

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КВАНТОВОГО УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Д.Н. Кобяков

Нижегородский госуниверситет

Вопросы взаимодействия квантовой системы (атом, молекула) с электромагнитными полями являются ключевыми для многих фундаментальных и прикладных исследований. Основным аппаратом решения таких задач является формализм матрицы плотности. В данной работе представлено решение уравнения Лиувилля с постоянными коэффициентами для двухуровневой системы на основе алгебраического метода, позволяющего работать с коммутаторами. Разработанный подход может быть также использован для случая взаимодействия квантовой системы с флуктуирующими полями. Апробация метода для таких вычислений проведена на задаче о релаксации спина в шумовом магнитном поле.

Гамильтониан двухуровневой квантовой системы, как и любая матрица 2×2 , может быть разложен по матрицам Паули, имеющим циклические коммутационные свойства. Введём обозначения для коммутаторов с ними:

$$T_i = [\sigma_i, *], \quad (1)$$

где на место звёздочки должна быть поставлена 2×2 матрица, на которую действует коммутатор, а матрицы Паули имеют следующий вид:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Такой выбор «матричного базиса» позволяет провести точный расчёт при решении уравнения Лиувилля в отличие от вычислений с традиционными тензорными элементами. Если выбрать гамильтониан системы в виде

$$\hat{H}_0 = i\hbar(\delta\hat{\sigma}_0 + \alpha\hat{\sigma}_1 + \beta\hat{\sigma}_2 + \gamma\hat{\sigma}_3), \quad (3)$$

где коэффициенты перед матрицами Паули – постоянные величины, то уравнение для эволюции матрицы плотности будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = (\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3) \hat{\rho}(t). \quad (4)$$

Его решение хорошо известно

$$\hat{\rho}(t) = \exp[\alpha T_1 t + \beta T_2 t + \gamma T_3 t] \hat{\rho}(0) \quad (5)$$

и определяется начальным значением матрицы плотности. Поэтому задача будет решена, когда будет найдено действие экспоненты (понимающейся в обычном для операторов смысле) на каждую из матриц Паули. Разработанный метод вычислений позволяет найти это действие:

$$e^{\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3} \cdot \sigma_0 = \sigma_0, \quad (6a)$$

$$e^{\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3} \cdot \sigma_1 = \{+1 + BR_{23}^2\} \sigma_1 + \{+i\gamma A - \alpha\beta B\} \sigma_2 + \{-i\beta A - \alpha\gamma B\} \sigma_3, \quad (6b)$$

$$e^{\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3} \cdot \sigma_2 = \{-i\gamma A - \alpha\beta B\} \sigma_1 + \{+1 + BR_{13}^2\} \sigma_2 + \{+i\alpha A - \beta\gamma B\} \sigma_3, \quad (6c)$$

$$e^{\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3} \cdot \sigma_3 = \{+i\beta A - \alpha\gamma B\} \sigma_1 + \{-i\alpha A - \beta\gamma B\} \sigma_2 + \{+1 + BR_{12}^2\} \sigma_3. \quad (6d)$$

$$A = \frac{1}{R_0} \text{sh}(2R_0), B = \frac{1}{R_0^2} [\text{ch}(2R_0) - 1], R_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad (6e, f, g)$$

$$R_{12}^2 = \alpha^2 + \beta^2, R_{13}^2 = \alpha^2 + \gamma^2, R_{23}^2 = \beta^2 + \gamma^2. \quad (6h, i, j)$$

Покажем, как представленный метод может быть использован и для решения задачи о релаксации спиновой системы-1/2 в флуктуирующем магнитном поле [1]. Гамильтониан системы представляется в виде $H(t) = H_0 + H_{\text{stoch}}(t)$, где $H_0 = 1/2\hbar\omega_0\sigma_3$ – гамильтониан невозмущённой системы, а $H_{\text{st}}(t) = \varphi_1(t)\sigma_1 + \varphi_2(t)\sigma_2 + \varphi_3(t)\sigma_3$ – стохастическая часть гамильтониана. В простейшей модели гауссова марковского процесса имеем $\langle \varphi_i(t) \rangle = 0$, $\langle \varphi_i(t)\varphi_j(t) \rangle = Q_i\delta_{ij}\delta(t-s)$. Эволюция матрицы плотности микроскопической системы описывается уравнением::

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = (L_0 + L_{\text{st}}(t)) \hat{\rho}(t), \quad (7)$$

где $L_0 = [H_0, *]$ и $L_{\text{st}}(t) = [H_{\text{st}}, *]$. Получаем, что уравнение для усреднённой матрицы плотности имеет вид [2]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \hat{\rho}(t) \rangle = (L_0 + R[t]) \langle \hat{\rho}(t) \rangle, \quad (8)$$

где тензор релаксации $R[t]$, представляет *необратимость* процесса (релаксации к состоянию равновесия), находится по формуле [2]:

$$R(t) = \sum_{i=1}^3 -i\hbar Q_i T_i^2. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) можно представить в виде:

$$\hat{\rho}(t) = G(t, 0) \hat{\rho}(0), \quad (10)$$

Вычисленные методом матричные элементы оператора эволюции $G(t, s)$ полностью совпадают с таковыми, полученными в [1].

ФОТОТЕРМИЧЕСКИЙ ЦИРКУЛЯРНЫЙ ДИХРОМЕТР

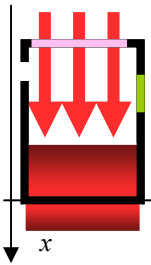
А.Е. Лысевич¹⁾ М.А. Новиков²⁾

¹⁾ *Нижегородский госуниверситет*

²⁾ *Институт физики микроструктур РАН*

Проблема хиральности (зеркальной асимметрии) в настоящее время представляет большой интерес в физике, химии и особенно в биологии. В этой связи разработка новых методов хиральной диагностики весьма актуальна. Настоящая работа посвящена созданию нового варианта метода фототермической спектроскопии для исследования оптического хирального (циркулярного) дихроизма в различных средах, обладающего рядом преимуществ перед традиционными фотометрическими методами. В первую очередь это касается неоднородных и сильно рассеивающих сред.

Как известно, в фотометрических методах спектр поглощения регистрируется по параметрам прошедшего или отражённого света, в то время как в фототермическом методе различными способами измеряется поглощённая энергия. В предлагаемом методе для этого использует фотоакустический эффект. Впервые он был зарегистрирован Тиндэлем, Беллом и Рентгеном в 1880 году и далее вызывал интерес ряда учёных, в том числе и российских, например Вейнгера. В Нижнем Новгороде методика измерений, основанная на этом эффекте, ассоциируется, в основном, с работами группы Крупнова и как-то ускользает от внимания, что один из основоположников радиофизического факультета ННГУ Г.С. Горелик также участвовал в разработке приложений этого эффекта. Известна его работа, опубликованная в 1946 году в списке Докладов Академии Наук СССР [1], в которой обсуждается возможность использования этого эффекта для изучения времён релаксации энергии между различными степенями свобод молекул газа.



В предлагаемом методе на исследуемый образец посылается лазерное излучение постоянной интенсивности, модулированное по полярности от лево- до правоциркулярной. Такой способ модуляции позволяет получать тепловой сигнал на частоте модуляции (тепловую волну) только от циркулярного дихроизма.

Тепловые возмущения предполагается регистрировать при помощи ячейки, напоминающей нерезонансный элемент Голлея. Она представляет собой некий «колпак» над областью возникновения тепловой волны с небольшим отверстием для стравливания внутреннего давления, связанного с медленным нагревом (Рис.). Кроме того, ячейка должна иметь прозрачное окно для ввода излучения накачки и небольшую мембрану, по колебаниям которой можно определить гармоническую часть внутреннего давления.

Аналитически параметры тепловой волны можно получить из решения дифференциального уравнения

$$\Delta T - (1/k) \partial T / \partial t = -f_{\text{нет}} \cdot \cos \Omega t.$$

Здесь $f_{\text{нет}}$ – гармоническая часть функции источников тепла – имеет вид:

$$f_{\text{ист}} = (I_0/2K) \cdot (1-R) \cdot [\alpha_+ \cdot \exp\{-\alpha_+ x\} - \alpha_- \cdot \exp\{-\alpha_- x\}],$$

где введены следующие коэффициенты: K – теплопроводности (Вт/см·К); k – температуропроводности (см²/с); $\alpha_{\pm} = \alpha \pm \delta\alpha$, α – коэффициент изотропного поглощения (см⁻¹), $\delta\alpha$ – анизотропная добавка.

Считая глубину проникновения тепловой волны малой по сравнению с диаметром луча накачки, что вполне обосновано реальными значениями $L_t \sim 1$ мм в газе и 0,1 мм в твёрдом теле, можно решать эту задачу в одномерном приближении. Её решение в комплексном виде имеет вид:

$$T_{\text{о.н.}} = [C_1 \cdot \exp\{x \cdot \lambda^{1/2}\} + C_2 \cdot \exp\{-x \cdot \lambda^{1/2}\} + C \cdot \exp\{-\alpha x\}] \cdot \exp\{i\Omega t\},$$

где $\lambda^{1/2} = (i\Omega/k)^{1/2}$, $C = -f_{\text{ист}}/(\alpha^2 - \lambda^2)$.

Далее из условий непрерывности температуры и потока тепла на границе раздела сред можно получить параметры тепловых волн в газе и образце.

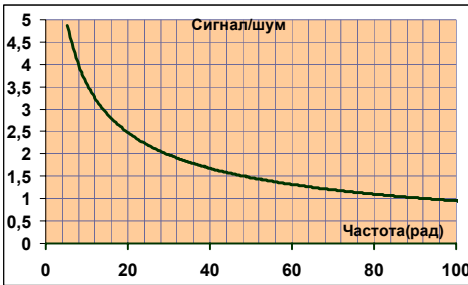
Принципиальным ограничением для метода будут являться броуновские шумы молекул газа в ячейке и случайные флуктуации потока тепла от её стенок. Таким образом, средний квадрат шумового отклонения мембраны имеет вид [2]:

$$\langle \delta x^2 \rangle = 4k_B T D' \Delta f / ((a' - m\Omega^2)^2 + D'^2 \Omega^2).$$

Можно найти эффективное изменение температуры газа в ячейке, ассоциированное с этим шумовым смещением:

$$T_{\text{min}} = V a' \langle \delta x^2 \rangle^{1/2} / \nu R A,$$

здесь k_B – постоянная Больцмана, T – средняя температура образца, $D' = D + P^2 A^2 / G T$ – эффективный коэффициент демпфирования мембраны, P – давление внутри ячейки, G – тепловая проводимость между средой и стенками ячейки, $a' = a + P A^2 / V$ –



эффективный коэффициент упругости мембраны, A и m – её площадь и масса, Ω – частота модуляции, V – объём ячейки, ν – количество моль газа в ней, R – газовая константа.

Расчеты показывают, что при помощи миниатюрной, наполненной воздухом ячейки размерами 1×10 мм при интенсивности накачки 1 Вт/мм^2 можно зафиксировать циркулярный дихроизм порядка 10^{-9} см^{-1} на фоне изотропного поглощения 1 см^{-1} .

На базе данного метода возможно создание миниатюрного глюкометра, не требующего взятия пробы крови, осуществление неразрушающего анализа живых организмов, а также оценка времени омертвения живых тканей, основанная на свойстве саморацимизации чистых хиральных изомеров.

[1] Горелик Г.С. // ДАН СССР. 1946. Т.54, №9. С.783.

[2] Жаров В.П., Летохов В.С. Лазерная оптико-акустическая спектроскопия. М.: Наука, 1984. С.320.

НОВЫЕ ВИДЫ ФАЗОРАЗНОСТНОЙ МОДУЛЯЦИИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ В КАНАЛАХ С АДДИТИВНЫМ ШУМОМ И ЗАМИРАНИЯМИ

Г.Н.Бочков¹, К.В.Горохов¹, А.В.Колобков²)

¹Нижегородский госуниверситет

²ФГУП НПП «Полет»

Широкое применение в цифровых системах связи технологии OFDM обусловлено тем, что в параллельных OFDM-системах влияние межсимвольной интерференции и затраты на борьбу с ней существенно ниже, чем в последовательных системах с одной несущей [1]. Повышенная чувствительность OFDM к нестабильности фазовых характеристик канала и ошибкам синхронизации делает актуальным применение фазоразностной модуляции (ФРМ) и некогерентного приема. Однако последний проигрывает когерентному приему по помехоустойчивости, причем проигрыш возрастает с увеличением кратности модуляции. Эффективный способ повышения помехоустойчивости некогерентного приема основан на увеличении интервала некогерентной обработки сигналов [2]. Для каналов с замираниями его применимость ограничена требованием квазистационарности канала на расширенном интервале обработки. В OFDM системах это ограничение можно ослабить, если перейти от ФРМ во временной области (ВФРМ) к ФРМ в частотной области (ЧФРМ).

В данной работе развивается метод полиспектральной организации информационных сигналов [3], который тесно связан с ЧФРМ высших порядков. Для OFDM систем предложен новый вид модуляции – трифазовая модуляция (ТФМ), где информационными параметрами OFDM символа $x(t) = \sum_{n=1}^N X_n \exp(i2\pi nt/T)$ с длительностью T являются фазы триспектра $S_{4,2}[n, m, l] \equiv X_n X_m X_l^* X_{n+m-l}^*$ [4]. Показано, что из $\sim N^3$ ненулевых триспектральных отсчетов независимыми по фазам (трифазам), т.е. информационными, являются $(N-2)$ отсчета. Предложено три способа выбора информационных отсчетов

$$\text{CP-ЧФРМ-2: } S_n = S_{4,2}[n, n+2, n+1] = X_n X_{n+1}^* X_{n+1} X_{n+2}, \quad n = 1, \dots, N-2; \quad (1)$$

$$\text{PP-ЧФРМ-2: } S_n = S_{4,2}[n, n+3, n+1] = X_n X_{n+1}^* X_{n+2}^* X_{n+3}, \quad n = 1, \dots, N-3; \quad (2)$$

$$\text{OTФМ: } S_n = S_{4,2}[1, n+2, 2] = X_1 X_2^* X_{n+1}^* X_{n+2}, \quad n = 1, \dots, N-2, \quad (3)$$

с возможностью рекуррентного синтеза фаз комплексных амплитуд X_n . В обозначениях способов (1) и (2) отражено то, что они фактически реализуют в частотной области известные виды ФРМ второго порядка (ФРМ-2) – со смежными (CP) и разделенными (PP) разностями [2]. Способ (3) является оптимальным видом ТФМ, т.к. он обладает наилучшей помехоустойчивостью за счет оптимального перерас-

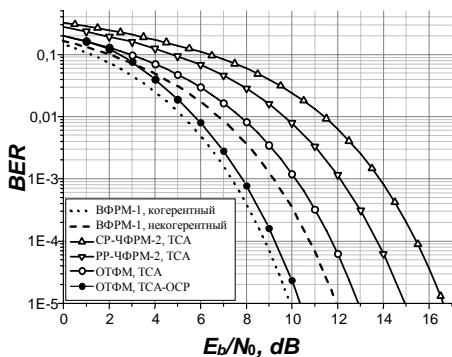


Рис. 1.

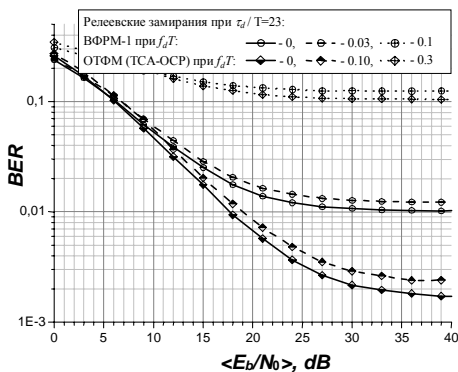


Рис. 2

пределения энергии сигнала в пользу двух, общих для всех S_n , низкочастотных поднесущих.

Рис.1 демонстрирует это для OFDM-сигналов с $N=130$ и четырехпозиционными модуляциями в базовой модели канала с аддитивным белым гауссовским шумом. Установлено, что оптимальный некогерентный прием сигналов с ТФМ на основе оценки лишь информационных отсчетов – «ТСА» при ОТФМ обеспечивает помехоустойчивость, стремящуюся с ростом N к помехоустойчивости некогерентного приема ВФРМ-1. Разработанный алгоритм приема с обратной связью по решению – «ТСА-ОСР», использующий отсчеты из сечения $S_{4,2}^{RX}[1, n, m]$, практически реализует потенциальную помехоустойчивость, равную помехоустойчивости когерентного приема ВФРМ-1.

Рис.2 демонстрирует, что в канале с релевскими замираниями (τ_d – время корреляции, f_d – доплеровский сдвиг) использование вместо ВФРМ-1 предложенного

вида модуляции может до пяти раз уменьшить предельную вероятность битовой ошибки и до трех раз снизить требования к точности синхронизации приемника по частоте.

Работа поддержана Министерством промышленности и инноваций Нижегородской области (грант «РФФИ-Поволжье» № 08-07-97016).

- [1] Прокис Дж. Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Кловского Д.Д. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.
- [2] Окунев Ю.Б. Цифровая передача информации фазомодулированными сигналами. М.: Радио и связь, 1991. 296 с.
- [3] Бочков Г.Н., Горохов К.В. // Изв. вузов. Радиофизика, 1997. Т.40, №11. С.1388.
- [4] Бочков Г.Н., Войткевич К.Л., Горохов К.В., Колобков А.В. //В кн.: Тр. 13-й межд. научн.-техн. конф. RLNS-2007. Воронеж: НПФ «САКВОЕЕ», 2007. С.27.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА МЕЖДУ ЗВУКОВЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ КРОНАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПЕТЕЛЬ И ПЯТИМИНУТНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ СКОРОСТИ ФОТОСФЕРНОЙ КОНВЕКЦИИ

В.В. Зайцев¹⁾, К.Г. Кислякова²⁾

¹⁾*Институт прикладной физики РАН*

²⁾*Нижегородский госуниверситет*

В последние годы было обнаружено явление параметрического резонанса между пятиминутными фотосферными колебаниями на Солнце и собственными звуковыми колебаниями корональных магнитных петель (КМП) [1]. Пятиминутные колебания скорости фотосферной плазмы модулируют электрический ток, текущий вдоль корональной магнитной петли [2]. Это, в свою очередь, приводит к модуляции скорости звука и, следовательно, к модуляции собственных звуковых частот корональной магнитной петли как МГД-резонатора. При соответствующей длине петли возможно возникновение параметрического резонанса, в результате которого в корональной магнитной петле возбуждаются звуковые колебания с периодами 5 мин, 10 мин и 3,3 мин, соответствующие частоте накачки, субгармонике и первой верхней частоте параметрического резонанса. Параметрический резонанс может играть важную роль в решении проблемы нагрева солнечной короны, так как позволяет транспортировать энергию пятиминутных фотосферных осцилляций в верхние слои солнечной атмосферы. Собственно фотосферные колебания с периодом 5 минут, хотя и обладают большой энергией, не могут служить источником нагрева, так как отражаются от области температурного минимума в фотосфере. Следовательно, необходим какой-то механизм передачи энергии от фотосферы к короне, каким и могут оказаться колебания КМП в солнечной короне.

В работе были изучены данные радиоизлучения Солнца на частоте 11,7 ГГц (17 событий) и 37 ГГц (15 событий). При этом на частоте 37 ГГц в спектрах всех событий были обнаружены колебания с частотой, близкой к частоте накачки (то есть к частоте пятиминутных колебаний, которая составляет около 3 мГц), в 12 случаях из пятнадцати в спектре присутствовала также линия, близкая к частоте десятиминутных колебаний, и в 10 – линия, которая соответствует колебаниям с периодом около 3 минут. В 7 случаях из 15 наблюдалась одновременная модуляция излучения всеми тремя гармониками. Для наблюдений на 11,7 ГГц пятиминутная линия накачки, также как и линия половинной частоты (10 минут) присутствует в спектрах 12 событий, а в 11 случаях – и линия, соответствующая второй гармонике (период около 3 минут). Следует отметить, что в двух случаях из 17 активности не наблюдалось вовсе, а в 3 – наблюдениям мешали сильные атмосферные флуктуации, которые приводили к появлению в спектрах событий множества шумовых линий. Тем не менее, в случае наблюдений и на 11,7 ГГц, и на 37 ГГц, можно уверенно диагностировать наличие всех линий, характерных для параметрического резонанса.

Следует также отметить основное отличие спектров событий, полученных при наблюдениях на различных частотах. Как уже упоминалось выше, линии параметрического резонанса на 11,7 ГГц приблизительно в два раза уже линий на 37 ГГц. Причиной различия ширины линий может быть изменение глубины модуляции или значения коэффициента затухания, что вызвано различием электронной концентрации при наблюдении радиоизлучения разных слоев хромосферы (определенной длине волны излучения соответствует и определенная высота), а также различными условиями возбуждения линий параметрического резонанса.

Типичным для параметрического резонанса является и отношение интенсивностей гармоник к частоте накачки, что объясняется различными условиями их возбуждения. Как упоминалось выше, интенсивность осцилляций на удвоенной частоте гораздо ниже интенсивности линии частоты накачки, а также интенсивности осцилляций на половинной частоте. Все это подтверждает наличие в солнечной короне такого явления, как параметрический резонанс.

[1] Зайцев В.В., Круглов А.А. // *Астроном. журнал*, 2008 (в печати).

[2] Зайцев В.В., Кисляков А.Г. // *Астроном. журнал*, 2006. Т.83, №10. С.921.