
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

**ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ
С РАЗРЫВНОЙ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ**

В.Н. Кошелев

Нижегородский госуниверситет

Рассматривается задача на экстремум функционала

$$I[Y] = \int_a^b F(x, Y, Y', Y'') dx,$$

где $Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$. Подынтегральное выражение удовлетворяет условиям:

1) F определена и непрерывна вместе со своими частными производными до третьего порядка включительно;

2) существует предел

$$\lim_{\|Y''\| \rightarrow +\infty} \frac{F(x, Y, Y', Y'')}{\|Y''\|} = \begin{cases} 0, & x = x_0 \in (a, b), \\ \infty, & x \neq x_0. \end{cases}$$

Класс допустимых функций. Допустимые функции удовлетворяют условиям:

а) $Y(x) \in C[a, b]$,

б) $y'_k(x), k = 1, 2, \dots, n$ непрерывны всюду на $[a, b]$, за исключением точки x_0 , в которой терпят разрыв 1-го рода,

в) функции $y_k(x) \in C^4([a, b] \setminus x_0)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Если функционал $I[Y]$ достигает экстремума на векторной функции $Y(x)$, то необходимо выполняются условия:

$$\begin{cases} F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y'_k} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''_k} = 0, \\ k = 1, 2, \dots, n, \quad x \in (a, x_0 - 0), \quad x \in (x_0 + 0, b), \end{cases} \quad (1)$$

$$F_{y'_k} - \frac{d}{dx} F_{y''_k} \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$F_{y''_k} \Big|_{x_0-0} = 0, \quad F_{y''_k} \Big|_{x_0+0} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$y(x_0 - 0) = y(x_0 + 0). \quad (4)$$

Пример. Исследовать на экстремум функционал

$$I[y, z] = \int_{-1}^{+1} x^2 (y'^2 + z'^2) dx$$

при условиях:

$$y(-1) = 1, y(+1) = 1, z(-1) = 1, z(+1) = 1, \\ y'(-1) = -1, y'(1) = 1, z'(-1) = -1, z'(1) = 1.$$

Предполагаемая точка разрыва $x_0 = 0$. Очевидно, что экстремаль должна удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}(2x^2 y'') = 0, & \frac{d^2}{dx^2}(2x^2 z'') = 0, \\ x \in (-1, 0), & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Общее решение первого уравнения на интервалах непрерывности имеет вид

$$y = \begin{cases} C_1 x \ln|x| + C_2 \ln|x| + C_3 x + C_4, & x \in (-1, 0), \\ C_5 x \ln|x| + C_6 \ln|x| + C_7 x + C_8, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Используя граничные условия $y(-1) = 1, y(+1) = 1, y'(-1) = -1, y'(1) = 1$, условие непрерывности $y(-0) = y(+0)$ и условия трансверсальности (2) и (3), находим неопределенные коэффициенты

$$C_1 = C_2 = C_4 = 0, C_3 = -1, C_5 = C_6 = C_8 = 0, C_7 = 1.$$

Таким образом, $y = |x|$. Аналогично $z = |x|$ и функционал принимает минимальное значение на паре функций $y = |x|, z = |x|$:

$$I_{\min} = I[|x|, |x|] = 0.$$

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛЕДОВОГО ПОКРОВА

Д.С. Демидова^{1,2)}, Б.В. Кержаков²⁾, В.В. Кулинич^{1,2)}

¹⁾Нижегородский госуниверситет

²⁾Институт прикладной физики РАН

Целью работы является исследование методом численного моделирования возможности оценки некоторых акустических параметров ледового покрова, лежащего на водном слое, на основе анализа пространственной структуры акустического поля, создаваемого источниками излучения, располагающимися в толще льда. Указанная задача является частью более широкой и актуальной проблемы, связанной с оценкой структуры и характеристик среды распространения на основе анализа регистрируемых полей. Исследования выполнены в низкочастотном диапазоне путем использования прямых поисковых алгоритмов [1] и метода сверхбыстрого отжига [2].

В сравнительно недавнем прошлом решение таких задач представлялось безнадежным с точки зрения вычислений, однако теперь с развитием вычислительной техники важные для приложений задачи допускают применение численных методов. При моделировании рассматривались два варианта расположения приемной системы: первый – приемная система расположена вертикально в жидком слое на заданном расстоянии от источника и второй – приемная система расположена гори-

зонтально на поверхности упругого слоя на заданном расстоянии от источника. В качестве целевой функции использовался функционал

$$J = \sum_{i,k} |P(r_i, z_k, b) - P^{ex}(r_i, z_k)|^2,$$

где $P(r_i, z_k, b)$ – вычисляемое звуковое поле тонального точечного источника, расположенного в упругой среде, в точках приема (r_i, z_k) , b – вектор определяемых параметров среды, включающий глубину расположения источника излучения z_s , скорости распространения продольных v_c и поперечных v_s волн, и толщину упругого слоя h . $P^{ex}(r_i, z_k)$ – экспериментально полученное звуковое поле от точечного источника, расположенного на глубине 4 м в ледовой пластине толщиной 6 м с акустическими параметрами: скорость продольных волн 3000 м/сек, скорость поперечных волн 1400 м/сек, плотность 0,9 г/см³.

На рис. 1, 2 отображены минимальные значения целевой функции при оценке вектора параметров b в зависимости от глубины погружения приемной системы от нижней границы упругого слоя как в отсутствии (рис. 1), так и при наличии шумов (рис. 2). Оценки проводились на частоте 50 Гц при уровне шума, составляющем 5% от уровня сигнала. Вертикальная приемная система состояла из 5 элементов, разнесенных на $\lambda/2$, и располагалась на дальности 500 м от источника излучения. Как показывают результаты моделирования (рис. 1, 2), эффективность метода существенно зависит от пространственного положения приемной системы. Существует ряд положений этой системы, при которых глобальный экстремум целевой функции не достигается. Отбрасывая результаты со значением целевой функции больше, чем 0,1 в отсутствии шумов, при усреднении оставшихся получаем следующие значения оценок параметров модели: $z_s = 4$ м, $h = 6$ м, $v_s = 1400,3$ м/с, $v_c = 2999,4$ м/с; при этом средняя относительная ошибка в определении параметров составляет 0,03%.

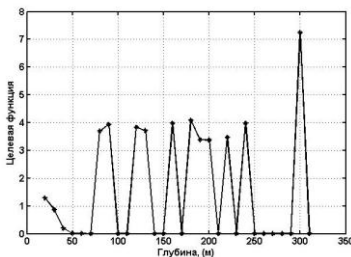


Рис. 1. Значение целевой функции в зависимости от глубины расположения приемной системы на дальности 500 м от источника в отсутствие шумов.

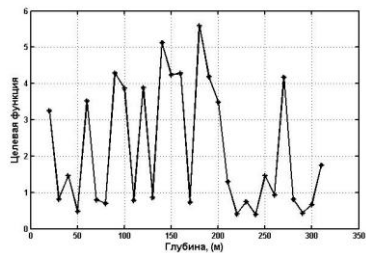


Рис. 2. Значение целевой функции в зависимости от глубины расположения приемной системы на дальности 500 м от источника при наличии шумов.

При использовании только результатов со значением меньше, чем 0,8 для целевой функции в присутствии шумов, были получены значения восстановленных

параметров модели: $z_s = 4$ м, $h = 6$ м, $v_s = 1400,3$ м/с, $v_c = 3007,6$ м/с. Средняя относительная ошибка в определении параметров в данном случае составила 0,3%.

При использовании горизонтальной приемной системы, располагающейся на поверхности упругого слоя, как показали результаты численного моделирования, средняя относительная погрешность оценок восстанавливаемых параметров модели увеличивается по сравнению с погрешностями оценок при использовании вертикальной антенны до 5% в отсутствии шумов и до 10% в присутствии шума.

[1] Nelder J.A., Mead R. //Comp. J. 1965. V. 7. P. 308.

[2] Ingber L. //Mathem. and J. of Comp. Mathem. 1995. V. 56. P. 161.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ МЕЖСПАЙКОВЫХ ИНТЕРВАЛОВ НЕЙРОСИСТЕМЫ

Ю.В. Ушаков, Е.С. Карандасов

Нижегородский госуниверситет

В последнее время тема стохастических явлений в моделях биологических систем привлекает все большее внимание учёных, поскольку, во-первых, пренебрежение шумом не всегда возможно, а во-вторых, некоторые ключевые эффекты функционирования нередко обусловлены именно шумом [1–4].

Настоящая работа посвящена исследованию стохастических эффектов в модели нейроансамбля слухового анализатора млекопитающих, состоящей из трёх элементов. Математически модель описывается с помощью трёх ланжевеновских уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -\mu_1 v_1 + A_1 \cos \Omega_1 t + \sqrt{D_1} \xi_1(t), \\ \dot{v}_2 = -\mu_2 v_2 + A_2 \cos \Omega_2 t + \sqrt{D_2} \xi_2(t), \\ \dot{v} = -\mu v + k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t) + \sqrt{D} \xi(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $v_{1,2}(t)$ – мембранные потенциалы сенсорных нейронов (сенсоров); $v(t)$ – мембранный потенциал промежуточного нейрона (интернейрона); $\xi_{1,2}(t)$ и $\xi(t)$ – статистически независимые белые гауссовы шумы; $s_{1,2}(t)$ – последовательности дельта-импульсов (спайков), генерируемых сенсорами при достижении порога генерации потенциалами $v_{1,2}(t)$. Такой же порог ограничивает мембранный потенциал интернейрона. При достижении порога генерации мембранные потенциалы сбрасываются в фиксированные значения, что означает нелинейность системы. Остальные параметры модели являются постоянными и подробно описываются в работе [5].

Под действием гармонических сигналов каждый из сенсоров генерирует спайковую последовательность с распределением межспайковых интервалов (РМСИ), состоящим из убывающих по высоте пиков. В настоящей работе было численно показано, что при варьировании шумовой интенсивности $D=D_1=D_2$ в системе (1), по

крайней мере, для некоторых пиков РМСИ сенсоров можно найти значения D , при которых их высоты максимальны. Такой эффект называют стохастическим резонансом [2]. При рациональном отношении частот Ω_1/Ω_2 РМСИ спайковой последовательности интернейрона тоже состоит из выраженных пиков. В данной работе предполагалось продемонстрировать существование эффекта стохастического резонанса на выходе интернейрона, а также установить, проявляется ли он при тех же, что и для сенсоров, или смещённых значениях интенсивности шума.

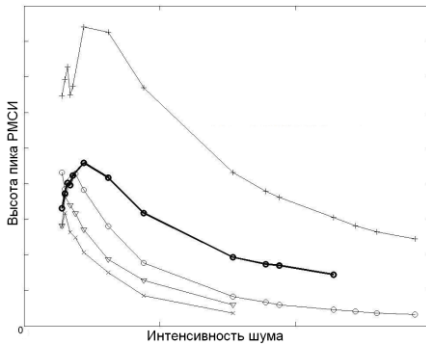


Рис.

эффект стохастического резонанса. Во-вторых, нетрудно видеть, что максимум жирной линии имеет место при шумовой интенсивности отличной от тех, при которых максимальны высоты пиков РМСИ сенсоров (тонкие линии с крестиками и кружочками). Видно, что максимум жирной линии располагается между максимумами тонких линий. Фактически можно утверждать, что в подобных многослойных системах резонансные интенсивности шума смещаются при преобразовании сигналов на различных уровнях (сенсоров или интернейронов). В дальнейшем планируется выяснить чёткие правила таких смещений, основываясь на теоретических подходах, выработанных в статье [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы», госконтракт №П457.

- [1] Chialvo D.R. // *Chaos*. 2003. V. 13. No. 4. P. 1226.
- [2] Balenzuela P. // *Chaos*. 2005. V. 15. P. 023903-1.
- [3] Fishman Y.I., Volkov I.O., Noh M.D., et al. // *J. Neurophysiol.* 2001. V. 86. P. 2761.
- [4] Plomp R., Levelt W.J.M. // *J. of the Acoustical Society of America*. 1965. V. 38. P. 548.
- [5] Ушаков Ю. В. // *Вестник ННГУ*. 2010. № 4. С. 67.

К ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКЕ ФЕЙНМАНОВСКОГО ФОРМАЛИЗМА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

А.Т. Гаврилин

Нижегородский госуниверситет

В работе [1] был предложен способ материальной реализации интегралов Фейнмана [2], область интегрирования которых состоит из конечного числа параметризованных путей. Ниже этот способ предлагается применить для проверки корректности самой фейнмановской конструкции. Заметим, что допущение областей интегрирования, отличных от счетной декартовой степени конфигурационного пространства электрона (рассмотренной Дираком еще в 1933 г. [3]), означает широкое обобщение квантовомеханического формализма. Из уравнения Шредингера следует лишь дираковский случай области интегрирования.

Пусть точечный источник электронов характеризуется радиус-вектором \mathbf{r}_0 и моментом испускания t_0 , а детектор – соответственно радиус-вектором \mathbf{r}_d и моментом фиксации t_d ($t_0 < t_d$). Пусть, кроме того, пространственно-временные точки (\mathbf{r}_0, t_0) и (\mathbf{r}_d, t_d) разделены семейством непересекающихся пространственно-временных экранов (ПВЭ), т.е. непроницаемых для электронов материальных образований, которые в пространстве-времени моделируются трехмерными гиперповерхностями. Если ПВЭ сплошные, а электроны, согласно Фейнману, точечные объекты, допускающие лишь локальное взаимодействие с полем, то вероятность обнаружения электрона детектором равна нулю. Поэтому будем предполагать, что каждый ПВЭ имеет выколотое многообразие вида $t = \text{const}$, которое в [1] названо транзит-событием. Более точно: протяженность транзит-события в направлении временной оси не должна превышать в некоторых сопоставимых единицах пространственной толщины ПВЭ.

Достаточно реалистичной материальной моделью ПВЭ является вспышка поглощающего электроны поля во всем пространстве за исключением небольшого числа микроскопически малых ячеек. Через такой ПВЭ в будущее «прорывается» лишь электрон, оказывающийся в момент вспышки поля в одной из упомянутых ячеек. Последовательность следующих друг за другом без пауз вспышек поля подобной конфигурации отбирает из ансамбля испущенных электронов некоторое подмножество, которое может быть зафиксировано детектором.

Отношение числа электронов, зафиксированных детектором, к общему числу испущенных электронов в массовой совокупности однотипных испытаний (конфигураций транзит-событий) дает информацию о вероятности соответствующего подмножества траекторий.

Согласно Фейнману, амплитуда вероятности фиксации электрона детектором выражается в форме континуального интеграла

$$\Psi_{\Omega}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S \left(\left[\mathbf{r}_0^d \right] \right) \right] D \left(\mathbf{r}_0^d \right), \quad (1)$$

где $S\left(\left|r_0^d\right|\right)$ – функционал классического действия для электрона, движущегося вдоль пути $r_0^d = D\left(r_0^d\right)$ – аддитивная на множестве траекторий функция, которая для конечнократных аппроксимаций интеграла пропорциональна мере Лебега, Ω – множество путей, допустимых условиями эксперимента. Приведенная выше конструкция ПВЭ позволяет интерпретировать область интегрирования Ω в (1) как цилиндрическое подмножество (ЦПМ) [3] пространства \mathfrak{R}^∞ – прямого произведения несчетного множества экземпляров числовой прямой.

Выясним статистические следствия, к которым приводит гипотеза Фейнмана. Пусть Ω_1 и Ω_2 – два непересекающиеся ЦПМ из \mathfrak{R}^∞ с параллельными образующими. Последнее означает, что в двух статистических экспериментах, отвечающих Ω_1 и Ω_2 , вспышки поглощающего электрона поля происходят синхронно. Для несовместности ЦПМ Ω_1 и Ω_2 достаточно, чтобы отвечающие им транзит-события не пересекались хотя бы на одном ПВЭ.

Для несовместных ЦПМ, в силу аддитивности функции $D\left(\mathbf{r}_0^d\right)$, имеет место

$$\Psi_{\Omega_1 \cup \Omega_2}\left(r_0, t_0; r_d, t_d\right) = \Psi_{\Omega_{12}}\left(r_0, t_0; r_d, t_d\right) + \Psi_{\Omega_{22}}\left(r_0, t_0; r_d, t_d\right)$$

где $\Omega_1 \cup \Omega_2$ обозначает ЦПМ, множество «необлученных» ячеек которого есть теоретико-множественное объединение транзит-событий, отвечающих ЦПМ Ω_1 и Ω_2 . По трем упомянутым экспериментам может быть вычислен модуль разности фаз амплитуд Ψ_1 и Ψ_2 в соответствии с формулой

$$R_{12}^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (2)$$

где $R_i = \text{mod } \Psi_i$, $\varphi_i = \text{arg } \Psi_i$, $R_{12} = \text{mod } \Psi_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$.

Формула (2) допускает обобщение на случай нескольких альтернативных транзит-событий. Беря разнообразные комбинации их амплитуд, мы получаем переполненную систему уравнений для нахождения разностей фаз соответствующих амплитуд. Существование решений подобных систем является признаком самосогласованности представления (1). Таким образом, фейнмановская гипотеза допускает прямую опытную проверку.

Проиллюстрируем это на примере трех амплитуд. Упомянутая система в этом случае насчитывает четыре уравнения:

$$R_{ij}^2 = R_i^2 + R_j^2 + 2R_iR_j \cos(\varphi_i - \varphi_j), \quad i, j = 1, 2, 3; i \neq j,$$

$$R_{123}^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + 2R_1R_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2R_1R_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + 2R_2R_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2),$$

Из данной системы следует необходимое условие совместности

$$R_{12}^2 + R_{13}^2 + R_{23}^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_{123}^2, \quad (3)$$

где $R_{123} = \text{mod } \Psi_{\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3}$.

К сожалению, перспектива технической реализации предлагаемого мысленного эксперимента применительно к электронам представляется довольно туманной. По-видимому, более реалистична подобная измерительная процедура для фотонов, где в качестве «жгутов» транзит-событий выступали бы «световоды» с абсолютно поглощающими стенками, параллельно подсоединенные к источнику света (через систему вентиляей) и детектору. Однако при этом интерпретация результатов эксперимента должна была бы опираться на гипотезу постоянства скорости распространения фотонов по криволинейным путям.

Работа частично поддержана Министерством промышленности и инноваций Нижегородской области (грант РФФИ – Поволжье 08-07-97016).

[1] Гаврилин А.Т. // ТМФ. 1996. Т. 108. С. 406.

[2] Feynman R. // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. P. 367.

[3] Dirac P. // Phys. Zeitschrift der Sowietunion. 1933. P. 64.

[4] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. –М. Наука, 1966, 400 с.

ФОРМУЛА ПРОЕКТИВНЫХ ИНДЕКСОВ ДЛЯ НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

А.Б. Корчагин

Нижегородский госуниверситет

В нематическом жидком кристалле (в дальнейшем называемом нематик) молекулы локально стремятся иметь одно и то же направление [1, 2]. Мы рассматриваем следующие допущения: во-первых, молекулы кристалла могут свободно вращаться вокруг своих осей и, во-вторых, в каждой точке P_0 определён вектор $\mathbf{D}(P_0)$, который параллелен усреднённому вектору локальных направлений и называется *направлением* в точке P_0 . Если $\mathbf{D}(P_0)=0$, то точка P_0 называется *нулём* нематика. Множество нулей в невозмущённом кристалле состоит из изолированных нулей и дисклинационных линий. Т.к. состояние нематика, имеющего противоположные направления, физически неразличимы, то в каждой точке P можно рассмотреть неориентированный отрезок (обозначим его $\mathbf{SD}(P)$), являющийся объединением двух отрезков, которые реализуют противоположные векторы $\mathbf{D}(P)$ и $-\mathbf{D}(P)$. Множество всех таких отрезков составляет *поле отрезков* в нематике. Поле отрезков называется *непрерывным* в точке P_0 , если

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \mathbf{SD}(P) = \mathbf{SD}(P_0).$$

Для математических нужд необходимо выполнение следующих физических допущений: 1) нематик имеет непрерывное поле отрезков и 2) имеет конечное число нулей и дисклинационных линий. Мы рассматриваем тематик как однородную субстанцию, в которой размеры молекул полностью игнорируются. Такой формализм составляет основу эластичной теории моделирования жидких кристаллов [1]. Если нематик поместить в прозрачный (сферический, торический или иной формы

замкнутый) сосуд, то можно увидеть возможные траектории поля отрезков нематика на поверхности этого сосуда.

Пусть M – гладкая двусторонняя поверхность, лежащая внутри нематика (в частности это может быть поверхность сосуда, содержащего этот нематик), которая удовлетворяет следующим свойствам: 3) поверхность M трансверсальна дисклинационным линиям; 4) каждая дисклинационная линия имеет конечное число точек пересечения с M ; 5) число точек, в которых поле отрезков $SD(P)$ перпендикулярно M , конечно.

Определим касательное поле отрезков SF к поверхности M по правилу: в каждой точке $P \in M$ отрезок $SF(P)$ есть проекция отрезка $SD(P)$ на касательную плоскость к поверхности M в точке P . Поле отрезков SF , определённое на M , называется ассоциированным с полем SD нематика. Ясно, что если поле SD и поверхность M удовлетворяет свойствам 1) – 5), то ассоциированное поле SF имеет конечное число нулей, что с физической точки зрения естественно.

Пусть $(F_1(x), F_2(x))$ – локальные координаты поля SF в касательной плоскости в произвольной точке $x_0 \in M$. Пусть $Q_\varepsilon \subset M$ – окружность малого радиуса ε , такая, что поле SF не имеет нулей внутри и на окружности Q_ε кроме, может быть, нуля в точке x_0 . Степень отображения $\lambda: Q_\varepsilon \rightarrow \mathbf{R}P^1$, определённого по формуле $\lambda(x) = (F_1(x) : F_2(x))$, называется *проективным индексом* точки x_0 и обозначается $p(x_0)$. Это определение эквивалентно определению индекса Франка, данному в [3], но в отличие индекса Франка оно легко обобщается на поля отрезков на многообразиях M чётной размерности [4].

Основным результатом доклада является следующая теорема, доказанная в [4].

Теорема. *Сумма проективных индексов непрерывного поля отрезков, заданного на гладкой ориентируемой поверхности M , удовлетворяющих свойствам 1) – 5), равна удвоенной эйлеровой характеристике поверхности M , т.е.*

$$\sum_{x \in M} p(x) = 2\chi(M),$$

где $\chi(M)$ – эйлерова характеристика поверхности M .

Эта теорема является аналогом теоремы Пуанкаре об индексах нулей векторных полей на многообразиях. Она может быть применена при вычислении интегральной поверхностной энергии эластичных напряжений в нематических жидких кристаллах.

- [1] Leslie F.M. //Continuum Mechanics and Thermodynamics. 1995. V.4. P.167.
- [2] Oswald P., Pieranski P. Nematic and cholesteric liquid crystals: concepts and physical properties illustrated by experiments. – Boca Raton, USA: CRC Press, 2005, 648 p.
- [3] Frank F.C. //Discuss. Faraday Soc. 1958. V.25. P.19.
- [4] Корчагин А.Б. //Актуальные проблемы стат. радиофизики. 2009. Т.8. С. 113.

ТЕОРИЯ ПОСТРОЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

М.В. Тараканова

Нижегородский госуниверситет

В последние десятилетия исследования диффузионных случайных процессов получили широкое распространение для различных задач физики, биологии и финансовой математики. Одной из наиболее распространенных диффузионных моделей является винеровский процесс со сносом. При исследовании данной модели значительный интерес представляет изучение коэффициента диффузии такого процесса.

В настоящее время существует большое количество методов построения однородных оценок коэффициента диффузии. В силу своей относительной простоты наибольшее распространение получили методы наименьших квадратов и метод наибольшего правдоподобия. Однако будучи универсальными, данные методы обладают невысокой эффективностью. Для оценки коэффициента диффузии винеровского случайного процесса со сносом значительное распространение получили методы Гармана и Класса [1], Роджера и Сатчелла [2].

До настоящего времени вопрос о том, существуют ли несмещенные оценки лучше, чем описанные выше, не был решен. В данной статье построена общая теория однородных оценок винеровского случайного процесса с равномерным сносом, а также проведено сравнение эффективности оценок, полученных различными методами.

В работе предлагается новый метод построения однородных оценок параметров случайных процессов. Данный метод опирается непосредственно на понятия эффективности и несмещенности оценки [3].

В ходе исследований были построены оценки коэффициента диффузии винеровского случайного процесса с равномерным сносом различными методами: наименьших квадратов, наибольшего правдоподобия, Гармана и Класса, Роджера и Сатчелла, а также новым методом наиболее эффективной оценки.

Проведенное сравнение эффективности оценок, полученных различными методами, показало преимущество нового предложенного метода. Для подтверждения результатов теории был поставлен численный эксперимент, в ходе которого была построена модель винеровского случайного процесса и проведена оценка его параметров различными способами по трем эквидистантно выбранным отсчетам.

В настоящее время работа по данному направлению продолжается. Предложенный новый метод построения оценок параметров случайных процессов необходимо обобщить на случай процессов с неизвестной плотностью вероятности. В этом случае требуется разработать численные схемы, основанные на вычислении эмпирических плотностей вероятности (гистограмм).

- [1] Garman M., Klass M.J. On the Estimation of Security Price Volatilities From Historical Data.// J. of Business. 1980. V. 53. P. 67.
- [2] Rogers L.C.G., Satchell S.E. The Annals of Appl. Probability. 1980. V. 4. P. 504.
- [3] Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. –М.: Радио и связь, 1982, 624 с.

БИФУРКАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С ГОМОКЛИНИЧЕСКИМИ КАСАНИЯМИ К НЕЙТРАЛЬНОМУ СЕДЛО-ФОКУСУ

И.И. Овсянников

Нижегородский госуниверситет

Пусть C^r – гладкий ($r \geq 5$) трехмерный диффеоморфизм f_0 удовлетворяющий следующим условиям:

- f_0 имеет неподвижную точку O типа «седло–фокус» с мультипликаторами $\lambda e^{\pm i\varphi}$ и γ , где $0 < \lambda < 1 < |\gamma|$;
- седловая величина $\sigma \equiv \lambda|\gamma|$ равна 1 (то есть точка O – «седло–фокус» нейтрального типа);
- устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия точки O касаются квадратичным образом в точках некоторой гомоклинической траектории Γ_0 .

Для изучения возникающих в близких системах бифуркационных явлений рассматриваются трехпараметрические семейства f_μ общего положения, проходящие через f_0 при $\mu = 0$. Параметры берутся следующие: μ_1 – параметр расщепления многообразий относительно некоторой гомоклинической точки; μ_2 – отклонение седловой величины от единицы, то есть $\mu_2 = \sigma(\mu) - 1$; $\mu_3 = \varphi - \varphi_0$, где φ_0 – это значение аргумента φ для f_0 . Выбор параметра μ_3 в качестве управляющего обусловлен тем, что φ является модулем топологической или Ω - сопряженности диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием в случае «седло–фокуса» [1, 2]. В настоящей работе в рамках семейств f_μ изучаются бифуркации, приводящие к появлению устойчивых периодических траекторий как неподвижных точек отображений первого возвращения $T_k \equiv f_\mu^k: U_0 \rightarrow U_0$, $k = k_0, k_0+1, \dots$ [3, 4], где U_0 – некоторая достаточно малая окрестность точки O .

Лемма [Рескейлинг лемма] На U_0 можно выбрать такие C^r -координаты, в которых отображение первого возвращения T_k после соответствующих нормировок координат и параметров может быть представлено в следующем виде:

$$\bar{X}_1 = Y, \bar{X}_2 = o(1), \bar{Y} = M_1 + M_2 X_1 - Y^2 + o(1) \quad (1)$$

где

$$M_1 = -d\gamma^{2k} (\mu_1 + \lambda^k \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(k\varphi + \beta_1) - \gamma^{-k} y^- + o(\lambda^k)) \quad (2)$$

$$M_2 = -b_1 \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(k\varphi + \beta_2) (1 + \mu_2)^k \quad (3)$$

а d, \dots, β_2 – некоторые константы ($d \neq 0, c_1^2 + c_2^2 \neq 0, y^- > 0, b_1 \neq 0$).

Координата X_2 не является в (1) «динамической» переменной, и поэтому бифуркации здесь могут быть исследованы с помощью отображения

$$\bar{X}_1 = Y, \bar{Y} = M_1 + M_2 X_1 - Y^2 + o(1) \quad (4)$$

которое есть ни что иное как хорошо известное отображение Эно.

При $\sigma < 1$ ($\mu_2 < 0$), как вытекает из (3), $M_2(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому динамика отображения (4) определяется одномерным отображением $Y \rightarrow M_1 - Y^2$. Последнее имеет устойчивую неподвижную точку при $-1/4 < M_1 < 3/4$. Этим значениям, в силу (2), отвечают в пространстве параметров (μ_1, μ_2, μ_3) бифуркационные поверхности $\mu_1 = \mu_k^+(\mu_2, \mu_3)$ и $\mu_1 = \mu_k^-(\mu_2, \mu_3)$, накапливающихся при $k \rightarrow \infty$ к плоскости $\mu_1 = 0$. Для значений параметров из пространства между поверхностями μ_k^+ и μ_k^- диффеоморфизм f_μ имеет устойчивую однообходную периодическую траекторию. Таким образом, при $\sigma(\mu) < 1$ бифуркационная диаграмма выглядит весьма просто и может быть вполне исследована в рамках однопараметрических семейств f_{μ_1} , что вполне согласуется с результатами из [2].

При $\sigma > 1$ ($\mu_2 > 0$) уже оба параметра M_1 и M_2 могут принимать произвольные конечные значения при достаточно больших k и подходящих значениях φ . В этом случае нужно рассматривать уже полное отображение (4). Оно имеет устойчивую неподвижную точку, когда (M_1, M_2) принимают значения в «треугольной» области, ограниченной кривыми $M_1 = -(1+M_2)^2/4$, $M_1 = 3(1+M_2)^2/4$ и $M_2 = 1$. Тогда, как вытекает из (2) и (3), в пространстве исходных параметров (μ_1, μ_2, μ_3) при каждом фиксированном $\sigma > 1$ эта область «проектируется» на счетное множество криволинейных треугольников Δ_k^i таких, что f_μ имеет устойчивую (однообходную) периодическую траекторию периода k при $\mu \in \Delta_k^i$. Заметим, что при росте k число $I = i(k)$ соответствующих «треугольников» также растет.

Таким образом, бифуркационная диаграмма для устойчивых однообходных периодических траекторий в пространстве параметров (μ_1, μ_2, μ_3) становится при $\sigma > 1$ ($\mu_2 > 0$) гораздо более сложной. Она представляет собой нечто вроде трехмерной «гребенки» с бесконечным числом «зубьев». Этим отчасти можно объяснить так называемый «эффект ненаблюдаемости» устойчивых траекторий в однопараметрических семействах во многих задачах хаотической динамики (см., например, [2]).

Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00429 и грантом Правительства РФ, контракт №11.G34.31.0039.

[1] Gonchenko S.V. // Amer. Math. Soc. Transl. 2000. V. 200, No.2. P.107.

[2] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. // Совр. математика и ее приложения. 2003. Т. 7. С. 92.

[3] Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. // Матем. сб. 1972. Т. 88, №.4. С. 475.

[4] Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. // Матем. сб. 1973. Т. 90, №.1. С. 139.