

**ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ЭНЕРГИЧНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ
В МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ
ФОККЕРА-ПЛАНКА**

С.П. Горбиков²⁾, В.Ф. Мельников²⁾, Н.П. Пятаков¹⁾

¹⁾Нижегородский госуниверситет

²⁾Научно-исследовательский радиофизический институт

В последнее время с появлением наблюдательной техники с высоким пространственным, временным и спектральным разрешением в радиоастрономии стала актуальной проблема формирования анизотропных распределений электронов во вспышечных магнитных петлях [1]. Одним из методов анализа динамики распределения заряженных частиц является метод, использующий уравнение Фоккера-Планка [2]. Знание распределения заряженных частиц в солнечной петле позволяет вычислить распределение радиояркости, которое уже непосредственно может быть сопоставлено с реально наблюдаемым радиоизлучением. Это в итоге даст информацию о процессах инжектирования и ускорения частиц во время солнечных вспышек, а также возможность проверить адекватность уже существующих теорий.

Уравнение Фоккера-Планка позволяет учитывать множество факторов и явлений, которое заставляет изменяться распределение частиц: комптоновское и кулоновское рассеивание, отражение от магнитных пробок, корпускулярно-волновые взаимодействия, синхротронное излучение, неоднородность фоновой плазмы, различные конфигурации магнитного поля и другие.

В данной работе рассматривается случай, учитывающий только явление отражения от магнитных пробок и наличие кулоновских столкновений, приводящих к рассеиванию по питч-углу и потерям энергии. В этом случае уравнение Фоккера-Планка имеет вид [3]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c\beta\mu \frac{\partial f}{\partial s} + c\beta \frac{2s}{\sigma_0^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{(1-\mu^2)}{2} f \right] + \frac{c}{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{f}{\beta} \right) + \frac{c}{\lambda_0} \frac{1}{\beta^3 \gamma^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] + S(E, \mu, s, t).$$

Здесь $f=f(E, \mu, s, t)$ – функция плотности, E – энергия (в $m_e c^2$), μ – косинус питч-угла, s – расстояние вдоль петли (в cm), t – время (в $сек$), $\lambda_0(s) = 10^{24} cm / (n(s) \ln A)$, $n(s)$ – плотность фоновой плазмы (в cm^{-3}), $\ln A = 20$, $c = 3 \cdot 10^{10} cm$, $\gamma = E + 1$, $\beta = (E(E+2))^{1/2} / (E+1)$, $S(E, \mu, s, t)$ – функция инжекции.

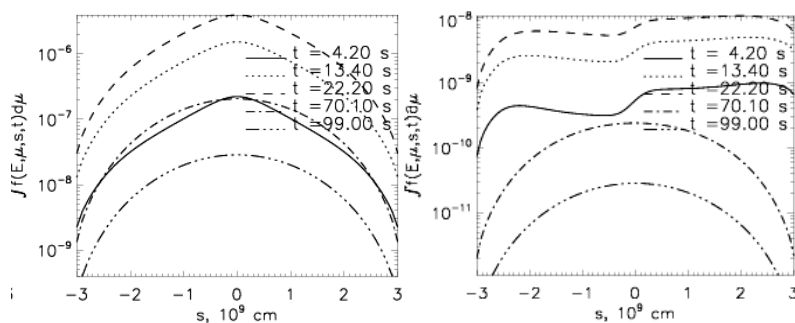
Данное уравнение допускает аналитические решения только в упрощённых случаях, поэтому для его решения в общем случае приходится прибегать к численным методам.

В работе предложен алгоритм численного решения упомянутого кинетического уравнения Фоккера-Планка. Алгоритм основан на применении метода конечных разностей и метода расщепления [4].

В отличие от алгоритма, предложенного в [3], где при решении рассматривается только полпетли, в этой работе рассматривается вся петля. Это позволяет применять предложенный алгоритм для большей длительности происходящих в петле процессов. В сравнении с алгоритмом, предложенным в [5], данный алгоритм обладает большей точностью при меньших временных затратах.

С использованием составленной программы был осуществлён ряд моделирующей динамики распределений электронов при различных типах инжекции. Были рассмотрены следующие варианты: а) изотропная инжекция в центре, в основании или однородно вдоль всей петли; б) анизотропная инжекция вдоль или поперёк магнитного поля в центре, в основании или однородно вдоль всей петли. При расчётах также менялась длительность инжекции, плотность фоновой плазмы, пробочное отношение в магнитной ловушке. Рассматривались случаи однородной и неоднородной (растущей к основаниям петли) плотности фоновой плазмы.

На основании проведённых расчетов показаны отличия распределений электронов в ловушке для разных типов инжекции. Для иллюстрации на рисунках представлены распределения вдоль петли, проинтегрированные по питч-углу, для разных моментов времени для энергии 400 кэВ. Рисунку слева соответствует случай изотропной инжекции в центре петли, рисунку справа – анизотропной инжекции направленной в правое основание. Из приведённых графиков видно, что во втором случае на фазе роста (сплошная и пунктирная линия) концентрация электронов в правой части петли больше, чем в левой, а на фазе спада (две штрихпунктирные линии) захваченные ловушкой электроны формируют распределение, схожее с первым случаем инжекции (рисунок слева).



Указанные отличия распределений электронов в ловушке для разных типов инжекции могут быть полезны для диагностики характеристик потоков ускоренных электронов в солнечных вспышечных петлях.

- [1] Melnikov V.F., Shibasaki K., Reznikova V.E. // *Astrophys. J.* 2002. V.580. P. L185.
- [2] Лифшиц Е.Н., Питаевский Л.П. *Физическая кинетика*. М.: Наука, 1979. С. 116.
- [3] Hamilton R., Lu E.T., Petrosian V. // *Astrophys. J.* 1990. V.354. P. 726.
- [4] Самарский А.А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1977.

[5] Горбиков С.П., Мельников В.Ф. // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, №2. С. 112.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ СТАТИСТИКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ УРОВНЕЙ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ И ПОЛЯМИ

А.И. Саичев, М.В. Тараканова

Нижегородский госуниверситет

В данной работе развивается новое направление теории пересечений уровней, основанное на вычислении корреляционной функции длительностей интервалов между последовательными пересечениями. Рассмотрен одномерный случай пересечения нулевого уровня стационарным гауссовым процессом $U(t)$. Найдено точное выражение для корреляционной функции и рассмотрена его асимптотика.

Воспользуемся механической аналогией, для чего рассмотрим переменную t не как время, а как пространственную координату в одномерном пространстве. Моменты пересечений t_n при этом будут трактоваться как координаты расположенных на оси частиц единичной массы, т.е. фактически как частицы некоторого виртуального газа. Такой одномерный "газ" описывается плотностью:

$$R(t) = \sum_n \delta(t - t_n) \quad (1)$$

со средним значением $\rho = \langle R(t) \rangle$. При этом особый интерес представляет корреляционная функция плотности газа событий $G(\tau) = \langle R(t)R(t-\tau) \rangle$. Очевидные выкладки показывают, что при $\tau \rightarrow \infty$, когда пропадает всякая зависимость между центральными и далеко отстоящими от него событиями, корреляционная функция должна подчиняться предельному равенству:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau) = \rho^2. \quad (2)$$

Полагая для определенности процесс $U(t)$ непрерывно дифференцируемым, будем считать, что известны его среднее значение $\langle U(t) \rangle$, корреляционная функция:

$$K(\tau) = \langle U(t)U(t-\tau) \rangle,$$

совместная плотность вероятностей процесса $U(t)$ и его производной $V(t) = U'(t)$:

$$\omega(u, v) = \langle \delta(U(t) - u) \delta(U'(t) - v) \rangle$$

и соответствующая двумоментная плотность вероятностей $\omega(u_1, u_2, v_1, v_2; \tau)$. Для упрощения выкладок будем рассматривать нормированную корреляционную функцию:

$$r(\tau) = \frac{K(\tau)}{\sigma_u^2}. \quad (3)$$

Искомая корреляционная функция $G(\tau)$ определяется ковариационной матрицей:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & r(\tau) & 0 & a(\tau) \\ r(\tau) & 1 & -a(\tau) & 0 \\ 0 & -a(\tau) & b & b(\tau) \\ a(\tau) & 0 & b(\tau) & b \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где

$$a(\tau) = \langle U(t)U'(t-\tau) \rangle = -r'(\tau),$$

$$b(\tau) = \langle U'(t)U'(t-\tau) \rangle = -r''(\tau), \quad b = b(0).$$

Непосредственные вычисления приводят к точному выражению для корреляционной функции «газа пересечения» нулевого уровня:

$$G(\tau) = \rho^2 \frac{1-r^2(\tau)-d^2(\tau)}{[1-r^2(\tau)]^{3/2}} \left[\sqrt{1-\gamma^2} + \gamma \arcsin \gamma \right], \quad (5)$$

где $d^2(\tau) = a^2(\tau)/b$, а

$$\gamma = \frac{b(\tau)[1-r^2(\tau)] - a^2(\tau)r(\tau)}{b[1-r^2(\tau)] - a^2(\tau)}.$$

При помощи разложения коэффициента $r^2(\tau)$ в ряд Фурье по τ , было получено выражение для асимптотики $G(\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$.

В качестве примера рассмотрим гауссов процесс $U(t)$ с нулевым средним, единичной дисперсией и корреляционной функцией:

$$r(\tau) = e^{-\tau^2}.$$

Как видно из рисунка, на котором представлены графики данной корреляционной функции $G(\tau)$ и ее асимптотики, полученное приближенное выражение хорошо описывает поведение корреляционной функции на малых промежутках τ .

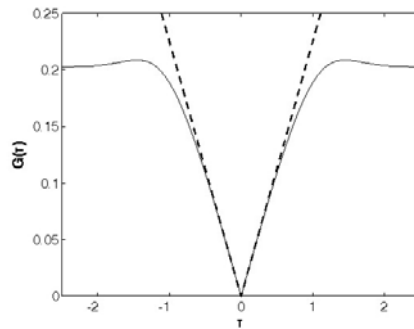


Рис.

Развитая в данной работе приближенная теория вычислений вероятностных распределений расстояний должна найти многочисленные применения при решении таких практических задач, как, например, задачи анализа взаимного пространственного расположения так называемых нодальных точек случайных полей, в которых амплитуда поля принимает нулевые значения.

МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ В ПРИМЕНЕНИИ К ЧИСТО ВРЕМЕННЫМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ СОБЫТИЙ

С.Г. Уткин

Нижегородский госуниверситет

Последнее время все чаще внимание ученых привлекает применение аномальных ветвящихся процессов для описания и изучения самого широкого спектра явлений. Среди прочих моделей наибольшую популярность у исследователей землетрясений завоевала модель ETAS (epidemic-type aftershock sequence). Ее суть в том, что каждый толчок землетрясения может порождать другие толчки, которые, в свою очередь, также могут порождать толчки и т.д. Данная модель описывает пространственно-временную кластеризацию сейсмичности. При помощи ETAS Саичев и Сорнетт [1, 2] разработали общую теорию статистики времен ожидания в рамках класса самовозбуждающихся процессов Хокса. В дальнейшем возникло предположение, что распределение времен ожидания может открыть новый, более надежный, чем существующие, способ измерения фоновой сейсмической активности, одного из главных параметров модели ETAS [3]. Это предположение породило продолжение исследования, начатого в работах [1, 2]. Однако полученные результаты показали, что оно оказалось в большой степени слишком оптимистичным [4]. Представленная работа посвящена изучению еще одного метода оценки параметров модели ETAS – стохастической реконструкции [5, 6].

Суть метода состоит в том, чтобы на основе известных статистических данных (время, координаты и магнитуды толчков землетрясений) найти вероятности каждого толчка быть фоновым событием или последствием одного из ранее произошедших толчков. По найденным вероятностям можно оценить параметры модели, заложенной в алгоритм метода реконструкции. Авторы утверждали, что при помощи их методики удастся восстановить структуру сейсмичности.

Мы использовали модель, уже проверенную ранее [1, 2, 4] и не учитывающую пространственных зависимостей. Это тем более важно, что одной из будущих целей исследований является изучение чисто временных последовательностей событий для применения в таких областях, как финансы (котировки акций), медицина (статистика эпилептических припадков) и т.д.

Для проверки адекватности метода были использованы данные, сгенерированные при помощи нескольких различных алгоритмов. Затем из полученного синтетического каталога были выделены только толчки с магнитудой выше заданного

значения. Среди них и производился анализ по методу стохастической реконструкции. Известно, что подобное ограничение выборки приводит к уменьшению заложеного в ETAS модель параметра n (коэффициент ветвления) [7]. Реконструкция же, в свою очередь, также привела к изменению n , однако проследить в этом изменении какую либо закономерность пока не удалось. На рис. 1 и 2 также продемонстрированы другие результаты проверки стохастической реконструкции. На рис.1 построен закон продуктивности ($\mu = k 10^{am}$ – один из основных законов ETAS) на основании реальных данных (сплошные линии), а также по результатам реконструкции (пунктир). По построенным зависимостям достаточно точно находится параметр α , в то время как другой параметр k получить невозможно.

Рис.2 демонстрирует интегральную функцию распределения фоновой сейсмичности. Пунктиром приведены эмпирические функции, сплошными линиями – функции выборок (толчки с магнитудой больше некоторого значения). Последние с уменьшением порогового значения магнитуды стремятся к теоретическому распределению, чего нельзя сказать о результатах реконструкции.

Из произведенного анализа можно сделать вывод, что стохастическая реконструкция подходит лишь для восстановления некоторых параметров ETAS, а значит, требуется найти другой, более действенный инструмент.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 06-02-16414а, «Ведущие научные школы» НШ-1055.2008.2, гранта поддержки молодых ученых МК-3502.2007.2.

[1] A. Saichev, D. Sornette // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 078501.

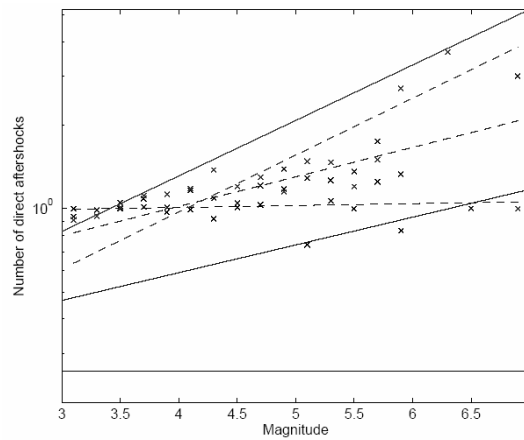


Рис. 1. Проверка закона продуктивности

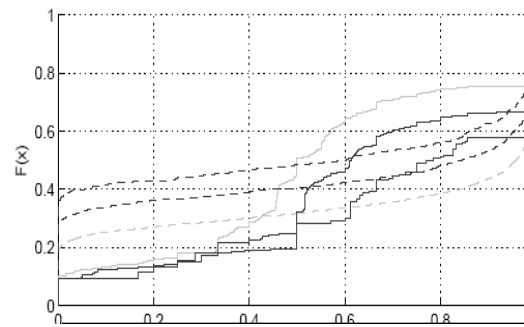


Рис. 2. Интегральная функция распределения фоновой сейсмичности

- [2] A. Saichev, D. Sornette // J. Geophys. Res. 2007. V. 112. P. B04313.
 [3] S. Hainzl, F. Scherbaum, C. Beauval // Bulletin of the Seismological Society of America. 2006. V. 96, No.1. P. 313.
 [4] D. Sornette, S. Utkin, A. Saichev // Phys. Rev. E. 2008. V. 68. P. 035102.
 [5] J. Zhuang, Y. Ogata, D. Vere-Jones // J. Am. Stat. Assoc. 2002. V. 97. P. 369.
 [6] J. Zhuang, Y. Ogata, D. Vere-Jones // J. Geophys. Res. 2004. V. 109. P. B05301.
 [7] A. Helmstetter, D. Sornette // Geophys. Res. Lett. 2003. V. 30, No.11. P. 1576.

КОНСТРУКТИВНАЯ РОЛЬ ШУМА В МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ НЕЙРОНОВ С ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ НА ВХОДЕ

А.А. Дубков, Ю.В. Ушаков

Нижегородский госуниверситет

В последнее время неослабевающий интерес проявляется к конструктивной роли шума в функционировании различных физических систем. В частности, такие явления, как стохастический и когерентный резонанс [1, 2] обнаруживаются и исследуются в живых нейронных системах и их математических моделях.

В данной работе для исследования была выбрана модель следующего вида:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{u}_1 = f(u_1) - v_1 + \zeta_1(t), \\ \dot{v}_1 = u_1 - I_0 - A \cos(\Omega t), \\ \varepsilon \dot{u}_2 = f(u_2) - v_2 + \zeta_2(t), \\ \dot{v}_2 = u_2 - I_0 - B(u_1 + I_0), \end{cases} \quad (1)$$

где ε – это малый параметр, $f(u)$ – кубическая нелинейность, $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ – статистически независимые белые гауссовы шумы.

Эта модель представляет собой два нейрона ФитцХью–Нагумо в возбудимом режиме. На первый нейрон подается внешний гармонический сигнал. В отсутствие шума $\zeta_1(t)$ амплитуда этого сигнала A является подпороговой, т.е. не возбуждает генерацию спайков.

Мембранный потенциал u_1 первого нейрона является внешним сигналом для второго нейрона. Коэффициент связи B варьируется в таких пределах, чтобы сумма $(u_1 + I_0)$ также имела подпороговый характер влияния на второй нейрон в отсутствие шума $\zeta_2(t)$.

Численное моделирование данной системы позволяет изучать распределения интервалов между импульсами (спайками) в последовательностях, генерируемых первым и вторым нейронами. Для распределения первого нейрона данной модели (рис. 1а) были получены результаты аналогичные тем, что представлены в предшествующих работах других авторов [2].

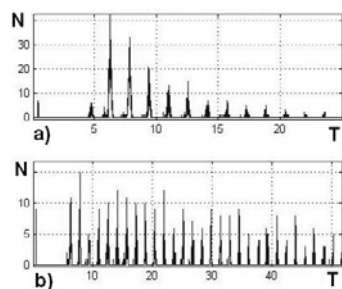


Рис. 1

В наших исследованиях ключевым был вопрос о преобразовании входного сигнала подобными системами и сохранении информации в зашумленных условиях. Можно отметить конструктивную роль шума в том, что нестабильная генерация спайков нейроном на каждом периоде внешнего воздействия (то есть, пропускание некоторых периодов) в статистической картине позволяет определять частоту внешнего сигнала с точностью до максимальной частоты генерации спайков нейроном.

Было подтверждено очевидное предположение о том, что при достаточно сильной связи B между нейронами распределение межспайковых интервалов (МСИ) второго нейрона копирует картину распределения первого. Однако при ослаблении связи между элементами распределение МСИ второго нейрона приобретает сложный характер (рис. 1b) с нетривиальной огибающей. Объяснение данного явления требует дальнейших численных и аналитических исследований модели.

При определенных значениях параметров, заданных в указанных выше границах, численное моделирование дает следующий интересный результат. Распределение МСИ первого нейрона (рис. 2a) состоит из пика конечной ширины на периоде внешнего воздействия.

А распределение второго нейрона состоит из более узких пиков на кратных периодах внешнего воздействия. Сужение пиков распределения МСИ второго нейрона позволяет сделать предположение о том, что в данной системе при некоторых параметрах второй элемент обладает фильтрующей функциональностью, отделяющей определенную информацию во внешнем сигнале от шумовой составляющей.

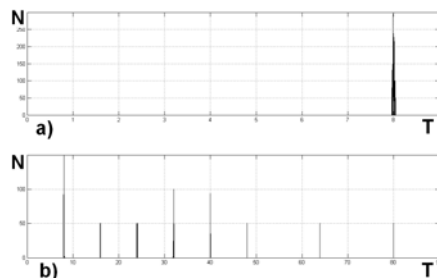


Рис. 2

- [1] Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. // Phys. Rep. 2004. No.392. P. 321.
- [2] Gammaitony L., Hanggi P., Jung P., Marchesony F. // Rev. Mod. Phys. 1998. V.70, No.1. P. 223.
- [3] Plesser H.E., Geisel T. // Phys. Rev. E, 1999. V.59, No.6. P. 7008.
- [4] Sailer X., Hennig D., Beato V., Engel H., Schimansky-Geier L. // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. P. 056209.
- [5] Longtin A. // Fluctuation and Noise Letters. 2002. V. 2, No.3. P. 183.
- [6] Kreuz T., Luccioli S., Torcini A. // Phys. Rev. Let. PRL. 2006. V. 97. P. 238101.
- [7] Casado J.M. // Phys. Let. A. 2003. V. 310. P. 400.

НОВЫЕ ВОЗМОЖНЫЕ ПОДХОДЫ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЖИМА СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

А.А. Дубков, А.В. Фарфель

Нижегородский госуниверситет

Целью нашей работы является рассмотрение новых возможных подходов к исследованию нелинейного режима стохастического резонанса. В частности, мы рассматриваем случай с гауссовым приближением, а также предлагаем рассмотреть модель телеграфного процесса с распределением плотности вероятности выходного сигнала в виде двух дельта-функций. Полученные результаты предлагается сравнить с результатами для линейного приближения, полученные П. Юнгом и П. Хэнги в своей работе от 1991 года [1]. Основная цель работы – исследование зависимости коэффициента усиления сигнала по мощности от интенсивности накладываемого на систему шума для разных частот и амплитуд входного сигнала. Итак, система описывается уравнением:

$$\dot{x} = x - x^3 + s(t) + \zeta(t). \quad (1)$$

Вспользуемся общими уравнениями для кумулянтов произвольного марковского случайного процесса, полученные А.Н. Малаховым [2], которые для непрерывного марковского процесса принимают вид:

$$\frac{d\kappa_s}{dt} = s \langle x^{[s-1]}, K_1(x, t) \rangle + \frac{s(s-1)}{2} \langle x^{[s-2]}, K_2(x, t) \rangle. \quad (2)$$

В гауссовом приближении получаем систему уравнений для первых двух кумулянтов (см. [3]):

$$\frac{d\kappa_1}{dt} = -3\kappa_2\kappa_1 - \kappa_1^3 + \kappa_1 + s(t), \quad (3)$$

$$\frac{d\kappa_2}{dt} = -6\kappa_2^2 - 6\kappa_2\kappa_1^2 + 2\kappa_2 + 2D.$$

Решая систему численными методами, получаем интересные нас зависимости для разных амплитуд входного сигнала (рис.1 a,b,c).

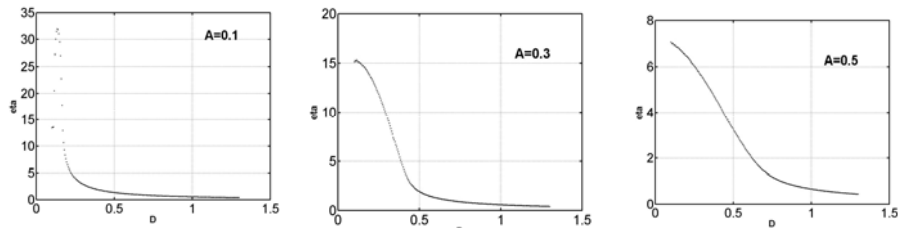


Рис.1а

Рис.1б

Рис.1с

В приближении телеграфного сигнала используем следующую модельную плотность вероятности выходного сигнала:

$$W(x, t) = p(t)\delta(x + a(t)) + q(t)\delta(x - b(t)). \quad (4)$$

Из уравнения (1), описывающего стохастическую систему, а также вспомогательной производящей функции, соответствующей распределению (4) (см. [4]), получим следующую замкнутую систему уравнений для первых трех кумулянтов:

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_1}{dt} &= \kappa_1 - \kappa_3 - 3\kappa_2\kappa_1 - \kappa_1^3 + s(t), \\ \frac{d\kappa_2}{dt} &= 2\left(\kappa_2 - \kappa_2^2 - 3\kappa_3\kappa_1 - \frac{\kappa_3^2}{\kappa_2} - 3\kappa_2\kappa_1^2\right) + 2D, \\ \frac{d\kappa_3}{dt} &= 3\kappa_3\left(1 - \kappa_2 - \frac{\kappa_3^2}{\kappa_2^2} - 3\frac{\kappa_3\kappa_1}{\kappa_2} - 3\kappa_1^2\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Решаем получившуюся систему численными методами и получаем интересные зависимости для разных амплитуд входного сигнала (рис.2 a,b,c).

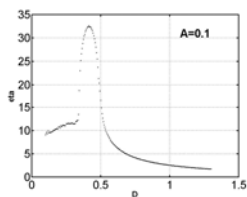


Рис.2a

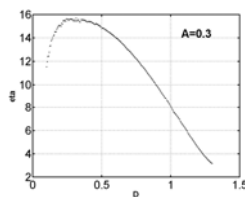


Рис.2b

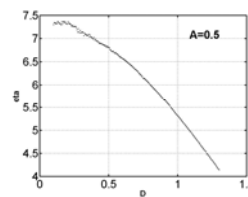


Рис.2c

- [1] Jung P., Hanggi P. // Phys. Rev. A. 1991. V.44. No.12. P. 8032.
 [2] Малахов А. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т.19, №1.
 [3] Dubkov A. A., Spagnolo B., Valenti D. // Proc. SPIE: Noise in Complex Systems and Stochastic Dynamics III / Ed. Kish L.B., Lindenberg K., Gingl Z. Washington: SPIE, 2005. V.76. P. 40.
 [4] Кузовлев Ю. Е., Бочков Г. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т.20, №10. С. 1505.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИММЕТРИЧНОГО КВАЗИМУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ПРОЦЕССА

А.И. Саичев, В.А. Филимонов

Нижегородский госуниверситет

Изучение мультифрактальных процессов, являющихся обобщением каскадных моделей Ричардсона и Колмогорова, началось сравнительно недавно. Основное развитие данная область теории случайных процессов получила в рамках исследования турбулентности, и в настоящее время, после того, как было показано, что приращения скорости в развитой турбулентности имеют мультифрактальный ха-

рактер, интерес к изучению мультифрактальных свойств турбулентности сильно возрос. Несмотря на обилие работ, посвященных мультифрактальным процессам, большинство моделей подобных процессов несли в себе существенные внутренние противоречия. Наиболее адекватно отражающей свойства мультифрактальных процессов стала предложенная в [1] для монотонно растущего процесса и развитая в [2] для симметричного процесса квазимультифрактальная модель. Однако предложенный в данных работах аналитический метод расчета пригоден лишь для изучения исключительно квазимультифрактальных спектров процессов, не позволяя анализировать непосредственные реализации. Настоящая работа посвящена изучению реализаций квазимультифрактального процесса при помощи метода численного моделирования.

Следуя предложенной нами модели, представим дискретный диффузионный квазимультифрактальный процесс X_n в виде:

$$X_n = \sum_{i=0}^n \xi_i e^{\omega_i}, \quad (1)$$
$$\omega_i = \rho \sum_{j=0}^i \mu_j (i-j+1)^{-\varphi-\frac{1}{2}}$$

где ξ_i и μ_i – некоррелированные гауссовы величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, ρ – ключевой параметр мультифрактальности, а φ – параметр, определяющий скорость спадания ядра процесса $(i-j+1)^{-\varphi-\frac{1}{2}}$.

Проведенное исследование реализаций показывает существование трех различных областей параметров квазимультифрактального процесса. Первая «монокрактальная» область (или область «слабой» мультифрактальности) отвечает малым значениям параметра ρ (рис. 1а). В этой области (что и отражено в названии) процесс имеет практически монокрактальный вид, а в пределе при $\rho \rightarrow 0$ вообще становится винеровским. Квазимультифрактальный спектр процесса при этом имеет близкий к линейному вид (рис. 2а). С ростом ρ мультифрактальные свойства процесса становятся более значительными. Внешне это проявляется в появлении большого числа быстрых «скачков» (рис. 1б и рис. 1с), а со «спектральной точки зрения» – в искривлении квазимультифрактальных спектров. При этом в области существенной нелинейности также можно выделить две подобласти параметров – «умеренной» и «сильной» мультифрактальности. В области «умеренной» мультифрактальности «скачки» реализации еще недостаточно сильны (рис. 1б), а квазимультифрактальный спектр хорошо описывается параболической зависимостью (рис. 2б), характерной для широко распространенной модели мультифрактальных случайных блужданий. В области же «сильной» мультифрактальности растет амплитуда скачков, и при больших значениях ρ процесс X_n можно рассматривать как некоторый обобщенный телеграфный процесс (рис. 1с). Квазимультифрактальный спектр процесса при этом становится существенно отличным от параболического (рис. 2с).

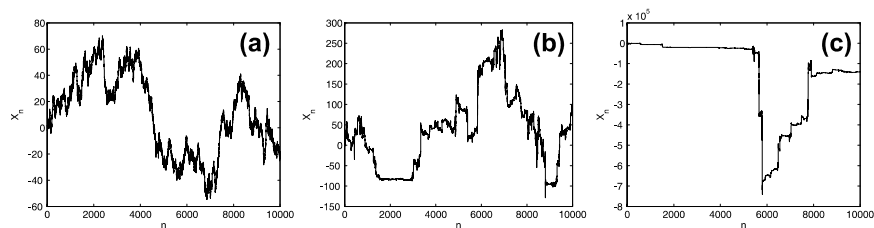


Рис.1. Реализации дискретного диффузионного квазимультифрактального процесса X_n при $\varphi=0.01$ и (a) $\rho=0.1$, (b) $\rho=0.5$, (c) $\rho=0.9$.

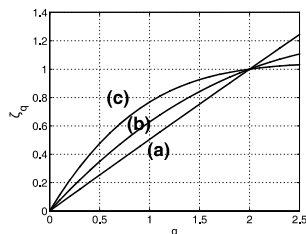


Рис.2. Спектры дискретного диффузионного квазимультифрактального процесса X_n при $\varphi=0.01$ и (a) $\rho=0.1$, (b) $\rho=0.5$, (c) $\rho=0.9$.

Отметим, что если области «монофрактальности» и «умеренной» мультифрактальности достаточно хорошо описываются существующими широко известными моделями, такими, как, например, модель мультифрактальных случайных блужданий [3], то анализ области «сильной» мультифрактальности, возможный только в рамках предложенной квазимультифрактальной модели, является существенным шагом вперед в теории мультифрактальных случайных процессов.

[1] Saichev A., Sornette D. // Phys. Rev. E. 2006. V. 74. P. 011111-1.

[2] Саичев А.И., Филимонов В.А. // ЖЭТФ, 2007. Т. 132, № 5. С. 1235.

[3] Bacry E., Delour J., Muzy J.-F. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 026103-1.

О ВОЗМОЖНОСТИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ETAS ПРИ ПОМОЩИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ

С.Г. Уткин

Нижегородский госуниверситет

Многие сложные системы, представляющие интерес с точки зрения естественных и социальных наук, демонстрируют периодические всплески активности, перемежающиеся с достаточно длительными промежутками ее спада. Одним из простых инструментов измерения этого свойства является распределение интервалов между последовательными событиями.

Большой интерес физиков в последнее время привлекает применение свойств автомодельности, широко распространенных при изучении критических явлений, к статистике времен ожидания между толчками землетрясений [1–3]. Многие утверждения, сделанные в этих и других работах, были поставлены под сомнение, опровергнуты или объяснены ранее известными фактами из статистики землетрясений. В частности, Саичев и Сорнетт [4, 5] разработали общую теорию статистики времен ожидания в рамках класса самовозбуждающихся процессов Хокса. Соответствующая модель известна под аббревиатурой ETAS (epidemic-type aftershock sequence). Ее суть в том, что каждый толчок землетрясения может порождать другие толчки, которые, в свою очередь, также могут порождать толчки и т.д. Данная модель описывает пространственно-временную кластеризацию сейсмичности. Используя всего три закономерности, широко известные в статистических исследованиях сейсмичности (законы Гуттенберга-Рихтера, Омори и закон продуктивности), можно объяснить эмпирически наблюдаемое распределение времен ожидания без привлечения дополнительных механизмов, помимо факта, что землетрясения могут порождать другие землетрясения [4, 5].

Последние исследования привели к предположению, что распределение времен ожидания может открыть новый, более надежный, чем существующие, способ измерения фоновой сейсмической активности, одного из главных параметров модели ETAS [6]. Представленная работа посвящена проверке этого предположения.

В работах [4, 5] удалось вывести уравнения, решением которых является искомая функция распределения времен ожиданий, однако решение на том этапе было получено лишь в сильно упрощенном случае (при помощи линеаризации). Позднее удалось подобрать алгоритм для численного нахождения нелинейных уравнений [7]. Тогда же была проверена гипотеза о четкой взаимнооднозначной зависимости распределения времен между толчками землетрясения и параметрами модели ETAS.

Исходя из графика (рис.1), на котором представлены 36 распределений времен ожидания при различных сочетаниях параметров модели, можно заключить, что для достаточно больших интервалов ($x > 0,1$) теоретическое распределение вполне точно описывает реальное поведение толчков землетрясений (данные нанесены на плоскость и обозначены кружками). Однако, что также видно из графика, эти распределения практически абсолютно нечувствительны к выбору параметров модели. С другой стороны, при $x < 0,1$ чувствительность к параметрам проявляется более ярко, однако и здесь желаемая задача не может быть выполнена по причине существования многих одинаково хорошо аппроксимирующих данные зависимостей с абсолютно разными наборами параметров. Теоретический анализ и его сравнение с реальными данными землетрясений [2], к сожалению, отвергают возможность использования распределения времен ожидания в качестве более действенного инструмента оценки таких важных параметров модели ETAS, как, например, фоновая сейсмическая активность (как было предложено, в частности в [6]).

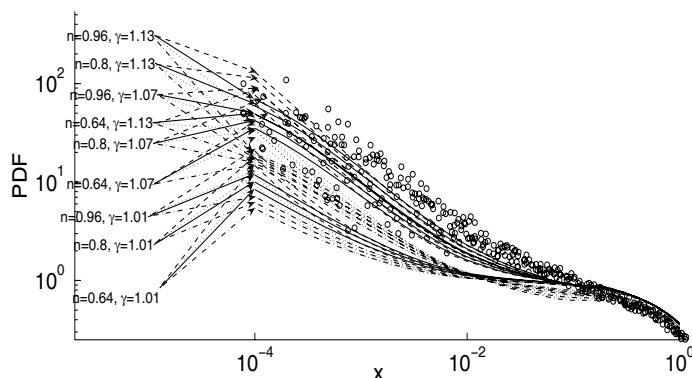


Рис. 1. Сравнение 36-ти распределений времен ожиданий, построенных для различных комбинаций параметров модели ETAS.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 06-02-16414а, «Ведущие научные школы» НШ-1055.2008.2, гранта поддержки молодых ученых МК-3502.2007.2.

- [1] Bak P. et. al. // Phys. Rev. Lett. 2002. V.88, No.17. P. 178501.
- [2] Corral A. // Phys. Rev. E. 2003. V.68. P. 035102.
- [3] Livina V. N., Havlin S., Bunde A. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 95. P. 208501.
- [4] Saichev A., Sornette D. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 078501.
- [5] Saichev A., Sornette D. // J. Geophys. Res. 2007. V. 112. P. B04313.
- [6] Hainzl S., Scherbaum F., Beauval C. // Bulletin of the Seismological Society of America. 2006. V.96, No.1. P. 313.
- [7] Sornette D., Utkin S., Saichev A. // Phys. Rev. E. 2008. V.68. P. 035102.

К ВОПРОСУ ОБ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ В ДЕМОГРАФИИ

С. А. Макаров¹⁾, В. А. Савин²⁾

¹⁾Волго-Вятская академия государственной службы

²⁾Нижегородский госуниверситет

Описание динамики миграции населения, трудовых ресурсов при помощи системы дифференциальных уравнений, которые используются в ряде имитационных социально-экономических моделей развития народного хозяйства страны или отдельно взятого региона, сопряжено с достаточно трудными вычислительными процедурами. При этом в саму модель не привносится сколь либо значимое дополнительное содержание.

Изменение количества населения в регионе i рассмотрим через функцию темпа миграции:

$$I_i = 1 + \delta \frac{K_i - \bar{K}}{\sum_i K_i} \quad (1)$$

где K_i - привлекательность региона i .

Коэффициент привлекательности региона можно представить в виде мультипликативной функции:

$$K_i = \prod_j \left(\frac{F_{ij}}{F_{j0}} \right)^{\alpha_j}, \quad (2)$$

где F_{ij} и F_{j0} - соответственно, значения j -го фактора привлекательности в регионе i и нормальное значение данного фактора (в качестве последнего может быть взято среднее значение).

Функция (1) представляет собой первые два члена разложения экспоненты в ряд Тейлора в окрестности нуля. Следовательно, темп миграции можно представить

$$I_i = \exp \left(\delta \frac{K_i - \bar{K}}{\sum_i K_i} \right). \quad (3)$$

Для соблюдения баланса миграции рассчитаем показатели доли населения находящегося в регионе i в момент времени $t+1$ по уравнению:

$$c_i^{t+1} = \frac{c_i^t \cdot \frac{I_i}{\sum_i I_i}}{\sum_i c_i^t \cdot \frac{I_i}{\sum_i I_i}} \quad (4)$$

при условии, что общая численность населения не изменилась.

Подобные расчеты могут быть применены не только для оценки межрегиональной или международной миграции населения, связанной с переменой места жительства, но также и для оценки миграции трудовых ресурсов между отраслями внутри экономики государства или региона, а также для оценки миграции трудового ресурса между предприятиями в экономике города.

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
«СПРОС-ПРЕДЛОЖЕНИЕ»**

С. А. Макаров¹⁾, В. А. Савин²⁾

¹⁾Волго-Вятская академия государственной службы

²⁾Нижегородский госуниверситет

Исследование равновесия на рынке при помощи функций спроса и предложения сопряжено с рядом трудностей, связанных с процедурой поиска равновесного состояния и определения стратегии поведения производителей и потребителей. Предлагается исследовать равновесное состояние на рынке при помощи функции насыщения спроса, предполагая, что спрос есть величина постоянная.

Рассмотрим функцию насыщения спроса в виде следующей зависимости:

$$V = \begin{cases} \left(\frac{S}{D}\right)^k \cdot D & S < D \\ \left(1 + k \ln \frac{S}{D}\right) \cdot D & S \geq D \end{cases} \quad (1)$$

Под k будем понимать реакцию изменения объема выручки от степени насыщения спроса. Функция позволяет рассчитать объем реализации при каждом значении равновесной цены. При этом существенно облегчается поиск стратегии оптимального поведения производителей, определяющих предложение товара на рынке. Если предположить, что затраты на производство линейно зависят от объема производства, то оптимальное поведение производителей определяется максимальным значением прибыли:

$$\Pi = \begin{cases} \left(\frac{S}{D}\right)^k \cdot D - aS - b & S < D \\ \left(1 + k \ln \frac{S}{D}\right) \cdot D - aS - b & S \geq D \end{cases} \quad (2)$$

где параметры a и b представляют собой, соответственно, переменные издержки как доля от объема производства и постоянные издержки в абсолютном выражении. При $a > k$ и $0 < k < 1$ максимум прибыли может быть достигнут только при превышении спроса над предложением (дефиците товара). Если $k > 1$, то производство невыгодно (переменные издержки при этом превышают стоимость товара при цене, которая сложилась бы при производстве в размере спроса). При $a < k$ выгодно пере-производство товара, причем даже в том случае, когда $a > 1$.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ С КОММУТАТОРАМИ МАТРИЦ

Д.Н. Кобяков

Нижегородский госуниверситет

В настоящей работе представлен алгебраический подход к решению квантового уравнения Лиувилля, описывающего взаимодействие квантовой системы с электромагнитными полями. Особый интерес и сложность решения представляет задача о взаимодействии с флуктуирующим полем. В такой задаче возникает трудность в вычислении произведения коммутаторов физических величин в разные моменты времени [1]. Разработанный метод представляет коммутаторы в виде, удобном для вычисления таких произведений. Кроме того, использование метода позволяет решить уравнение Лиувилля с постоянными коэффициентами для двухуровневой системы. Насколько известно автору, такая задача пока не была решена.

Метод основан на представлении операции коммутации Гамильтониана как действия некоторой четырёхиндексной матрицы:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\alpha'\beta'} [\hat{H}(t), \cdot]_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \rho_{\alpha'\beta'}(t), \quad (1)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N$. Для удобства можно ввести два определения. Для представления матрицы $N \times N$ определим *матричный базис* $\hat{\sigma}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, N$) как матрицу $N \times N$ с единственным ненулевым матричным элементом. Матричные элементы базисного элемента $\hat{\sigma}_{ij}$ будут следующими:

$$\{\hat{\sigma}_{ij}\}_{\alpha\beta} = \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta}, \quad (2)$$

где $\delta_{i\alpha}$ - дельта-символ Кронекера.

Для любой $N \times N$ матрицы \hat{A} с матричными элементами $A_{\alpha\beta}$ справедливо:

$$\hat{A} = \sum_{i,j} A_{\alpha\beta} \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \hat{\sigma}_{ij}. \quad (3)$$

В качестве базисного набора для класса линейных операторов, соответствующих коммутаторам рассматриваемой N -уровневой квантовой системы, можно выбрать N^4 элементов из этого класса. Введём *коммутаторный базис* $D_{ij;kl}$, определив его по действию на матричный базис:

$$D_{ij;kl} \hat{\sigma}_{mn} = \delta_{km} \delta_{ln} \hat{\sigma}_{ij}, \quad (4)$$

где $i, j, k, l, m, n = 1, 2, \dots, N$. Имея это определение, нетрудно получить закон перемножения для элементов коммутаторного базиса:

$$D_{ij;kl} D_{mn;pq} = \delta_{km} \delta_{ln} D_{ij;pq}. \quad (5)$$

Последняя формула позволяет предложить удобный метод перемножения коммутаторов. А именно, если разложить коммутатор по этому базису и свести коэффициенты разложения в матрицу, то при умножении на другой, разложенный так же, коммутатор можно будет использовать *обычные матричные правила* для полу-

чения матрицы-результата. Рассмотрим операцию коммутации. Обозначим коммутатор с $\hat{\sigma}_{ij}$ как T_{ij} , или

$$T_{ij} = [\hat{\sigma}_{ij}, \cdot], \quad (6)$$

где на место точки должна быть поставлена матрица, на которую действует T_{ij} . Теперь можно, проделав несложные алгебраические действия, получить формулу разложения T_{ij} по коммутаторному базису:

$$T_{ij} = \sum_{k,l} (\delta_{kj} D_{il,kl} - \delta_{il} D_{kj,kl}). \quad (7)$$

Перейдём к конкретному примеру двухуровневой системы. Её гамильтониан раскладывается по матрицам Паули $\hat{\sigma}_i$, являющимся линейным преобразованием матричного базиса:

$$\sigma_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \sigma_1 = \sigma_{12} + \sigma_{21}, \sigma_2 = i\sigma_{21} - i\sigma_{12}, \sigma_3 = \sigma_{11} - \sigma_{22}. \quad (9)$$

Обозначим: $T_i = [\hat{\sigma}_i, \cdot]$. Тогда из очевидных соображений следует

$$T_0 = 0, T_1 = 2iD_{3;2} - 2iD_{2;3}, T_2 = 2iD_{1;3} - 2iD_{3;1}, T_3 = 2iD_{2;1} - 2iD_{1;2}. \quad (10)$$

Нетрудно заметить, что благодаря тому, что в этих разложениях индексы базисных коммутаторов альтернированы, существуют рекуррентные соотношения

$$T_i^{2n+2} = 4^n T_i^2; T_i^{2n+1} = 4^n T_i \text{ для } n=0,1,2,\dots \quad (11)$$

Решение уравнения Лиувилля с постоянными коэффициентами можно записать как

$$e^{\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3} \cdot \sigma_0 = \sigma_0, \quad (12a)$$

$$e^{\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3} \cdot \sigma_1 = \{+1 + BR_{23}^2\} \sigma_1 + \{+i\gamma A - \alpha\beta B\} \sigma_2 + \{-i\beta A - \alpha\gamma B\} \sigma_3, \quad (12b)$$

$$e^{\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3} \cdot \sigma_2 = \{-i\gamma A - \alpha\beta B\} \sigma_1 + \{+1 + BR_{13}^2\} \sigma_2 + \{+i\alpha A - \beta\gamma B\} \sigma_3, \quad (12c)$$

$$e^{\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3} \cdot \sigma_3 = \{+i\beta A - \alpha\gamma B\} \sigma_1 + \{-i\alpha A - \beta\gamma B\} \sigma_2 + \{+1 + BR_{12}^2\} \sigma_3. \quad (12d)$$

$$A = \frac{1}{R_0} \text{sh}(2R_0), B = \frac{1}{R_0^2} [\text{ch}(2R_0) - 1], R_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \quad (12e, g)$$

$$R_{12}^2 = \alpha^2 + \beta^2, R_{13}^2 = \alpha^2 + \gamma^2, R_{23}^2 = \beta^2 + \gamma^2. \quad (12h, j)$$

В следующих работах будет рассмотрено обобщение метода на системы большего числа уровней и некоторые физические приложения.

[1] Faid K., Fox R.F. //Phys. Rev. 1986. V.A34. P.4286.