

АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ КАК СПЕКТРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СПАЙКОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Ю.В. Ушаков

Нижегородский госуниверситет

В статистической радиофизике под спектром традиционно понимается частотный спектр, т.е. совокупность частот тех синусоидальных компонент, суммой которых можно с нужной точностью аппроксимировать сигнал. В широком смысле спектр может означать множество значений энергии, множество отношений массы частицы к её заряду или даже множество собственных чисел дифференциального оператора. Таким образом, автокорреляционная функция (АКФ) сигнала может показывать спектр периодов периодических или квазипериодических его компонент, которые не обязательно должны быть гармоническими. Например, для спайковых последовательностей нервных клеток – сигналов, состоящих из игловидных импульсов (рис. 1) – представление сигнала суммой гладких синусоид оказывается просто нерациональным в силу необходимости бесконечного множества высокочастотных компонент для аппроксимации «игл». По этой причине нейрофизиологи охотнее пользуются более показательными распределениями межспайковых интервалов (РМСИ) как спектрами квазипериодических компонент сигналов нервных клеток.

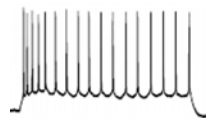


Рис. 1

В статьях Р. Cariani [1] рассматривается РМСИ *всех порядков*, которое строится как гистограмма распределения по длинам интервалов между двумя спайками (рис. 2) вне зависимости от того, сколько других спайков оказалось между ними. При этом делается довольно спекулятивное утверждение о «соответствии» между такой хитроумной характеристикой и АКФ спайковой последовательности. В настоящем исследовании была поставлена задача обосновать указанное утверждение с приемлемой степенью строгости.

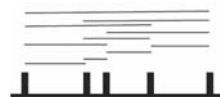


Рис. 2

Для её решения введём сложную случайную величину τ как сумму случайного числа N случайных межспайковых интервалов t_i :

$$\tau = \sum_{i=1}^N t_i. \quad (1)$$

Используя формулу полной вероятности, можно записать распределение этой величины следующим образом: $\Psi_{N_{\max}}(\tau) = \sum_{i=1}^{N_{\max}} P_i \rho_i(\tau)$, где $N_{\max}$ – максимальное рассматриваемое число случайных слагаемых в сумме (1); P_i – вероятность того, что τ состо-

ит из i слагаемых; $\rho_i(\tau)$ – плотность вероятности суммы этих случайных слагаемых, вычисляемая с помощью их совместной плотности. Полагая вероятности P_i равными между собой, что, по крайней мере, соответствует процедуре Р. Cariani, получаем

$$\Psi_{N_{\max}}(\tau) = \frac{1}{N_{\max}} \sum_{i=1}^{N_{\max}} \rho_i(\tau). \quad (2)$$

С другой стороны, в работе [2] выведено выражение АКФ спайковой последовательности через ту же сумму, только с другим постоянным множителем и дополнительным постоянным слагаемым. Таким образом, можно говорить о прямой пропорциональности между $\Psi_{N_{\max}}(\tau)$ и АКФ. Данная связь обеспечивает весьма удобный метод построения АКФ спайковых последовательностей в численном эксперименте, а выражение (2) удобно для теоретического анализа.

Так как РМСИ и, следовательно, АКФ являются более показательными характеристиками набора составляющих квазипериодических компонент специфических сигналов нервных клеток, выскажем предположение о том, что и теоретико-численный анализ соответствующих явлений может оказаться более эффективным в случае использования именно этого языка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-02-01418-а).

[1] Cariani P. // J. of New Music Research. 2001. V.30, №2. P.107.

[2] Chichigina O. A., Dubkov A. A., Valenti D., Spagnolo B. // Phys. Rev. E. 2011. V.84. P.021134.

АФФИННАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ НЕРАСПАДАЮЩИХСЯ КРИВЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.Б. Корчагин

Нижегородский госуниверситет

В неопубликованном черновике *Geometriae Libri Duo* [1] Ньютон описал классификацию нераспадающихся кривых третьего порядка, представленную в первом предложении следующей теоремы. При этом он описал классы 1.1) – 1.9) как плоские сечения кубического конуса $y^2z = x^3$; классы 2.1) – 2.14) как сечения конуса $y^2z = x^2(x + z)$; классы 3.1) – 3.12) как сечения конуса $y^2z = x^2(x - z)$; классы 4.1) – 4.9) как сечения конуса $y^2z = x[(x - az)^2 + z^2]$, где $a \in \mathbf{R}$; классы 5.1) – 5.15) как сечения конуса $y^2z = x(x + z)(x + az)$, где $a > 1$. Рисунки кривых третьего порядка, реализующие ньютоновы классы можно найти в [2]. Во втором предложении теоремы на основе классификации Ньютона [1] дана аффинная классификация кривых третьего порядка. Подробный текст с рисунками принят к печати и планируется к публикации в [3].

Теорема. Существуют только 59 ньютоновых классов аффинных нераспадающихся кривых третьего порядка, перечисленные в следующем списке пара-

метрических семейств канонических уравнений. Существуют только следующие аффинные классы нераспадающихся кривых третьего порядка: 15 классов модальности 0; 23 семейства (классов) модальности 1; 16 семейств модальности 2; 5 семейств модальности 3, перечисленные в следующем списке параметрических семейств канонических уравнений.

1.1) $y^2 = x^3$. 1.2) $y = x^3$. 1.3) $x^2y = 1$. 1.4) $x^2y = 1 - x$. 1.5) $(x-1)y^2 + x^3 = 0$. 1.6) $(x+1)y^2 = x^3$. 1.7) $(x-1)y^2 - ax^2y + x^3 = 0, 0 < a < 2$. 1.8) $y^2 - x^2y - x^3 = 0$. 1.9) $(x+1)y^2 - ax^2y + x^3 = 0, a > 0$.

2.1) $y^2 = x^2(x+1)$. 2.2) $(1-x/a)y^2 = x^2(x+1), a > 0$. 2.3) $(1-x)y^2 = x^2$. 2.4) $(1-x/a)y^2 = x^2(1-x), 0 < a < 1$. 2.5) $(x+1)(x-1)y + 1 = 0$. 2.6) $(x/a+1)y^2 = x^2(x+1), a > 1$. 2.7) $(x-1)y^2 = bx(x+a)(y-x), a > 0, 0 \leq b \leq 4$. 2.8) $(x-1)y^2 = ax(y-x), a > 0$. 2.9) $xy = (x-1)^3$. 2.10) $(x-1)y^2 = ax(y-x), a < -4$. 2.11) $(1-x)y^2 = bx(x-a)(y-x), a > 1, b > 0$. 2.12) $(x+1)(x-a)y + x = 0, a > 0$. 2.13) $(x+1)(x-a)y + x^2 = 0, a > 0, a \neq 1$. 2.14) $(x/a+1)y^2 - bx^2y = x^2(x+1), a > 0, b > 0$.

3.1) $y^2 = x^2(x-1)$. 3.2) $(1-x/a)y^2 = x^2(x-1), a > 1$. 3.3) $(x^2+1)y = x^2$. 3.4) $(x/a+1)y^2 = -x^2(x+1), 0 < a < 1$. 3.5) $(x+1)y^2 = -x^2$. 3.6) $(x/a+1)y^2 = x^2(x-1), 0 < a < 1/3$. 3.7) $(3x+1)y^2 = x^2(x-1)$. 3.8) $(x/a+1)y^2 = x^2(x-1), a > 1/3$. 3.9) $y(x^2+ax+1) = x, 0 \leq a < 2$. 3.10) $(1-x)y^2 + bx(x-a)(y-x) = 0, 0 < a < 1, 0 < b < 4$. 3.11) $(x+1)y^2 + ax(y+x) = 0, 0 < a < 4$. 3.12) $(x+1)y^2 - bx(x-a)(y+x) = 0,$

$$a > 0, b > 0, a < \frac{(a+1)(b+2 - \sqrt{b^2 + 4b})}{(a+1)\left(-b-2 - \sqrt{b^2 + 4b}\right) + 2(b+4)}.$$

4.1) $y^2 = x[(x-a)^2+1], a \in \mathbf{R}$. 4.2) $xy^2 = -(x+a)[(x-b)^2+1], a > 0, b \in \mathbf{R}$. 4.3) $xy^2 = -[(x-a)^2+1], a \in \mathbf{R}$. 4.4) $xy^2 = -(x-a)[(x-b)^2+1], a > 0, b < (a^2-4)/(4a)$. 4.5) $xy^2 = -(x-a)[(x-b)^2+1], a > 0, b = (a^2-4)/(4a)$. 4.6) $xy^2 = -(x-a)[(x-b)^2+1], a > 0, b > (a^2-4)/(4a)$. 4.7) $xy^2 = c[(x-a)^2+1](y+x-b), a \in \mathbf{R}, b \geq 0, -4 < c < 0$. 4.8) $xy^2 = -4[(x-a)^2+1](y+x-b), a \in \mathbf{R}, b \geq 0, b \neq 2a$. 4.9) $xy^2 = c[(x-a)^2+1](y+x-b), a \in \mathbf{R}, b \geq 0,$

$$\sqrt{c(c+1)(a^2+1)} < ac - 2b, \quad 0 < c < 2 \left[a^2 - ab + 1 + \sqrt{(a^2 - ab + 1)^2 + b^2} \right],$$

$$\frac{ac + 2b + \sqrt{\Delta(c)}}{c+4} < \frac{(c+4)(a^2+1)(\beta-b)}{(2a-b)^2 - (c+4)(a^2+1)(\alpha+1)}, \quad \Delta(c) = (ac-2b)^2 - c(c+4)(a^2+1),$$

$$\alpha = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4c}}{2}, \quad \beta = -c \left[a - \frac{a(c+2)+b}{\sqrt{c^2 + 4c}} \right].$$

5.1) $y^2 = x(x+1)(x+a), a > 1$. 5.2) $xy^2 = -(x+1)(x+a)(x+b), 1 < a < b$. 5.3) $xy^2 = -(x+1)(x+a), a > 1$. 5.4) $xy^2 = -(x+a)(x+1)(x-b), a > 1, b > 0$. 5.5) $xy^2 = (x+1)(x-a), a > 0$. 5.6) $xy^2 = -(x+1)(x-a)(x-b), 0 < a < b$. 5.7) $xy^2 = -(x-1)(x-a), a > 1$. 5.8) $xy^2 = (x-a)(x-1)(x-b), 0 < a < 1 < b, b > (\sqrt{a}+1)^2$. 5.9) $xy^2 = (x-a)(x-1)(x-b), 0 < a < 1, b = (\sqrt{a}+1)^2$. 5.10) $xy^2 = (x-a)(x-1)(x-b), 0 < a < 1 < b, b < (\sqrt{a}+1)^2$. 5.11) $xy^2 = c(x+1)(x+a)(x+y-b), a > 1, b > -1, -4 < c < 0$. 5.12) $xy^2 = b(x+1)(x+y-b), a > -1, b \in \mathbf{R}$. 5.13) $xy^2 = c(x+1)(x-a)(x+y-b), a > 0, -1 < b < a, c > 0$. 5.14) $xy^2 = -4(x+1)(x+a)(x+y-b), a > 1, b > -1$. 5.15) $xy^2 = c(x-1)(x-a)(x+y-b),$

$$0 < a < 1 < b, c > 0, \frac{ac(\beta - b)}{\beta^2 - c[a(\alpha + 1) - (a + 1)(\beta - b)]} > \frac{c(a + 1) + 4b + \sqrt{\Delta(c)}}{2(c + 4)}, \quad \alpha = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4c}}{2},$$

$$\beta = \frac{c[b + (a + 1)(\alpha + 1)]}{c - 2\alpha}, \quad \Delta(c) = [c(a - 1) + 4b]^2 + 16c(b - a).$$

Информацию о кривых третьего порядка и ссылки на многочисленную литературу о них можно найти в [4].

- [1] Newton I. The Final 'Geometriae Libri Duo', in The Mathematical Papers of Isaac Newton (D.T. Whiteside, ed.) – Cambridge Univ. Press, 1976, V.7. P.402.
- [2] Korchagin A.B., Weinberg D.A. // Rocky Mountain J. of Math. 2005. V.35, No.5. P.1627.
- [3] Корчагин А.Б. // А&А. 2012. Т.24, № 5.
- [4] Смогоржевский А.С., Столова Е.С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. – М.: Физматгиз, 1961.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ШАРА ЧАПЛЫГИНА НА ПЛОСКОСТИ

И.И. Овсянников

Нижегородский госуниверситет

Шар Чаплыгина – это динамически несимметричный шар, центр масс которого совпадает с геометрическим. В настоящей работе изучается устойчивость движений такого шара на плоскости при произвольном законе трения.

Задача о движении динамически несимметричного шара привлекает внимание исследователей более ста лет. Первые результаты, описывающие движение такого шара на абсолютно шероховатой поверхности (консервативный случай, без проскальзывания), были получены С.А. Чаплыгиным в знаменитой работе [1], где данная задача была полностью проинтегрирована в квадратурах. Также им было показано, что вращение шара относительно главных осей наибольшего и наименьшего моментов инерции устойчиво, а относительно среднего – неустойчиво. Но конкретный характер движения шара на абсолютно шероховатой плоскости в работе [1] детально не изучался. Траектории движения шара Чаплыгина были исследованы А.А. Килиным в работе [2], где также были построены соответствующие диаграммы Смейла.

Практически в одно и то же время с С.А. Чаплыгиным задачу движения динамически несимметричного шара на плоскости с трением (с проскальзыванием) рассматривал Э.Дж. Гэллоп в статье [3]. Однако в этой работе он не учитывал возможность качения шара, и, тем самым, делал ошибку в определении финальных (стационарных) движений. Гэллоп утверждал, что ось вращения шара должна под действием трения подниматься к вертикальному положению. Относительно устойчивости таких движений он получил, что вращение шара будет устойчивым только

вокруг наибольшего момента инерции, а вокруг среднего и наименьшего – неустойчивым.

В работах [4, 5] Н.К. Мошукон было проведено исследование движения шара Чаплыгина на плоскости с вязким трением. В этих работах показано, что стационарным движением шара является такое движение, когда шар катится по прямой без проскальзывания, вращаясь вокруг одной из главных осей. С помощью усреднения по такому вращению, считая коэффициент трения малым параметром, Мошук получил усредненные уравнения движения шара и показал, что в первом приближении вращение вокруг наибольшего момента инерции устойчиво, вокруг среднего и наименьшего – неустойчиво. В настоящей работе исследуется более общая задача, а именно шар Чаплыгина на плоскости с трением, причем закон трения может быть произвольным. Выведены точные условия устойчивости стационарных движений.

Рассматривается шар, имеющий массу m , радиус R , а также обладающий тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$, причем $A > B > C$. Уравнения движения имеют следующий вид в подвижной системе отсчета, связанной с самим шаром:

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} + [\omega, m\mathbf{v}] &= \mathbf{F} \\ \mathbf{J}\dot{\omega} + [\omega, \mathbf{J}\omega] &= -R[\gamma, \mathbf{F}] \\ \dot{\gamma} + [\omega, \gamma] &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{v}, \gamma) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь γ – вектор нормали к опорной плоскости в точке касания, $\mathbf{F}$ – сила трения. Система (1) допускает 3 интеграла: $(\gamma, \gamma) = 1$, $(\mathbf{J}\omega, \gamma) = G$, $(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = K^2$, где $\mathbf{K} = \mathbf{J}\omega + mR[\gamma, \mathbf{v}]$ – момент импульса системы относительно точки касания. Согласно модифицированной теории Рауса, стационарные движения доставляют стационарные значения полной механической энергии системы при условии сохранения постоянных приведенных интегралов. Исходя из этого, получаем, что стационарными являются движения, при которых шар вращается вокруг одной из главных осей и катится по прямой без проскальзывания, а также можем выразить параметры этого движения через константы m, R, G, K и момент инерции соответствующей оси (A, B или C).

Тип устойчивости стационарных движений определяем с помощью критерия Сильвестра, а именно – исследуем полную энергию системы на условный экстремум на пересечении многообразий, отвечающих постоянным значениям интегралов системы (1). В итоге получаем, что вращение вокруг оси наибольшего момента A доставляет полной энергии строгий локальный минимум (соответствующая квадратичная форма положительно определена), поэтому такое движение устойчиво. Вращения же вокруг осей среднего B и наименьшего C моментов неустойчивы, поскольку минимум не доставляют. Данный результат согласуется с результатами работ [3–5].

Работа поддержана грантом Правительства РФ No.11.Г34.31.0039.

- [1] Чаплыгин С.А. // Матем. сб. 1903. Т.24. С.139.
- [2] Kilin A.A. // Regul. Chaotic. Dyn. 2001. V.6, No.3. P.291.
- [3] Gallop E.G. // Proc. Cambr. Phylos. Soc. 1904. V.19, pt.3. P.356.

- [4] Мощук Н.К. // Прикл. мат. и мех. 1983. Т.47, вып.6. С.916.
 [5] Мощук Н.К. // Прикл. мат. и мех. 1985. Т.49, вып.1. С.66.
 [6] Карапетян А.В., Рубановский // Прикл. мат. и мех. 1986. Т.50, вып.1. С.43.

ПРОСТАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

О.А. Чичигина¹⁾, А.А. Дубков²⁾

¹⁾Московский госуниверситет

²⁾Нижегородский госуниверситет

Винеровский процесс, служащий математической моделью броуновского движения, скорость частицы, испытывающей упругие столкновения со случайно осциллирующими стенками двумерного бильярда, число насекомых в термитнике и другие процессы в физике, динамике популяций, экономике обладают статистическими характеристиками, линейно нарастающими во времени.

В настоящей работе изучается интерпретируемое в смысле Стратоновича стохастическое уравнение Ланжевена для полной скорости частицы, движущейся в двумерном бильярде с флуктуирующими границами,

$$\dot{v} = a - \frac{b^2}{4} + b\sqrt{v}\xi(t), \quad (1)$$

реконструированное из ранее полученного в [1] для достаточно больших времен уравнения Фоккера-Планка. Здесь: $\xi(t)$ – белый гауссов шум с нулевым средним значением и единичной интенсивностью, a и b – некоторые положительные параметры. Заменяя в (1) $\xi(t)$ негауссовым белым шумом и следуя методике работы [2], приходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению Колмогорова для плотности вероятности $P(v, t)$ скорости частицы

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{b^2}{4} - a \right) \frac{\partial P}{\partial v} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(z)}{z^2} \left[\cosh \left(bz \frac{\partial}{\partial v} \sqrt{v} \right) - 1 \right] P(v, t) dz, \quad (2)$$

где $\rho(z)$ – некоторая четная неотрицательная функция, описывающая статистику $\xi(t)$.

Найти асимптотическое решение уравнения (2) достаточно сложно, поэтому удобно обратиться к уравнениям для моментов. Умножение обеих части (2) на v^n и интегрирование по v в бесконечных пределах дает бесконечную систему уравнений для моментов скорости частицы

$$\frac{d}{dt} \langle v^n \rangle = n \left[a + (n-1) \frac{b^2}{2} \right] \langle v^{n-1} \rangle + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_{2k} b^{2k+2}}{(2k+2)!} n \left(n - \frac{1}{2} \right) \times \dots \times \left(n - k - \frac{1}{2} \right) \langle v^{n-k-1} \rangle, \quad (3)$$

где $f_{2k} > 0$. Из системы (3) для достаточно больших времен находим приближенное выражение для момента скорости произвольного порядка

$$\langle v^n(t) \rangle \cong \left(\frac{at}{\gamma} \right)^n \frac{\Gamma(\gamma + n)}{\Gamma(\gamma)}, \quad (4)$$

где $\gamma = 2a/b^2$. Отсюда, в частности, следует наличие в рассматриваемой системе (1) ускорения Ферми: $\langle \dot{v} \rangle = at$. Используя известное разложение характеристической функции по моментам, с помощью (4) получаем:

$$\theta(k, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle v^n(t) \rangle \cong \frac{1}{(1 - ikat/\gamma)^\gamma}. \quad (5)$$

«Обращение» по Фурье выражения (5) приводит к следующему асимптотическому результату для плотности вероятности скорости частицы

$$P(v, t) \cong \frac{1}{v\Gamma(\gamma)} \left(\frac{\gamma v}{at} \right)^\gamma \exp\left(-\frac{\gamma v}{at}\right). \quad (6)$$

Заметим, что аналогичный результат был получен в [1, 3] из решения уравнения Фоккера-Планка. Таким образом, как видно из формулы (6), статистика белого шума $\xi(t)$ в уравнении (1) не влияет на форму асимптотического вероятностного распределения скорости частицы. Характерные зависимости плотности вероятности (6) от скорости v для различных времен $t=10, 20, 30$ ($\gamma=2$) представлены на рис. (сверху вниз).

Из уравнения (1) Покажем, когда имеет место эффект ускорения Ферми в случае стационарного цветного шума $\xi(t)$. В предположении $a=b^2/4$ можно записать точное решение уравнения (1)

$$v(t) = \left(\sqrt{v(0)} + \sqrt{a} \int_0^t \xi(\tau) d\tau \right)^2, \quad (7)$$

из которого для достаточно больших t имеем

$$\langle v(t) \rangle \cong 2at \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t} \right) K_\xi(\tau) d\tau \cong S_\xi(0)at. \quad (8)$$

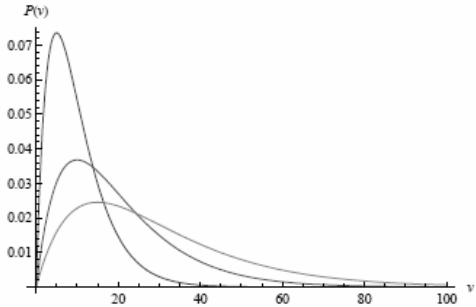


Рис.

Таким образом, для наблюдения ускорения Ферми в спектре шума $S_{\xi}(\omega)$ должны присутствовать медленные компоненты.

- [1] Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Акиншин Л.Г. //ЖЭТФ. 1999. Т. 116. С. 1781.
- [2] Dubkov A., Spagnolo B. //Fluct. Noise Lett. 2005. V. 5. P. L267.
- [3] Loskutov A., Chichigina O., Krasnova A., Sokolov I. //Europhys. Lett. 2012. V. 98. P. 10006.

ВЫЯВЛЕНИЕ МУЛЬТИГРАФА ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СВЯЗАННОСТИ В СЕТЯХ ОТОБРАЖЕНИЙ ВРЕМЕНИ ПО РЕАЛИЗАЦИИ МНОГОМЕРНОГО ТОЧЕЧНОГО ПРОЦЕССА

И.С. Прокин^{1,2)}, В.Б. Казанцев^{1,2)}

¹⁾Нижегородский госуниверситет

²⁾Институт прикладной физики РАН

Одним из перспективных направлений исследования динамики сетевых систем является построение графов [1]. В нейросетевых системах, элементы которых хоть и могут иметь непрерывную внутреннюю динамику, активность выражается в виде времен возникновения коротких импульсов возбуждения, и может быть описана в виде сетевых точечных отображений.

В работе мы предлагаем метод, позволяющий выявить мультиграф функциональных связей в сети по генерируемой нейронной сетью реализации многомерного точечного процесса. Введем $X_j(t)$ – бинарную функцию дискретного времени, представляющую j -ю компоненту реализации многомерного точечного процесса. Определим оператор похожести для бинарных функций:

$$X(t_1) \& Y(t_2) = \max_{t \in [t_2 - \eta, t_2 + \eta]} \left(X(t_1)Y(t) \exp \left[-\left(\frac{t - t_2}{\eta/2} \right)^2 \right] \right), \quad (1)$$

где η – ширина окна поиска сходства. Через оператор похожести вводится мера похожести компонент реализации (каналов) i и j :

$$\sigma_{ij}(\tau) = \sqrt{\frac{1}{K_i^{[\tau + \eta, T]}} \sum_{t=\tau+\eta}^T X_i(t) \& X_j(t - \tau)} \sqrt{\frac{1}{K_j^{[0, T - \tau - \eta]}} \sum_{t=0}^{T - \tau - \eta} X_j(t) \& X_i(t + \tau)}, \quad (2)$$

где τ – временная задержка между каналами, в пределах которой сравниваются каналы, а

$$K_j^{[t_1, t_2]} = \sum_{t=t_1}^{t_2} X_j(t).$$

Каждый пик функции $\sigma_{ij}(\tau)$ мы тестируем на статистическую значимость с помощью суррогатных данных, которые для каждой пары каналов получаются сдвигом одноканальных реализаций друг относительно друга. Полученные таким образом суррогаты сохраняют автокорреляционные характеристики исходных сигналов, но разрушают взаимные характеристики при значении τ , соответствующему тести-

руемому максимуму. Далее для каждого пика строится вероятностное распределение суррогатных похожестей $W(\sigma)$. Пик считается значимым при выполнении условия

$$\sum_{\sigma \geq D\sigma_{\text{peak}}} W(\sigma) < \alpha, \quad 0 < D < 1, \quad (3)$$

где α – вероятность определить связь при ее отсутствии, D – фактор, определяющий строгость условия (3). Зафиксируем $\alpha=0,05$ и $D=0,5$. В результате получаем набор значимых пиков $\{(\sigma_{ij})_k = \sigma_{ij}(\tau=(\tau_{ij})_k), k \in V_{ij}\}$ и соответствующих задержек $\{(\tau_{ij})_k, k \in V_{ij}\}$, где V_{ij} – множество индексов, нумерующих все значимые пики для пары каналов (j,i) . Каждый значимый пик отождествляется с наличием связи $(j \rightarrow i)_k$, где $(\sigma_{ij})_k$ рассматривается как оценка вероятности передачи импульсов, а $(\tau_{ij})_k$ как оценка задержки передачи импульса по связи.

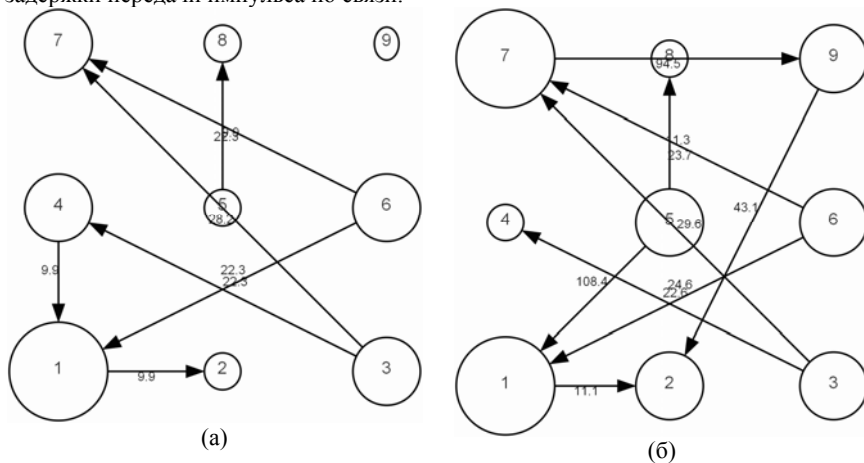


Рис.

Метод был применен к данным модельной сети из 9 осцилляторов типа «нейрон-интегратор» с динамическими связями (эффективная сила связи уменьшается с увеличением частоты следования импульсов) [2]. Граф связности, взвешенный временами передачи импульсов по связям в миллисекундах, приведен на рис., а. Рис., б показывает восстановленный по реализации 9-мерного точечного процесса граф функциональной связности. Размер узла графа на рисунке пропорционален степени узла.

Установлено, что предложенный метод позволяет выявлять мультиграфы функциональных связей в низкоразмерных сетях отображений времени по реализациям многомерных точечных процессов.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-04-12144, ФЦП (14.740.11.0075, 16.512.11.2136), программой МКБ РАН, грантом Президента РФ MD-5096.2011.2.

[1] Afraimovich V.S., Bunimovich L.A. // Nonlinearity. 2007. V.20, No.7. P.1761.

[2] Прокин И.С., Казанцев В.Б. // Изв. вузов. Радиофизика. 2011. Т.54, №11. С.848.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПЛОТНОСТЕЙ ДВУМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КЛАССА ФРЕШЕ

А.Т. Гаврилин

Нижегородский госуниверситет

Пусть двумерное распределение вероятностей абсолютно непрерывно относительно лебеговой меры плоскости $R^2 \equiv X \times Y$, $w_{12}(x,y)$ – его плотность, а $w_1(x)$, $w_2(y)$ – плотности маргинальных распределений. В случае $w_{12}(x,y)$, $w_1^{-1/2}(x)$, $w_2^{-1/2}(y) \in L_2(R^2)$ и определенности проблемы моментов [1] для $w_{12}(x,y)$ (возможности однозначно восстановить двумерное распределение по смешанным моментам) имеет место разложение

$$w_{12}(x,y) = w_1(x)w_2(y) \sum_{m,n} \lambda_{mn} P_m(x) Q_n(y), \quad (1)$$

где $P_m(x)$, $Q_n(y)$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$) – ортонормированные с весами $w_1(x)$ и $w_2(y)$, соответственно, системы алгебраических многочленов, а

$$\lambda_{mn} = \int_{R^2} P_m(x) Q_n(y) w_{12}(x,y) dx dy. \quad (2)$$

Классом Фреше называется класс двумерных плотностей вероятности, для которых в разложении (1) $\lambda_{mn} = \lambda_m \delta_{mn}$, где δ_{mn} – символ Кронекера.

Теорема. Для того чтобы двумерная плотность вероятности принадлежала классу Фреше, необходимо и достаточно, чтобы введенные выше полиномы $P_m(x)$, $Q_n(y)$ являлись собственными функциями интегральных операторов:

$$\int_{Z \setminus Y} p(z|y) q(y|x) dy \left[P_k(z) dz = \lambda_k^2 P_k(x), \right. \quad (3)$$

$$\left. \int_{Z \setminus X} q(z|x) p(x|y) dx \right] Q_k(z) dz = \lambda_k^2 Q_k(y), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $p(x|y) = w_{12}(x,y)/w_1(y)$, $q(y|x) = w_{12}(x,y)/w_1(x)$ – плотности условных распределений, а собственные значения λ_k^2 определяются выражением (2).

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть матрица $\{\lambda_{mn}\}$ в разложении (1) диагональна. Тогда

$$w_{12}(x,y) = w_1(x)w_2(y) \sum_n \lambda_n P_n(x) Q_n(y), \quad (5)$$

Умножим (5) поочередно на $P_k(x)$ и на $Q_k(y)$, после чего проинтегрируем полученные произведения по соответствующим лебеговым мерам X и Y . В результате получим

$$\int_X w_{12}(x,y) P_k(x) dx = \lambda_k Q_k(y) w_2(y), \quad (6)$$

$$\int_Y w_{12}(x, y) Q_k(y) dy = \lambda_k P_k(x) w_1(x). \quad (7)$$

Беря выражение для $Q_k(y)$ из правой части (6) и подставляя его в левую часть (7), имеем

$$\int_Z \left[\int_Y \frac{w_{12}(z, y)}{w_2(y)} \frac{w_{12}(x, y)}{w_1(x)} dy \right] P_k(z) dz = \lambda_k^2 P_k(x),$$

что совпадает с (3). Аналогично получаем

$$\int_Z \left[\int_X \frac{w_{12}(x, z)}{w_1(x)} \frac{w_{12}(x, y)}{w_2(y)} dx \right] Q_k(z) dz = \lambda_k^2 Q_k(y)$$

Необходимость доказана.

2) Достаточность. Пусть выполняются соотношения (3) и (4). Перепишем их в следующем виде:

$$\int_Z \left[\int_Y \frac{w_{12}(z, y)}{\sqrt{w_1(z)w_2(y)}} \frac{w_{12}(x, y)}{\sqrt{w_1(x)w_2(y)}} dy \right] \sqrt{w_1(z)} P_k(z) dz = \lambda_k^2 \sqrt{w_1(x)} P_k(x), \quad (8)$$

$$\int_Z \left[\int_X \frac{w_{12}(x, z)}{\sqrt{w_1(x)w_2(z)}} \frac{w_{12}(x, y)}{\sqrt{w_1(x)w_2(y)}} dx \right] \sqrt{w_2(z)} Q_k(z) dz = \lambda_k^2 \sqrt{w_2(y)} Q_k(y). \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что ядра интегральных уравнений (8) и (9) представляют собой ядра Шмидта [2, с.73] для ядра $\frac{w_{12}(x, y)}{\sqrt{w_1(x)w_2(y)}}$, следовательно, симметричны и

положительно определены. Их собственными функциями являются $\sqrt{w_1(x)} P_k(x)$ и $\sqrt{w_2(y)} Q_k(y)$, а собственные значения совпадают и равны λ_k^2 . Тогда для исходного ядра $\frac{w_{12}(x, y)}{\sqrt{w_1(x)w_2(y)}}$ справедливо представление в виде сходящегося в средне-

квадратичном по мере $w_1(x)w_2(y)dx dy$ билинейного ряда собственных функций

$$w_{12}(x, y) / \sqrt{w_1(x)w_2(y)} = \sqrt{w_1(x)} \sqrt{w_2(y)},$$

что эквивалентно (1). Достаточность, а с ней и теорема доказаны.

Работа частично поддержана министерством промышленности и инноваций Нижегородской области (грант РФФИ – Поволжье 08-07-97016).

- [1] Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз, 1961, 310 с.
 [2] Забрейко П.П. и др. Интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1968, 446 с.