x} = rx - \beta x^{\mu+1}, \quad (1)$$

где r – темп роста популяции, а нелинейный член с коэффициентами $\beta>0$ и $\mu>0$ отвечает за ограничение роста, связанное с конечностью объема пищевых ресурсов и т.п. Реальную биологическую систему невозможно представить без учета флуктуаций окружающей среды, т.е. параметров r и β в уравнении (1). В работе анализируется модель, в которой оба параметра флуктуируют полностью коррелированно:

$$\dot{x} = [r + \xi(t)](x - x^{\mu+1}), \quad (2)$$

а в качестве случайного процесса $\xi(t)$ рассматриваются гауссов белый шум и марковский дихотомический шум.

Воспользуемся точным решением уравнения (2), имеющим вид

$$x(t) = \left[1 + (x_0^{-\mu} - 1) \cdot e^{-rt - \int_0^t \xi(\tau) d\tau} \right]^{-1/\mu}, \quad (3)$$

где $x_0=x(0)$ – начальное значение плотности популяции. В соответствии с центральной предельной теоремой интеграл от шума, входящий в точное решение (3) при больших временах наблюдения становится квазигaussianовым процессом. Тогда из (3) нетрудно получить выражение для вероятностного распределения плотности популяции для произвольного шума $\xi(t)$ с конечным временем корреляции τ_{cor} при временах $t \gg \tau_{cor}$

$$W(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S_\xi(0)t}} \frac{\mu}{x(1-x^\mu)} \exp\left\{-\frac{[rt + \ln(x^{-\mu} - 1) - \ln(x_0^{-\mu} - 1)]^2}{2S_\xi(0)t}\right\}, \quad 0 < x < 1, \quad (4)$$

где $S_\xi(\omega)$ – спектральная плотность мощности случайного процесса $\xi(t)$.

Очевидно, что в случае гауссова белого шума $\xi(t)$ с интенсивностью $S_\xi(\omega)=D$ формула (4) описывает эволюцию плотности вероятности во всех временах, т.к. $\tau_{cor}=0$. Как показывает анализ соотношения (4), с увеличением времени имеет место переход от начального унимодального распределения к финальному бимодальному (см. рис. 1). Момент времени t_c , при котором изменяется количество экстремумов вероятностного распределения, называется временем индуцированных шумом переходов [1]. Оно увеличивается с увеличением показателя нелинейности μ и уменьшается с увеличением интенсивности шума D .

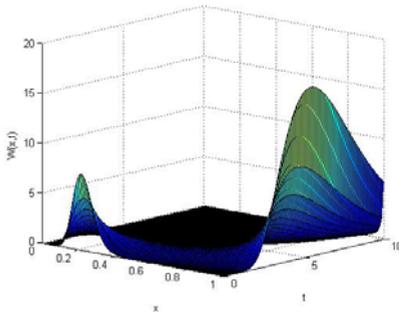


Рис. 1

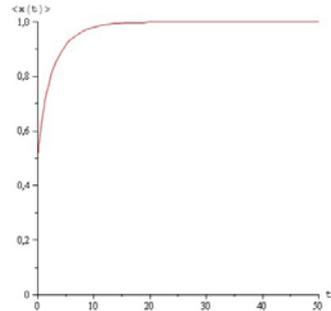


Рис. 2

Из выражения (4) и системы уравнений Фоккера-Планка в случае марковского дихотомического шума можно найти установившееся вероятностное распределение $W_\infty(x)$ плотности популяции. Это распределение для обоих типов шумов имеет два характерных, различных по высоте пика вблизи границ интервала, и поэтому может быть аппроксимировано двумя дельта-функциями с некоторыми весами

$$W_\infty(x) = p\delta(x+0) + q\delta(x-1+0), \quad p + q = 1. \quad (5)$$

Неизвестные коэффициенты p и q можно определить, например, из установившегося среднего значения плотности популяции, равного согласно (5)

$$\langle x \rangle_\infty = p \cdot 0 + q \cdot 1 = q. \quad (6)$$

Для этого необходимо найти зависимость среднего значения плотности популяции от времени. Как показывает расчет, $\langle x(t) \rangle$ в рассматриваемой системе (2) асимптотически приближается к 1 как в случае гауссова белого, так и марковского дихотомического шума (рис. 2). Поэтому, согласно (6), $q \approx 1$, $p \approx 0$, и можно сделать вывод, что высота максимума вблизи левой границы $x=0$ на больших временах становится существенно меньше высоты максимума вблизи правой границы $x=1$ для любых шумов $\zeta(t)$ с конечным временем корреляции, о чем свидетельствует рис. 1. Этот вывод подтверждается также результатами, полученными в работе [2] для гауссова цветного шума – процесса Орнштейна-Уленбека.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-02-01418).

- [1] Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions. – New York: Springer-Verlag, 1984. P.166.
- [2] Calisto H., Bologna M. // Phys. Rev. E. 2007. V.75. P.050103.