ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

О «НАРУШЕНИИ» НЕРАВЕНСТВ БЕЛЛА В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

А.Т. Гаврилин

Нижегородский госуниверситет

В 1964 году ирландский физик Джон Стюарт Белл сформулировал так называемые неравенства «локального реализма» относительно совместных вероятностей или корреляций результатов экспериментов над переменными составных квантовых систем, допускающие опытную проверку. В дальнейшем неравенства белловского типа модифицировались и обобщались в различных направлениях, опираясь, тем не менее (хотя, как правило, и в скрытой форме), на следующее утверждение:

Обобщенная теорема Белла. Пусть $(\Sigma, \cup, \cap, \ \bar{}\ )$ – полная дистрибутивная структура с ортодополнением (булева алгебра), а P(•) – неотрицательная аддитивная функция на $\sum$. Тогда для любых $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \Sigma$ справедливо неравенство

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leq \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) + \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}}). \tag{1}$$

Доказательство (1) проводится в две строчки:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \equiv \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap (\mathrm{C} \cup \overline{\mathrm{C}})) = P((\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap C) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}})) =$$
$$= P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap C) + P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}}) \leq P(\mathrm{A} \cap C) + P(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}}).$$

Заметим, что второе равенство здесь справедливо в силу дистрибутивности $\sum$, а третье – в силу аддитивности P. Приведем пример «нарушения» неравенства (1), полагая, что функция P моделирует относительные частоты результатов измерений в рандомизированном статистическом эксперименте. Пусть устройство содержит генератор случайных целых чисел с делителем по модулю 3 (ГЦЧ), три генератора коллинеарных пучков поляризованных вдоль осей $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ и $(-1)\mathbf{n}_3$ фермионов и два анализатора, ориентированных в той же плоскости вдоль осей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. (В качестве тех и других могут выступать сильно неоднородные магнитные поля, как в двойном опыте Штерна–Герлаха). ГЦЧ с равными вероятностями выдает команды на запуск одного из генераторов чистых состояний (ЧС) [1] фермиона (события $A_2, A_3, \overline{A}_3$). Синхронно с событием A_2 или A_3 ГЦЧ активирует анализатор $\mathbf{n}_1$, а вместе с $\overline{A}_3$ – анализатор $\mathbf{n}_3$. Отметим, что в традиционных экспериментах по проверке неравенств Белла [2] в качестве генераторов изотропных смесей ЧС частицы выступают генераторы синглетных ЧС составных систем, где исследуемая частица исполняет роль подсистемы.

Согласно законам квантовой механики, осям $\mathbf{n}_i$ и $(-1)\mathbf{n}_i$ отвечает ортогональный базис в пространстве состояний фермиона, поэтому на выходе анализатора $\mathbf{n}_i$ случается одно из событий A_i, $\overline{A_i}$, причем условные вероятности измерений в ЧС выражаются формулами:

$$P(A_i|A_j) = P(A_j|A_j) = \cos^2\frac{\vartheta_{ij}}{2}$$

где ϑ_{ij} – угол между осями $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_j$. («Уполовинивание» аргумента косинуса по сравнению с фотонным прототипом (законом Малюса) обусловлено спинорным характером преобразований состояния фермиона.)

Если считать, что события A_1, A_2, A_3 принадлежат булевой алгебре, то по формуле умножения вероятностей

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i|A_j)\, P(A_j), \tag{2}$$

что в нашем случае дает $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{3}\cos^2\frac{\vartheta_{ij}}{2}$.

В силу (1) для осей $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ и (-1)$\mathbf{n}_3$ должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{6}(1+\cos\vartheta_{12}) \le \frac{1}{6}(1+\cos\vartheta_{13}) + \frac{1}{6}(1-\cos\vartheta_{23}), \tag{3}$$

где ϑ_{ij} – угол между осями $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{n}_j$. Чтобы убедиться в нарушении (3), достаточно взять три компланарные оси, где $\vartheta_{12} = \alpha, \vartheta_{23} = \alpha, \vartheta_{13} = 2\alpha$. Тогда при $0<\alpha<(½)\pi$

$$\frac{1}{6}(1+\cos\alpha) > \frac{1}{6}(1+\cos 2\alpha) + \frac{1}{6}(1-\cos\alpha),$$

что противоречит (3), причем максимальное отклонение имеет место при $\alpha=\pi/3$.

Причину нарушения (1) в экспериментах указанного типа, на наш взгляд, следует искать не в какой-то мистической нелокальности квантовых явлений и уж тем более не в допущении отрицательных вероятностей [3], что лишало бы их роли моделирующей функции относительных частот, а в некорректности применения здесь формулы (2). В самом деле, по Колмогорову (2) является определением условной вероятности, которая оказывается аддитивной лишь в силу дистрибутивности структуры событий. В квантовой же механике события представляют собой линейные подпространства некоторого пространства состояний и, как легко убедиться, упомянутым свойством не обладают. Так, прямая сумма двух несовпадающих лучей есть плоскость. Ее пересечение с любым компланарным лучом совпадает с последним. В то же время пересечения этого последнего с несовпадающими лучами имеют место лишь в одной точке.

[1] Гаврилин А.Т. // Изв. вузов. Физика. 1990. Т.33, №1. С.66.
[2] Бауместер Д. и др. Физика квантовой информации. М.: Постмаркет, 2002. С.34.
[3] Евдокимов Н.В., Клышко Д.Н., Комолов В.П., Ярочкин В.А. //УФН. 1996. Т.166, №1. С.91.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРА ДИФФУЗИИ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПЕРЕВЕРНУТОМ НАКЛОННОМ П-ОБРАЗНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

В.Н. Ганин, А.А. Дубков

Нижегородский госуниверситет

В работе решена задача нахождения спектра установившегося движения броуновской частицы в моностабильной системе. Как известно, движение частицы в среде с большой вязкостью описывается уравнением Ланжевена вида

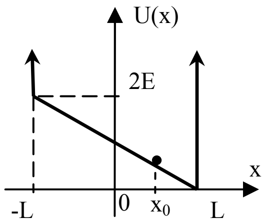

Рис. 1

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU(x)}{dx} + \xi(t) , \tag{1}$$

где $x(t)$ – координата броуновской частицы, $\xi(t)$ – гауссов белый шум с интенсивностью $2D$. Рассмотрим далее асимметричный кусочно-линейный потенциал $U(x)=E(1-x/L)$ с отражающими границами в точках $\pm L$ (рис.1). Спектр флуктуаций координаты броуновской частицы $S(f)$ в установившемся режиме ($t\to\infty$) может быть вычислен через Лаплас-образ функции корреляции $\tilde{K}(p)$ по следующей формуле (см., например, [1])

$$S(f) = 4\,\mathrm{Re}\left\{\tilde{K}(2\pi fi)\right\}. \tag{2}$$

Здесь

$$\tilde{K}(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_0 W_\infty(x_0)dx_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xY(x,x_0,p)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_0 W_\infty(x_0)G(x_0,p)dx_0 , \tag{3}$$

где $Y(x,x_0,p)$ – преобразование Лапласа плотности вероятностей переходов $W(x,t|x_0,0)$ марковского процесса $x(t)$, $W_\infty(x)$ – установившаяся плотность вероятности. Соответствующее (1) уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятности процесса $x(t)$ таково

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U(x)}{\partial x} W(x,t)\right) + D\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} . \tag{4}$$

Для определения плотности вероятностей переходов уравнение (4) необходимо решать с начальным условием

$$W(x,0) = \delta(x - x_0) . \tag{5}$$

На отражающих границах $x=\pm L$ потенциального профиля поток плотности вероятности равен нулю, поэтому из уравнения (4) находим

$$\left[DW'_x(x,t) + U'(x)W(x,t)\right]\Big|_{x=\pm L} = 0 . \tag{6}$$

Переходя в (4) к Лаплас-образу плотности вероятностей переходов и учитывая начальное условие (5), приходим к уравнению в обыкновенных производных

$$DY''+[U'(x)Y]'-pY=-\delta(x-x_0)\ . \tag{7}$$

Подставляя в (7) выражение для потенциала $U(x)$, решаем уравнение для двух областей: $-L\le x<x_0$, $x_0\le x\le L$, а в точке $x=x_0$ применяем вытекающие из (7) условия сшивки решений. После подстановки решения уравнения (7) в формулу (3) находим внутренний интеграл – функцию $G(x_0,p)$

$$G(x_0,p)=\frac{x_0}{p}+\frac{E}{Lp^2}+\frac{pLe^{E/D}+\mu Ee^{\lambda L}}{p^2L(\lambda e^{\mu L}-\mu e^{\lambda L})}e^{-\lambda x_0}-\frac{pLe^{E/D}+\lambda Ee^{\mu L}}{p^2L(\lambda e^{\mu L}-\mu e^{\lambda L})}e^{-\mu x_0}\ , \tag{8}$$

где λ и μ – корни квадратного уравнения: $Ds^2-(E/L)s-p=0$. Далее с учетом известного выражения для стационарной плотности вероятности системы (1) (см., например, [2]) и формулы (8) определяем Лаплас-образ корреляционной функции

$$\begin{aligned}\widetilde{K}(p)=&\frac{<x_0^2>}{p}+\frac{E}{p^2(e^{E/D}-1)}\left(\frac{D}{E}+e^{E/D}(1-\frac{D}{E})\right)+\\&+\frac{pLe^{E/D}+\mu Ee^{\lambda L}}{p^2\mu^2L(\lambda e^{\mu L}-\mu e^{\lambda L})}\left(1+e^{\mu L}(\mu L-1)\right)-\frac{pLe^{E/D}+\lambda Ee^{\mu L}}{p^2\lambda^2L(\lambda e^{\mu L}-\mu e^{\lambda L})}\left(1+e^{\lambda L}(\lambda L-1)\right).\end{aligned} \tag{9}$$

Для вычисления спектра в формуле (9) осталось положить в соответствии с (2) $p=2\pi fi$ и найти реальную часть получившегося выражения.

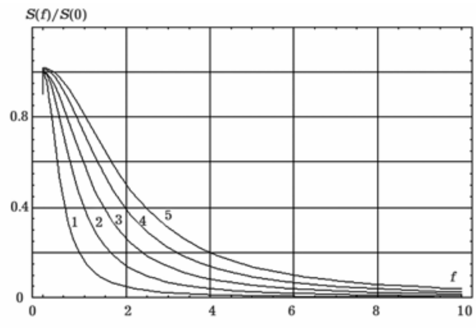

Рис. 2

На рис. 2 построен нормированный на значение в нуле спектр координаты броуновской частицы для различных значений интенсивности шума D (1 D=1; 2 – D=2; 3 – D=3; 4 – D=4; 5 – D=5). Из приведенного графика видно, что с увеличением интенсивности белого шума спектральная полоса уширяется, а сама кривая становится более пологой. Это можно объяснить следующим: увеличение D ведет к убыстрению движения броуновских частиц, что уменьшает время корреляции и соответственно увеличивает полосу спектра.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-02-16405).

[1] Дубков А.А., Малахов А.Н., Саичев А.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т.43, №4. С. 369.
[2] Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.

ЭФФЕКТ ЗАДЕРЖКИ ШУМОМ РАСПАДА НЕСТАБИЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В ДВУМЕРНОМ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

А.А. Дубков

Нижегородский госуниверситет

В сложных нелинейных динамических системах наблюдаются явления, в которых шум играет непривычную позитивную роль: стохастический резонанс, рэтчет-эффект, резонансная активация. К числу таких эффектов следует отнести и задержку шумом распада первоначально неустойчивых состояний [1–3]. Явление повышения устойчивости шумом наблюдается в системах с метастабильным состоянием и характеризуется наличием максимума в зависимости среднего времени жизни от интенсивности шума. В данной работе исследуются особенности эффекта задержки шумом распада нестабильных состояний при диффузии броуновских частиц в модельном двумерном потенциале.

Рассмотрим передемпфированное броуновское движение в двумерном осесимметричном потенциале $U(x,y)=U((x^2+y^2)^{1/2})$, описываемое уравнениями Ланжевена:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -U'_x + \xi_1(t), \\ \dot{y} &= -U'_y + \xi_2(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – координаты броуновской частицы, $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – статистически независимые гауссовы случайные процессы с нулевыми средними значениями и функциями корреляции $<\xi_i(t)\xi_i(t+\tau)>=2D\delta(\tau)$ (i=1, 2). Применяя стандартные методы марковской теории [4, 5], не составляет труда получить из (1) уравнение Фоккера–Планка для плотности вероятностей переходов в полярных координатах:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rU'(r)W\right] + \frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{D}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}. \tag{2}$$

Вычислим среднее время выхода броуновских частиц из круговой области $r<b$, предполагая, что в начальный момент времени t=0 все они равномерно “размазаны” по окружности радиуса r_0. При выбранных условиях среднее время $T(r_0)$ первого достижения границы $r=b$ не зависит от полярного угла и находится из обратного к (2) уравнения Фоккера–Планка [4,5]:

$$\frac{D}{r_0}\frac{d}{dr_0}\left(r_0\frac{dT}{dr_0}\right) - U'(r_0)\frac{dT}{dr_0} = -1. \tag{3}$$

Решая уравнение (3) с учетом ограниченности решения в точке r_0=0 и условия поглощения броуновских частиц на границе круга $T(b)$=0, приходим к

$$T(r_0) = \frac{1}{D}\int_{r_0}^{b} e^{\frac{U(x)}{D}} \frac{dx}{x}\int_0^x y e^{-\frac{U(y)}{D}} dy. \tag{4}$$

Для потенциала в форме конусообразного кратера $U(r)=hr$ ($r\le a$); $ha-k(r-a)$ ($r\ge a$) (рис. 1) и первоначально неустойчивого состояния $a<r_0<b$ из точной квадратурной формулы (4) получаем

$$T(r_0)=\frac{b-r_0}{k}-\frac{D}{k^2}\ln\frac{b}{r_0}+De^{\frac{ka}{D}}\left[\frac{1}{h^2}\left(e^{\beta}-1-\beta\right)+\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{ka}{D}\right)\right]\times \left[\mathrm{Ei}\left(-\frac{kb}{D}\right)-\mathrm{Ei}\left(-\frac{kr_0}{D}\right)\right]. \tag{5}$$

Здесь $\beta=ha/D$ – безразмерная высота потенциального барьера, $\mathrm{Ei}(x)$ – интегральная показательная функция. Пренебрежение в формуле (5) экспоненциально малыми членами в области интенсивностей шума $D\to 0$, где и наблюдается эффект стабилизации, дает следующее приближенное выражение для среднего времени жизни

$$T(r_0)\approx\frac{b-r_0}{k}-\frac{D}{k^2}\ln\frac{b}{r_0}+\frac{D^2}{kh^2r_0}\exp\left\{\frac{(h+k)a-kr_0}{D}\right\}. \tag{6}$$

Как видно из соотношения (6), задержка распада нестабильного состояния наблюдается лишь при условии $r_0<(1+h/k)a$, т.е. когда броуновские частицы в начальный момент времени находятся на склоне кратера выше его дна. При этом зависимость $T(r_0)$ от D имеет явно выраженный сингулярный характер: $T(r_0)\to\infty$ при $D\to 0$, в то время как $T(r_0;D=0)=(b-r_0)/k<\infty$. Зависимости нормированного среднего времени первого достижения границы $\tau(D)=T(r_0)/T(r_0;D=0)$ в полулогарифмическом масштабе представлены на рис. 2 для двух исходных положений частиц: $r_0=2$ (сплошная линия) и $r_0=3$ (пунктирная линия) и параметров $h=a=1$, $k=0.5$, $b=5$. Заметим, что для одномерной диффузии явление стабилизации шумом наблюдается при любом начальном расположении броуновских частиц (см., например, рис. 2 в [3]). Исчезновение эффекта при размещении частиц ниже или на уровне дна кратера (пунктирная линия на рис. 2) можно объяснить существенно большим числом возможных направлений диффузии в двумерном потенциале.

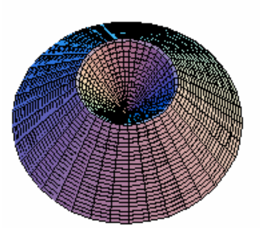

Рис. 1

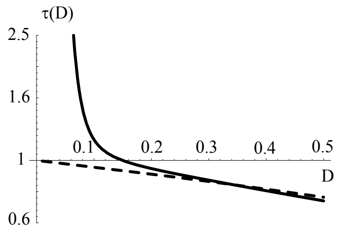

Рис. 2

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-02-16405).

[1] Dayan I., Gitterman M., Weiss G.H. // Phys. Rev. A. 1992. V.46, №2. P.757.
[2] Mantegna R.N., Spagnolo B. // Phys. Rev. Lett. 1996. V.76, №4. P.563.
[3] Agudov N.V., Spagnolo B. // Phys. Rev. E. 2001. V.64, №3. P.035102.
[4] Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.
[5] Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫБОРА ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Е.А. Зайцева[1], Е.В. Кошелев[2], А.Н. Ульянов[1]

[1]*Нижегородский технический университет*
[2]*Нижегородский госуниверситет*

Существующие на сегодня математические критерии выбора вложений капитала не являются самодостаточными, поскольку на практике могут привести к противоречивым результатам. Кроме того, задача выбора наиболее оптимального проекта зачастую усложняется неопределенностью значения дисконтной ставки. Решая такую задачу графическим методом, необходимо его уточнить в части расчета получающихся площадей.

В целях иллюстрации модифицированного графического метода рассмотрим следующий пример. Известны денежные потоки двух инвестиционных проектов 1 и 2 (в млн. руб.) (см. таблицу). Данные представлены на протяжении каждого года. Необходимо выбрать наиболее выгодный проект.

Таблица

Год	1	2	3	4	5	6
Проект 1	-25,601	11,99	12,01	12,86	13,73	14,63
Проект 2	-20,3	11,99	11,99	11,99	11,99	11,99

Год	7	8	9	10	11
Проект 1	15,55	16,5	17,47	18,47	19,48
Проект 2	11,99	11,99	11,99	11,99	11,99

Суть дальнейшего метода сравнения инвестиционных проектов заключается в построении графиков чистого приведенного дохода (*NPV*) обоих исследуемых проектов на интервале ставок дисконта, при которых *NPV* хотя бы одного проекта положителен, и вычислении двух полученных площадей между пересекающимися графиками на рис. Наибольшая площадь свидетельствует о наибольшей экономической выгоде того проекта, график которого при подсчете этой площади выше (см. рис.).

Для того чтобы вычислить площадь между графиками *NPV* двух проектов на интервале непрерывных ставок дисконта от δ_0 до δ_1, необходимо взять интеграл от функции ΔNPV от δ_0 до δ_1. При этом учитываем, что все денежные потоки по обоим проектам равномерно распределены в пределах каждого года. Получаем, что

$$\Delta NPV = \int_{\delta_0}^{\delta_1} \sum_{t=1}^{n} \frac{\Delta CF_t}{e^{\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\Delta CF_t}{t-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e^{\delta_0\left(t-\frac{1}{2}\right)}} - \frac{1}{e^{\delta_1\left(t-\frac{1}{2}\right)}} \right)$$

где ΔCF_t – денежный поток одного проекта минус денежный поток другого в году t, а n – общий срок проектов (количество лет).

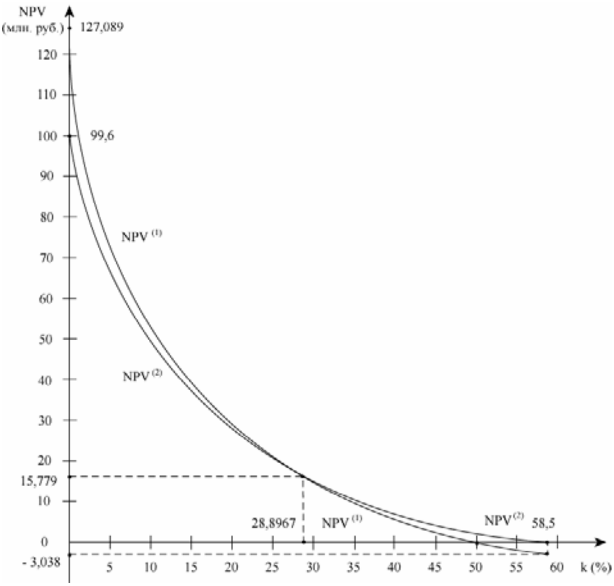

Рис.

Переходя от непрерывных ставок дисконта δ к дискретным ставкам k, получаем окончательную формулу для вычисления площади между NPV проектов:

$$\Delta NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{\Delta CF_t}{t-0,5}\left(\frac{1}{(1+k_0)^{t-0,5}} - \frac{1}{(1+k_1)^{t-0,5}}\right).$$

Рассмотрим весь интервал возможных положительных NPV согласно рисунку, т.е. где ставка дисконта k изменяется от 0% до 58,5%.

Используя последнюю формулу, рассчитаем площади, где NPV одного проекта выше NPV другого:

$$\underset{(1\succ 2)}{\Delta NPV} = 2,319889 \qquad \underset{(2\succ 1)}{\Delta NPV} = 0,400731$$

Первая площадь больше, следовательно, проект 1 выгоднее проекта 2, т.к. наибольшая площадь говорит о наибольшей экономической выгоде.

Таким образом, представленный модифицированный графический метод позволяет решить задачу выбора инвестиционного проекта в условиях неопределенности ставки дисконта. Кроме того, этот метод позволяет однозначно выяснить, какой из проектов является наиболее привлекательным, т.е. разрешить проблему противоречивости оценок стандартных критериев выбора вложений капитала.

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ В СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКОВ

С.А. Лапинова

Нижегородский госуниверситет

В работе рассматривается модель распространения волн, излучаемых точечным источником в случайных средах. Предполагается, что источник излучает плоские волны вида функции Берри [1, 2] в случайной среде

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^{M} a_m \exp(i\mathbf{k}_m \mathbf{r}), \qquad (1)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, $\mathbf{k}_m = k\,\mathbf{e}_1 \cos\theta_m + k\,\mathbf{e}_2 \sin\theta_m$ – волновой вектор с постоянным модулем k, θ_m – случайный угол направления с равномерным распределением на отрезке $[-\pi, \pi]$, M – общее число плоских волн, a_m – взаимно независимые случайные комплексные амплитуды, такие, что $\langle a_m \rangle = 0$, $\langle a_m a_n \rangle = 0$, $\langle a_m a_n^* \rangle = \delta_{mn}/M$. Изначально данная функция была предложена для исследования квантовых процессов, однако, благодаря своей универсальности, она может быть использована, например, и для описания шумовых гидроакустических волн.

Будем считать, что наличие статистических характеристик среды определяется наличием случайного волнового вектора у функции Берри. Были проведены необходимые преобразования, выделены мнимая $v(\mathbf{r})$ и действительная $u(\mathbf{r})$ части функции (1), которые при большом числе слагаемых будут статистически независимыми и, согласно центральной предельной теореме, иметь распределение Гаусса со средним значением

$$\langle u(\mathbf{r}) \rangle = \langle v(\mathbf{r}) \rangle = 0.$$

Была получена функция корреляции

$$K_J(\mathbf{s}) = \left\langle J(\mathbf{r}) J(\mathbf{r}+\mathbf{s}) \right\rangle,$$

где $J(\mathbf{r})$ – плотность потока энергии, определяемая как

$$J(\mathbf{r}) = \mathrm{Re}\{i\Psi^*(\mathbf{r}) \nabla\Psi(\mathbf{r})\}.$$

Функция корреляции, так же как и плотность потока энергии, определяется характером распределения волновых чисел $\boldsymbol{k}_m$. Данная зависимость была исследована на примере известных распределений таких, как равномерное распределение, нормальное распределение. Кроме того, исследовались функция корреляции плотности потока энергии волн и его плотность вероятности.

[1] Berry M.V. // Chaos and Quantum Physics. Amsterdam: Elsevier, 1990. P.251.
[2] Berry M.V. // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A. 1977. V. 287. P.237.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

Н.П. Семерикова

Нижегородский госуниверситет

Крутильные волны, наряду с изгибными и продольными, играют большую роль в формировании вибрационных полей машиностроительных конструкций. Различные математические модели, описывающие крутильные волны, базируются, как правило, на технической теории стесненного кручения. В этой теории предполагается, что кручение стержня складывается из двух связанных друг с другом движений: поворота поперечных сечений в своей плоскости и их депланации (т.е. выхода из первоначального плоского состояния в результате неодинакового растяжения продольных волокон стержня при кручении). Депланация при этом считается пропорциональной относительному углу поворота, а крутильные волны описываются уравнением Власова [1].

В данной работе предложена математическая модель, обобщающая модель крутильных колебаний Власова учетом геометрической нелинейности. Нелинейность, связанная с геометрией деформирования, обусловлена конечными углами поворота и конечными деформациями. В этом случае система смещений имеет вид:

$$u_1 = \Phi(y,z)\theta'_x(x,t), \quad u_2 = y(\cos\theta - 1) - z\sin\theta, \quad u_3 = y\sin\theta + z(\cos\theta - 1). \tag{1}$$

Здесь $\theta(x,t)$ – угол поворота поперечного сечения в своей плоскости, $\Phi(y,z)$ – функция кручения, определяющая депланацию поперечного сечения. Если угол поворота сечений является малым, то приближенно считается, что $sin\theta\sim\theta$, $cos\theta\sim 1$ и линеаризованная система (1) будет соответствовать системе смещений технической теории стесненного кручения [1].

Из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского получено уравнение, описывающее крутильные колебания стержня с учетом геометрической нелинейности:

$$\theta''_{tt} - \left(1 + \theta'^{\,2}_x\right)\theta''_{xx} + C^2\theta''''_{xxxx} - \theta''''_{xxtt} = 0\,. \tag{2}$$

Уравнение записано в безразмерных переменных, а безразмерный параметр C равен отношению скоростей продольных и крутильных волн в среде без дисперсии.

Уравнение (2) имеет решения в виде стационарных волн деформаций, форма которых не изменяется при их распространении. Существование таких волн обусловлено «уравновешиванием» факторов нелинейности и дисперсии [2]. Поиск решения в виде стационарной волны приводит уравнение (2) к известному уравнению Дуффинга, которое имеет как периодические, так и уединенные (солитоноподобные) решения. Солитоноподобные волны, так называемые «кинки», описываются выражением:

$$\theta(x,t) = A\Delta arctg\big(sh((x - Vt)/\Delta)\big), \tag{3}$$

где $V>C$ – скорость уединенной волны, $A=(6(V^2-1))^{1/2}$ – амплитуда, $\Delta=((V^2-C^2)/(V^2-1))^{\,2}$ – ее ширина. Волны (3) распространяются с постоянной скоростью, не изменяют при движении своей формы, устойчивы относительно малых возмущений и имеют параметр подобия $\sigma=A\Delta/(6(V^2-C^2))^{1/2}$, что не отличает их от классических солитонов. Однако амплитуда волн не может быть меньше порогового значения $A=(6(C^2-1))^{1/2}$, а ширина изменяется в пределах $0<\Delta<1$. Для таких волн численно обнаружены эффекты неупругого взаимодействия и расщепления при встречных столкновениях, что является их отличительной особенностью от солитона.

В результате численного моделирования встречного взаимодействия однополярных солитонов было обнаружено, что начиная с некоторой энергии (соответствующей критической ширине $\Delta^*>0{,}98$) они расщепляются, порождая вторичные частицеподобные волны и квазигармонический волновой пакет.

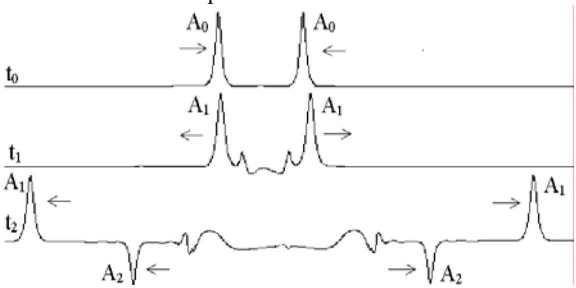

Рис.

При столкновении волн с одинаковыми амплитудами $A_0>A^*$ амплитуды вторичных волн связаны практически линейными соотношениями $A_1 \sim A_0\Delta^*$ и $A_2\sim 0{,}3A_1+3{,}4$, а избыток энергии излучается из зоны взаимодействия в виде квазигармонического волнового пакета. Приведенные на рисунке результаты соответствуют расщеплению первичной волны (A_0) на две вторичные (A_1 и A_2). Следует отметить, что соотношение A_0-A_1 сохраняется даже тогда, когда отсутствует эффект расщепления, а наблюдается неупругое взаимодействие первичных волн (при $\Delta^*<0{,}98$). При больших энергиях взаимодействия ($\Delta>0{,}99$) расщепление происходит на большее количество вторичных волн.

Аналогичные эффекты были обнаружены в результате численного моделирования встречного столкновения разнополярных локализованных волн (квазисолитонов) [2]. В этом случае расщепление разнополярных волн наблюдается при меньших значениях энергии, чем однополярных.

[1] Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.
[2] Кажаев В.В., Потапов А.И., Семерикова Н.П. //Изв. вузов. Радиофизика. Т.38, №1-2. С.100.

НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ МОДЕЛИ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ В ПРИМЕНЕНИИ К ИЗУЧЕНИЮ СТАТИСТИКИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

С.Г. Уткин

Нижегородский госуниверситет

Задача адекватного описания статистики землетрясений, наряду с поиском наилучшей модели механизма их возникновения, является актуальной для сейсмологов по всему миру. Основанная на ветвящихся процессах модель ETAS (Epidemic Type Aftershock Sequences) видится наиболее подходящей для описания распределений случайных интервалов между последовательными толчками землетрясений. Она предполагает отсутствие различий между предшествующими главным, главными и порожденными толчками. В статье [1] была предложена довольно простая теория об универсальном законе распределения упомянутых времен ожидания. Главным результатом [1] стала аналитически полученная функциональная форма распределения

$$H(\tau) = \lambda f(\lambda\tau),$$

которая достаточно хорошо аппроксимировала полученную ранее Кораллом [2] эмпирическую кривую, демонстрируя при этом еще большее согласование с реальными данными по многим сейсмически активным регионам. Поскольку исходные уравнения для нахождения этого распределения не удается решить аналитически, в [1] были использованы упрощенные линеаризованные уравнения. Однако дальнейшие исследования показали, что подобная линеаризация приводит к систематической ошибке в оценке ключевых параметров модели ETAS. В данной работе представлены результаты численного исследования распределений интервалов между толчками землетрясений.

Прежде всего, следует отметить, что модель ETAS основана на двух феноменологических степенных законах: законе Омори, описывающем толчки первого поколения

$$\Phi(t) = \theta c^{\theta} / (c+t)^{\theta},$$

и законе Гуттенберга–Рихтера для зависимости числа порожденных толчков от магнитуды главного толчка

$$Q(m) = 10^{-(m-m_0)}.$$

Уравнения же, которые необходимо решить для нахождения искомого распределения, выглядят следующим образом:

$$N\_(\tau,m) = 1-\Psi[\Phi(\tau) * N\_(\tau,m)]+Q(m)\,\Psi[Q^{1/\gamma}(m)\,\Phi(\tau) * N\_(\tau,m)] \quad (1)$$

$$N(t,\tau,m) = 1-\Psi[\Phi(t) * N(t,\tau,m)+\Phi(t+\tau) * N\_(\tau,m)] \quad (2)$$

Здесь $N(t,\tau,m)$ – вероятность того, что спонтанный толчок, появившийся в момент t, породит хотя бы один толчок в течение времени τ; $N\_(\tau,m)$ – вероятность возникновения спонтанного толчка в течение τ; * символизирует операцию свертки, а функция $\Psi(z)$ в общем случае имеет вид

$$\Psi(z) = \gamma\,(\kappa z)^{\gamma}\,\Gamma(-\gamma\,,\,\kappa z).$$

В [1], в целях упрощения, ограничились двумя первыми членами ее разложения

$$\Psi(z) = 1 - nz + \beta z^{\gamma} - \eta z^{2} + \ldots . \qquad (3)$$

Результаты представленной работы основаны на учете первых четырех членов разложения (3).

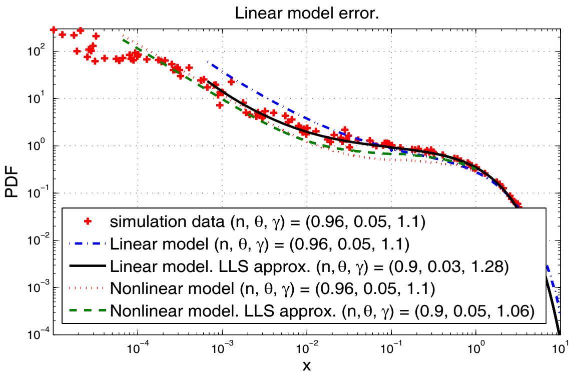

Рис. 1

Решая численно систему уравнений (1)–(2) с подстановкой (3) и применяя метод наименьших квадратов с логарифмическими весами для оптимизации ключевых параметров задачи (n, θ, γ), удалось найти их значения, максимально соответствующие имеющимся реальным данным [2]. Так, для линеаризованной модели, исследованной в [1], их значения равны соответственно (0.96, 0.05, 1.31), а при учете первых четырех членов разложения (3) оптимальные значения параметров равны (0.9, 0.05, 1.06).

Полученные результаты были проверены путем численной симуляции. Так, например, если взять вместо реальных данных результаты симуляций для заданных параметров ($n^s = 0.96$, $\theta^s = 0.05$, $\gamma^s = 1.1$), оптимизация решения линеаризованной модели приводит к ошибкам в найденных параметрах: $n^l = 0.9$, $\theta^l = 0.03$, $\gamma^l = 1.28$ (см. рис.). Для нелинейной аппроксимации (3) результат симуляции значительно лучше: $n^{nl} = 0.9$, $\theta^{nl} = 0.05$, $\gamma^{nl} = 1.06$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 06-02-16414а, РФФИ 05-02-16517а, Ведущие научные школы НШ-5200.2006.2, гранта поддержки молодых ученых МК-3502.2007.2.

[1] Saichev A., Sornette D. // Phys. Rev. Lett. 2005. V.97. P.078501.
[2] Corral A. // Phys. Rev. E. 2003. V.68. P.035102.