

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

АТТРАКТОРЫ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА В СИСТЕМАХ С ГОМОКЛИНИЧЕСКИМ КАСАНИЕМ

И.И.Овсянников

Нижегородский госуниверситет

Аттрактор Лоренца играет особую роль в изучении динамических систем. Причина здесь состоит в том, что он является странным в строгом смысле этого слова, в то время как большинство других аттракторов, наблюдаемых в опытах, моделях с хаотическим поведением, таковыми не являются. Часто, даже если поведение траектории выглядит хаотическим, малое изменение параметров системы меняет хаотический режим на периодический. Аттракторы такого типа, имеющие устойчивые периодические орбиты или приобретающие их после малых возмущений, были названы «квазиаттракторами». Таким образом, одна из наиболее острых проблем динамики состоит в следующем: большая часть хаотических аттракторов, наблюдаемых на опыте, являются квазиаттракторами, поэтому совершенно неясно, являются ли они хаотическими в строгом смысле.

Аттрактор Лоренца избавлен от этих трудностей, поскольку не содержит устойчивых периодических орбит. Он обладает свойством квазигиперболичности в смысле [1], то есть в любой точке существует как направление сжатия, так и направление растяжения объемов. Таким образом, аттрактор Лоренца состоит из седловых периодических траекторий и их многообразий и, несмотря на негрубость (внутри него могут непрерывно происходить гомоклинические бифуркации), сохраняет квазигиперболичность при возмущениях.

В данной работе рассматривается трехмерный диффеоморфизм f_0 , имеющий неподвижную точку типа «седло-фокус» с мультипликаторами $\lambda e^{\pm i\theta}$, γ (где $0 < \lambda < 1 < \gamma$), устойчивое и неустойчивые многообразия которой касаются квадратичным образом. Кроме того, в начальный момент $J=1$, где $J=\lambda^2\gamma$ - якобиан отображения, то есть изучаемый случай близок к консервативному. Требуется исследовать бифуркации периодических траекторий, близких к гомоклинической орбите в трехпараметрическом семействе диффеоморфизмов $f_{\mu_1, \mu_2, \varphi}$, где μ_1 - параметр расщепления многообразий, $\mu_2=J-1$.

В [2] было показано, что отображение первого возвращения окрестности гомоклинической орбиты в себя путем перемасштабирования координат и параметров может быть приведено с точностью до асимптотически малых членов к виду так называемого трехмерного отображения Эно:

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + Bx + M_2y - z^2. \quad (1)$$

Здесь координаты (x, y, z) и параметры (M_1, M_2, B) могут принимать произвольные конечные значения. Неподвижные точки отображения (1) соответствуют периодическим траекториям исходной системы, поэтому бифуркационный анализ системы (1) позволит описать динамику траекторий, близких к негрубой гомоклинической орбите.

Как известно из [3], аттрактор Лоренца рождается после конечной последовательности бифуркаций в системах с определенным видом симметрии, в том числе, вблизи неподвижной точки с мультипликаторами $(-1, -1, +1)$. В нашем случае такая точка существует при $M_1 = -1/4$, $M_2 = 1$, $B = 1$. Вложим отображение (1) в поток обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности неподвижной точки по координатам и бифуркационной точке в пространстве параметров. Другими словами, построим систему ОДУ так, чтобы сдвиг по ее траекториям за единицу времени совпадал с нашим отображением. Заметим, что линейная часть системы имеет отрицательные собственные числа и в поток вложена быть не может. Вторая итерация отображения имеет только положительные собственные значения, и, поэтому, может быть аппроксимирована потоком дифференциальных уравнений. Как показано в [2, 4], получившуюся систему ОДУ можно привести к виду системы Шмидзу-Мориоки

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x(1-z) - \bar{\lambda}y, \quad \dot{z} = -\bar{\alpha}z + x^2, \quad (2)$$

для которой в статье [3] доказано существование аттрактора Лоренца и численно построена соответствующая бифуркационная диаграмма.

В работе [4] численные эксперименты показывают наличие аттрактора Лоренца при значениях параметров, близких к указанным, что подтверждает полученные теоретические результаты. Кроме того, там же были найдены аттракторы других типов при значениях параметров, близких к тем, при которых система обладает другими видами симметрий (так называемые сильные резонансы). Эти результаты представляют интерес для дальнейших исследований.

Работа поддержана грантами РФФИ №04-01-00487, «Ведущие научные школы» №НШ-838.2003.2, «Университеты России» №03.01.180, NWO-RFBR №047.017.018.

- [1] Turaev D.V., Shilnikov L.P. //Мат.сборник. 1998. Т.189, №2. С.137.
- [2] J.D. Meiss, Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I. *Three-dimensional Henon map in homoclinic bifurcations*. Regular and Chaotic Dynamics (направлена в печать).
- [3] Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V. //Bifurcation and Chaos. 1993. V.3. P.1011.
- [4] Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I., Simo C., Turaev D. //Bifurcation and Chaos. 2005. V.5, No.11.

РАСПОЗНАВАНИЕ ГРУППОВЫХ ОБЪЕКТОВ НА ПОВЕРХНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЙРОСЕТЕВЫХ АЛГОРИТМОВ

А.Т.Гаврилин¹⁾, С.Н.Матюгин²⁾, И.В.Попов¹⁾

¹⁾Нижегородский госуниверситет, ²⁾Нижегородский НИИ радиотехники

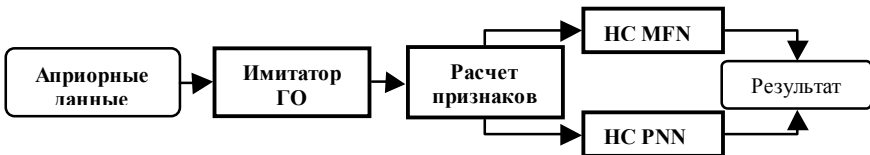
Нейросетевые методы – это методы обработки сигналов, имитирующие работу естественных нейронных сетей (НС). Искусственная НС состоит из элементов, называемых формальными нейронами, совокупность связей между которыми формирует структуру частично упорядоченного множества с классами несравнимых элементов – слоями. НС может рассматриваться, как ориентированный граф со взвешенными связями. НС предоставляют эффективные механизмы обучения (коррекции весов направленных связей между формальными нейронами), что выгодно отличает НС от других систем.

В представляемой работе рассмотрена задача классификации групповых объектов (ГО), расположенных на поверхности. Данная работа является развитием работы [1] и посвящена разработке робастной схемы автоматизации обработки радиолокационных изображений (РЛИ). По сравнению с [1] была произведена замена классификатора ГО, использующего нечеткую логику, вероятностной НС PNN (Probabilistic Neural Network) [2]. Добавлены два новых признака: среднее расстояние между точечными объектами (ТО) и среднее расстояние от центра ГО до точечных объектов.

По сравнению с [1] классификатор на базе многослойной НС с прямой связью – MFN (Multilayered Feedforward Network) был оптимизирован:

	Нейронов внутр. слоя	Функция активации	Число призна- ков
В работе [1]	750	Сигмоидальная: $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$	3
В данной работе	400...450	Тангенсальная: $f(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}} - 1$	5

Разработан классификатор на базе НС PNN [2]. В основу классификации в НС PNN положено использование методов Байеса, при этом распределение признаков класса считается нормальным. Для определения качества работы классификаторов был разработан схема модельного эксперимента, представленная на рисунке.



Блок *Априорные данные* содержит эталоны для 7 классов ГО. Эти эталоны отражают типичные конфигурации ГО на РЛИ и отличаются размерами, числом и пространственным расположением ТО. Для упомянутых классов блок *Имитатор ГО* генерировал тестовые ГО, где ТО смещались в пределах до 50 м; число ТО в ГО варьировалось в диапазоне ± 5 единиц от среднего. Для тестовых ГО в блоке *Расчет признаков* выполнялись вычисления значений признаков. Далее в блоке *Результат* для каждого класса вычислялась вероятность правильного распознавания. Все блоки реализованы программным способом в среде MATLAB.

В ходе модельного эксперимента производилась оптимизация классификатора по числу скрытых слоев, числу нейронов внутреннего слоя, по функции активации, по числу образцов при обучении в пакетном режиме для НС MFN, а также по числу и составу прецедентов для слоя образцов НС PNN.

Ранее [1] при использовании НС MFN была достигнута вероятность правильного распознавания по 7 классам ГО не менее 0,8. При этом относительное положение ТО изменялось в пределах до 30 метров, при удалении/добавлении до 3 ТО. В данной работе классификатор на базе НС MFN был усовершенствован: обеспечена вероятность правильного распознавания не менее 0,93 вплоть до смещения 50 м, при удалении/добавлении до 4 ТО. В то же время НС PNN обеспечила вероятность не менее 0,81 вплоть до смещения 45, при удалении/добавлении до 4 ТО (см табл. ниже).

Пропуски ТО / ЛТ	Вероятность правильного распознавания по классам						
	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
-5	1,00	0,99	0,78	0,97	0,81	1,00	0,95
-3	1,00	1,00	0,98	1,00	0,95	1,00	0,98
-1	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00
1	1,00	0,97	1,00	1,00	1,00	0,96	1,00
3	1,00	0,94	1,00	1,00	0,99	0,83	0,94
5	1,00	0,92	1,00	1,00	1,00	0,68	0,75

Разработанные классификаторы в целом показывают высокую эффективность для случаев сильного искажения ГО. Введение дополнительных признаков повысило эффективность работы классификаторов. Наилучшие результаты получены при использовании НС MFN, вместе с тем НС PNN обеспечивает менее резкий спад вероятности правильного распознавания при сильных искажениях ГО. Полученный набор классификаторов в дальнейшем будет использован для построения оптимальных и робастных схемных решений, представляющих возможность дообучения.

- [1] Матюгин С.Н., Попов И.В. //В кн.: Тр. IX международной конференции «Радиолокация, навигация, связь». –Воронеж: ВГУ, 2003, с.1615.
 [2] Каллан Р. Основные концепции нейронных сетей. –М.: Вильямс, 2001, 287с.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО БЮДЖЕТА КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ С УЧЕТОМ РЕИНВЕСТИРОВАНИЯ

Е.А.Зайцева¹⁾, Е.В.Кошелев²⁾, А.Н.Ульянов¹⁾

¹⁾Нижегородский технический университет, ²⁾Нижегородский университет

При расчете оптимального бюджета капитальных вложений фирмы обычно на практике строят график предельной цены капитала (*MCC*) и график инвестиционных возможностей (*IOS*). Оптимальный бюджет капитальных вложений находится в точке пересечения этих двух графиков.

Однако, при этом не учитывается возможность мгновенного реинвестирования средств, полученных в ходе осуществления текущих инвестиционных проектов. Эта проблема может быть решена, если на графике *IOS* откладывать не показатели внутренней доходности (*IRR*) проектов, а модифицированные внутренние доходности (*MIRR*), учитывающие возможности реинвестирования. Тогда оптимальный бюджет капитальных вложений можно планировать больше. Методику его точного расчета в этом случае проиллюстрируем на следующем примере.

Пусть компания имеет следующую структуру капитала, которую она считает оптимальной:

1. Обыкновенные акции (ОА): 60%.
2. Привилегированные акции (ПА): 15%.
3. Обязательства: 25%.

В планируемом году компания рассчитывает получить чистую прибыль в размере 34285,72 д. ед.; установленный ею размер выплаты дивидендов равен 30%; ставка налога на прибыль – 40%; прогнозируемый темп прироста доходов и дивидендов – 9% в год. В настоящем году компания выплатила дивиденды в размере 3,6 д. ед. на одну ОА, и сейчас эти акции продаются по цене 60 д. ед. за штуку.

Компания может получить новый капитал следующим образом:

1. Выпуск новых ОА: Затраты на их размещение на рынке составят 10% от рыночной цены, если ОА выпускаются на сумму до 12000 д. ед., и 20% - на сумму больше 12000 д. ед.
2. Выпуск новых ПА: Новые ПА с дивидендом в 11 д. ед. на одну акцию можно продать по цене 100 д. ед. за штуку. Однако, затраты на размещение ПА составят 5%, если акции выпускаются на сумму до 7500 д. ед., и 10% - на сумму больше 7500 д. ед.
3. Выпуск новых обязательств (облигаций): Обязательства на сумму до 5000 д. ед. можно продать под ставку 12% в год, на сумму от 5001 д. ед. до 10000 д. ед. – под ставку 14%, а на сумму больше 10000 д. ед. – под ставку 16%.

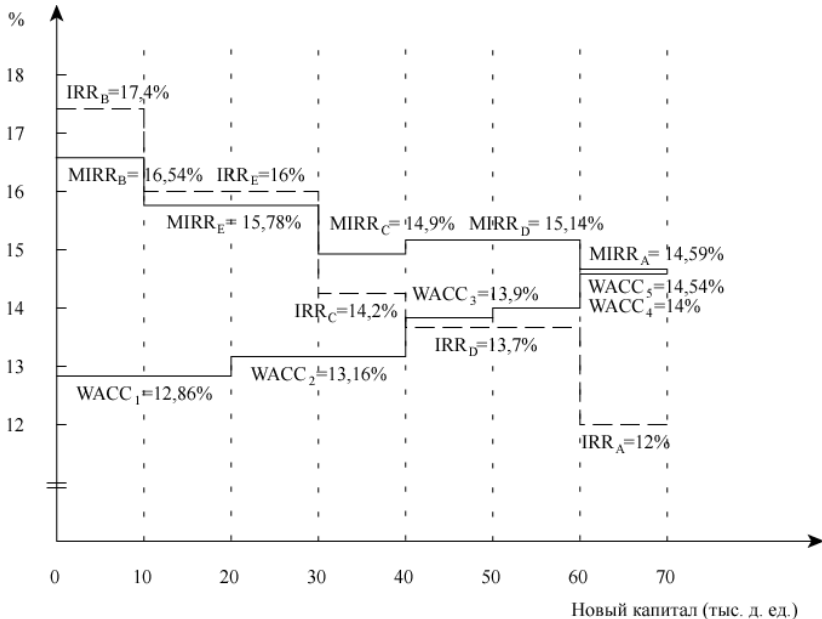
Инвестиционные возможности компании представлены в таблице.

После проведения необходимых расчетов получаем точку пересечения графиков *MCC* и *IOS* (графиков средневзвешенной цены капитала (*WACC*) и внутренней доходности (*IRR*)). На рисунке она составляет 40 тыс. д. ед. Так традиционно

рассчитывается оптимальный бюджет капитальных вложений. Однако, учитывая возможность реинвестирования, вместо IRR следует рассчитывать $MIRR$.

Таблица

Проект	Стоимость проекта в $t=0$ (PV) (д. ед.)	Ежегодные чистые денежные поступления (A) (д. ед.)	Срок проекта (лет)
A	10000	2191,2	7
B	10000	3154,42	5
C	10000	2170,18	8
D	20000	3789,48	10
E	20000	5427,84	6



Из рисунка видно, что в этом случае все пять инвестиционных проектов являются прибыльными, т.к. их $MIRR$ больше $WACC$, необходимой для их осуществления. В случае же расчета по IRR реализовать следует лишь проекты B , E и C , т.к. их IRR больше $WACC$. Оптимальный бюджет капитальных вложений в случае расчета по $MIRR$ составит 70 тыс. д. ед. Это значительно больше 40 тыс. д. ед. в случае расчета по IRR , т.е. без учета реинвестирования. При этом площадь между графиками IRR и $WACC$, где $IRR > WACC$, составляет в долях 1,156, а площадь между графиками $MIRR$ и $WACC$, где $MIRR > WACC$, составляет 1,339, что свидетельствует о большей экономической выгоде учета реинвестирования.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫБОРА ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Е.А.Зайцева¹⁾, Е.В.Кошелев²⁾, А.Н.Ульянов¹⁾

¹⁾Нижегородский технический университет, ²⁾Нижегородский университет

На сегодняшний день существует множество математических критериев выбора инвестиционного проекта из существующих альтернатив. Однако, на практике их расчет может привести к противоречивым результатам. Задача выбора проекта усложняется также тем, что всегда сложно спрогнозировать ставку дисконта, особенно в российских условиях. Для решения этих проблем в настоящей работе предлагается использовать графический метод.

Рассматривается следующий пример. Известны денежные потоки двух инвестиционных проектов S и L (в д. ед.) (табл. 1). Необходимо выбрать наиболее выгодный проект.

Табл. 1

Год	0	1	2	3	4
Проект S	-1000	500	400	300	100
Проект L	-1000	100	300	400	600

Вычисляется NPV (чистый приведенный доход) обоих проектов S и L при разных ставках дисконта по формуле

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{CIF_t - COF_t}{(1+k)^t},$$

где CIF_t и COF_t – соответственно денежные притоки и оттоки в соответствующие года t , а k – годовая ставка дисконта. Полученные значения NPV обоих проектов при разных ставках дисконта отмечаются на графике (см. рисунок).

Точка пересечения каждого из двух графиков NPV с горизонтальной осью на рисунке ищется методом линейной интерполяции по формуле

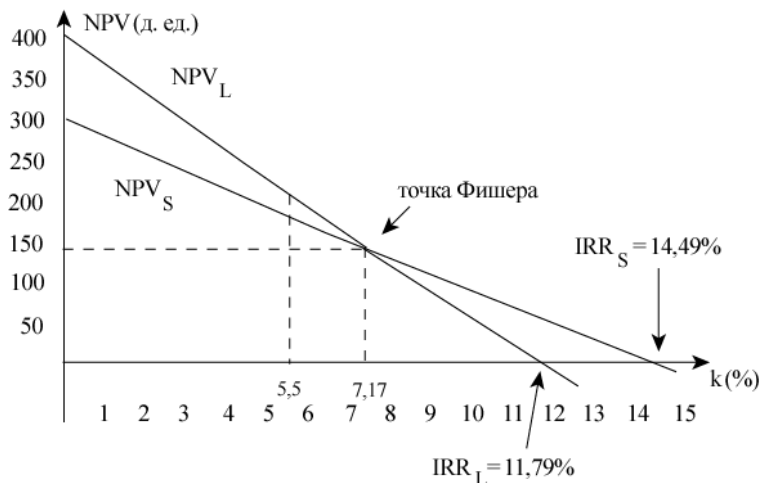
$$IRR = k_1 + \frac{NPV_1}{NPV_1 + NPV_2} (k_2 - k_1),$$

где IRR – ставка внутренней доходности проекта, NPV_1 и NPV_2 – соответственно модули положительного и отрицательного значений NPV проекта, а k_1 и k_2 – ставки дисконта соответствующих им NPV_1 и NPV_2 . IRR проекта S составляет 14,49%, а проекта L – 11,79%.

Точка пересечения графиков NPV_S и NPV_L ищется также методом линейной интерполяции. Для этого составляется сначала приростный денежный поток по годам, полученный как разность соответствующих годовых денежных потоков проектов S и L (разность CF_L и CF_S) (в д. ед.) (табл. 2).

Табл. 2

Год	0	1	2	3	4
$\Delta CF = CF_L - CF_S$	0	-400	-100	100	500



Затем ищется IRR приростного денежного потока по приведенной выше формуле. IRR этого потока составляет 7,17%.

Далее, пусть в рассматриваемом примере ставка дисконта в настоящий момент составляет 10% в год. Однако, в планируемом периоде в четыре года она может измениться в ту или иную сторону на любую величину в силу высокого риска экономики России.

Тогда для решения задачи выбора проекта необходимо задать интервал ставок дисконта и рассчитать площади, в которых NPV одного проекта выше NPV другого. Верхняя граница такого интервала должна равняться 14,5%, поскольку при ставке дисконта k выше этого значения NPV обоих проектов становится отрицательным. Нижняя граница интервала k выбирается на таком же расстоянии от 10%, что и верхняя граница, и составляет 5,5%. При подсчете площадей отрицательный NPV проекта L выше значения $k=11,79\%$ не принимается во внимание, поскольку экономическую выгоду составляет лишь положительный NPV и при этом всегда есть возможность отказа от осуществления проекта.

На интервале ставок k от 5,5% до 14,5% та площадь, где $NPV_L > NPV_S$, составляет в долях 0,915077, а площадь, где $NPV_S > NPV_L$ составляет 1,723958. Наибольшая площадь говорит о наибольшей экономической выгоде. Следовательно, более выгодным является проект S .

Таким образом, представленный графический метод позволяет достаточно точно решить задачу выбора инвестиционного проекта в условиях неопределенности ставки дисконта.

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БАЛКЕ ТИМОШЕНКО

Н.П.Семерикова

Нижегородский госуниверситет

В задачах динамики упругих конструкций традиционно уделяется большое внимание распространению изгибных волн в стержнях. В данной работе из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского получено уравнение, описывающее изгибные колебания балки Тимошенко с учетом геометрической нелинейности:

$$W''_{tt} + W''_{xxxx} - (1 + E/\kappa\mu)W''''_{xxtt} + (E/\kappa\mu)W''''_{tttt} = (qW_0^2/Er_y^2)(W'_x)^2_x. \quad (1)$$

Уравнение (1) записано в безразмерных переменных $x'=x/r_y$, $t'=t/r_y$, $W'=W/W_0$ и штрихи над безразмерными переменными опущены. Здесь $W(x,t)$ поперечное отклонение точек срединной линии стержня, W_0 – максимальная амплитуда изгибной волны, r_y – осевой радиус инерции, E – модуль Юнга, λ , μ – константы упругости Ламэ, κ – поправочный коэффициент Тимошенко, $q=7\lambda/4+3\mu/2$ – коэффициент, характеризующий геометрическую нелинейность.

В линейном приближении решение (1) представляется в виде набора гармоник $e^{i(\omega t - kx)}$, частоты (ω) и волновые числа (k) которых связаны соотношением

$$\omega^4 - (\omega_0^2 + (1 + \omega_0^2)k^2)\omega^2 + \omega_0^2 k^4 = 0. \quad (2)$$

На дисперсионной плоскости (ω, k) имеется две дисперсионные ветви, одна из которых (нижняя) исходит из нуля, а другая (верхняя) – из точки $k=0$, $\omega_0=(\kappa\mu/E)^{1/2}$. На нижней дисперсионной ветви имеется точка перегиба. Изгибные волны в балке Тимошенко обладают сильной дисперсией, поскольку фазовые скорости линейных волн не являются постоянными.

Наличие кубической нелинейности в (1) приводит к генерации высших гармоник. Однако вследствие сильной дисперсии фазовая скорость третьей гармоники 3ω будет существенно отличаться от фазовой скорости волны основной частоты ω , т.е. взаимодействия между этими гармониками практически не происходит. Системам с кубической нелинейностью присущ также эффект самовоздействия, когда изменение амплитуды или частоты волны происходит за счет интенсивности самой волны. Он обычно преобладает над эффектом генерации высших гармоник и последним можно пренебречь [1]. Это позволяет отыскивать решения уравнения (1) в виде одной квазигармоники, т.е. гармонической волны, амплитуда и фаза которой медленно меняются в пространстве и времени:

$$W(x,t) = A(\epsilon x, \epsilon t) \exp i(\omega t - kx) + k.c., \quad (3)$$

где $A(x,t)$ – комплексная амплитуда, ω, k удовлетворяют соотношению (2) и $\epsilon \ll 1$. Методом усреднения по “быстрым” переменным [1], уравнение (1) приводится к нелинейному уравнению Шредингера относительно комплексной амплитуды:

$$iA_t' - \beta A_{\xi\xi}'' + \alpha |A|^2 A = 0, \quad (4)$$

где $\beta = \omega''/2$ – дисперсионный параметр, $\alpha = \pm 3qk^4/2E\omega((1+(1/\omega_0^2-1)k^2)^2+4k^2)^{1/2}$ – параметр нелинейности, причем знак “+” соответствует нижней дисперсионной ветви, а знак “-” – верхней. Уравнение Шредингера является фундаментальным уравнением нелинейной физики, оно позволяет, в частности, исследовать устойчивость квазигармонической волны (3) по отношению к малым начальным возмущениям. Согласно критерию Лайтхилла [2], если нелинейный и дисперсионный параметры уравнения Шредингера имеют противоположные знаки, то в системе будет наблюдаться модуляционная неустойчивость, вследствие чего квазигармоническая волна распадается на отдельные волновые пакеты. Проведенный анализ показал, что в модели балки Тимошенко квазигармонические изгибные волны могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми в зависимости от частоты и принадлежности к той или иной дисперсионной ветви. Волны, описываемые верхней дисперсионной ветвью, всегда будут неустойчивыми. Для нижней ветви знак параметра дисперсии может изменяться, что связано с наличием у нее точки перегиба. Поэтому в интервале $0 < k < k^*$, где k^* – точка перегиба дисперсионной кривой, волны устойчивы к самомодуляции, а в интервале $k > k^*$ неустойчивы.

Чтобы определить, как будут выглядеть волновые пакеты, на которые разбивается квазигармоническая волна в результате модуляционной неустойчивости, достаточно рассмотреть установившийся процесс и проанализировать стационарные волны огибающих. В этом случае уравнение Шредингера сведется к системе уравнений относительно действительных амплитуды и фазы. Изучаемой области модуляционной неустойчивости соответствуют периодические решения этой системы, выражаемые через эллиптические функции. В результате квазигармоническая волна, промодулированная по периодическому закону, описывается выражением:

$$W(x, t) = \pm V a(x, t) \exp(i(\omega t - kx + \theta)) / 2\sqrt{|\alpha\beta|} + k.c.,$$

а фаза волны огибающей определяется соотношением:

$$\theta(x, t) = (V\eta/2 + 4d|\alpha\beta| \int a^{-2}(x, t) d\eta / V^2) / \beta,$$

где $\eta = x - (V_{gr} + V_e)t$ – бегущая координата, $a(x, t) = (2(1 - A_0(1 + s^2)/s^2)/3 + 2A_0sn^2(k_0V\eta/2\beta, s))^{1/2}$ – амплитуда волны огибающей, A_0 – амплитуда периодического решения, k_0 – аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, изменяющийся в интервале $0 < s^2 < 1/2$.

- [1] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. –М.: Наука, 1984, 432с.
 [2] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. –М.: Мир, 1977, 622с.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ НЕСКОЛЬКИХ ФУНКЦИЙ С РАЗЛИЧНЫМИ ПОРЯДКАМИ ГЛАДКОСТИ

В.Н.Кошелев

Нижегородский госуниверситет

Изучается вопрос о существовании разрывных решений задачи на абсолютный минимум функционала

$$I[y_1, y_2, \dots, y_p] = \int_a^b F(x, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k)}) dx,$$

$k=1, 2, \dots, p$, на классе функций, производные которых $y_k^{(m_k-1)}$ имеют разрыв первого рода. Различаются случаи, когда решение не имеет ни одной точки разрыва или может иметь не более, чем счетное число точек разрыва.

Пусть:

1) F - определена и непрерывна вместе со своими производными $F_{y_k^{(m_k)}}$ при

$$(x, y_k) \in \Omega \subset R^{(p+1)}, \quad \Omega = \{a \leq x \leq b, |y_k| \leq M\}, \quad |y_k^{(i)}| \leq M^{(i)}, \quad -\infty < y_k^{(m_k)} < +\infty,$$

$i=1, 2, \dots, m_k-1, k=1, 2, \dots, p, M, M^{(i)}$ - фиксированные числа.

2) F - выпуклая функция по $y_k^{(m_k)}$, т.е.

$$F(x, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k-1)}, y_k^{(m_k)}) - F(x, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k-1)}, \bar{y}_k^{(m_k)}) - \\ - \sum_{k=1}^p (y_k^{(m_k)} - \bar{y}_k^{(m_k)}) F_{y_k^{(m_k)}}(x, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k-1)}, \bar{y}_k^{(m_k)}) \geq 0.$$

3) F имеет следующий порядок роста по переменным $y_k^{(m_k)}$

$$F(x, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k)}) \geq m \left(\sqrt{1 + \sum_{k=1}^p (y_k^{(m_k)})^2} \right)^\lambda,$$

где $m > 0$ и $\lambda > 1$ - постоянные числа.

4) Существует предел

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{F(x, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k)})}{\rho} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \lambda > 1, \\ W(x, y_k, y_k', \dots, y_k^{(m_k-1)}, \cos y_k), & \text{если } \lambda = 1, \end{cases}$$

где

$$\rho = \left\{ \sum_{k=1}^p \left(y_k^{(m_k)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \cos \gamma_k = \frac{y_k^{(m_k)}}{\rho}.$$

5) Функция W непрерывна по совокупности переменных

$$(x, y_k) \in \Omega, \quad |y_k^{(i)}| \leq M^{(i)}, \quad |\cos \gamma_k| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m_k - 1, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Класс допустимых функций. Допустимые функции удовлетворяют условиям:

а) $y_k(x) \in C^{(m_k-2)}[a, b]$, а $y_k^{(m_k-1)}$ - абсолютно непрерывны на $[a, b]$, за исключением конечного или счетного множества точек разрыва $x=x_l$ первого рода со скачками $\omega_k^{(l)}$, $\sum_{k,l} |\omega_k^{(l)}| < +\infty$,

б) $y_k^{(l)}(a) = a_k^{(l)}$, $y_k^{(l)}(b) = b_k^{(l)}$, $i = 0, 1, 2, \dots, m_k - 1$, $a_k^{(l)}, b_k^{(l)}$ - постоянные числа.

в) Функции $y_k^{(m_k-1)}(x)$ в точках разрыва $x=x_l$ рассматриваются вместе с множеством значений, заключенных между $y_k^{(m_k-1)}(x_l - 0)$ и $y_k^{(m_k-1)}(x_l + 0)$, и определяют спрямляемую кривую

$$\chi_l = \left\{ x = x_l, y_k = y_k(x_l), y_k' = y_k'(x_l), \dots, y_k^{(m_k-2)} = y_k^{(m_k-2)}(x_l), y_k^{(m_k-1)} = y_k^{(m_k-1)}(s) \right\}$$

соединяющую точки $M_1^{(l)} = \left\{ x_l, y_k(x_l), y_k'(x_l), \dots, y_k^{(m_k-2)}(x_l), y_k^{(m_k-1)}(x_l - 0) \right\}$ и $M_2^{(l)} = \left\{ x_l, y_k(x_l), y_k'(x_l), \dots, y_k^{(m_k-2)}(x_l), y_k^{(m_k-1)}(x_l + 0) \right\}$, s - длина дуги.

Аналогично [1] вводится представление функционала на допустимых функциях.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. При введенных предположениях на интегрант F задача на определение

$$\inf I[\vec{Y}] = \inf I[y_1, y_2, \dots, y_p]$$

имеет решение в классе допустимых функций, если существует хотя бы одна векторная функция, $\vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ на которой функционал $I[\vec{Y}]$ принимает конечное значение. При этом, если в условии 3) показатель $\lambda > 1$, то решение не имеет точек разрыва, если $\lambda = 1$, то решение может иметь конечное или счетное число точек разрыва.

[1] Кошелев В.Н., Морозов С.Ф. //Изв.вузов. Математика. 1975, № 10. С.23.

РАЗМЕРНОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ ПРОЦЕССОВ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ**О.Н.Репин***Нижегородский госуниверситет*

В работе дается оценка размерности реализаций случайного процесса $x(t)$, дисперсия которого растет по закону: $\sigma^2 \cong t^\alpha$. При $0 < \alpha < 1$ это процесс субдиффузии, $\alpha = 1$ – диффузионный процесс, $1 < \alpha < 2$ – процесс супердиффузии.

Пусть $x(t)$, $t \in [0, 1]$ – кривая в плоскости. Для оценки размерности кривой сделаем разбиение отрезка $[0, 1]$ на интервалы длины Δt и возьмем покрытие кривой $x(t)$ квадратами со стороной Δt .

Следуя [1], определим размерность Минковского кривой $x(t)$ как:

$$d = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln N(\Delta t)}{\ln \Delta t}, \quad (1)$$

где $N(\Delta t)$ – минимальное число квадратов со стороной Δt , необходимых для покрытия кривой $x(t)$.

Пусть приращение $x(t)$ на интервале Δt удовлетворяет неравенству:

$$m(\Delta t)^{\alpha/2} \leq |\Delta x| \leq M(\Delta t)^{\alpha/2}. \quad (2)$$

Тогда

$$\frac{m(\Delta t)^{\alpha/2}}{(\Delta t)^2} \leq N(\Delta t) \leq \frac{M(\Delta t)^{\alpha/2}}{(\Delta t)^2}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и переходя к пределу, получим оценку размерности кривой в зависимости от α :

$$d = 2 - \alpha/2. \quad (4)$$

Таким образом для диффузионного процесса с $\alpha = 1$ – $d = 1.5$, для процесса субдиффузии $1 < d < 1.5$, а для процесса супердиффузии $1.5 < d < 2$.

[1] Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. –М.: Постмаркет, 2000, 352с.

СТАТИСТИКА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ. МОДЕЛЬ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

А.И.Саичев, С.Г.Уткин

Нижегородский госуниверситет

В последнее время все большее внимание привлекают ветвящиеся процессы. Построенными на их основе математическими моделями описываются многие физические, биологические, природные, технические закономерности. Так в последнее десятилетие предприняты попытки описания статистики землетрясений [1,2], распространения вирусов [3], динамики работы и роста сети World Wide Web [4] и пр.

При статистическом анализе землетрясений часто используется модель ETAS (Epidemic Type Aftershocks Sequence) [2], в рамках которой толчки землетрясения разделяются на поколения, а именно один толчок (как правило наиболее мощный) принимается за главный (Main shock), порождающий толчки первого поколения. Они, в свою очередь, независимо порождают толчки второго поколения и так далее. Ниже мы изучим следствия данной модели применительно к статистике толчков через время t после главного землетрясения.

Рассмотрим следующий процесс: пусть в момент $t=0$ имело место главное землетрясение амплитуды m , измеренной по шкале Рихтера. Введем параметр $\mu=\mu(m)$, равный среднему числу толчков, вызванных землетрясением амплитуды m , и называемый продуктивностью землетрясения [2]. В рамках упомянутой ETAS модели землетрясений, главное землетрясение порождает случайное число толчков первого поколения $R_1(\mu)$ с независимыми друг от друга и от μ продуктивностями $\{\mu_i\}$. Число этих толчков подчиняется распределению Пуассона

$$P_\mu(r) = \frac{\mu^r e^{-\mu}}{r!}$$

Будем считать, что моменты $\{t_i\}$ появления упомянутых толчков независимы и имеют одинаковое распределение $\Phi(t)$. Каждый толчок первого поколения, к примеру i -тый, порождает некоторое число $R_2(\mu_i)$ толчков второго поколения в моменты $\{t_i+t_{ij}\}$ со статистически независимыми продуктивностями $\{\mu_{ij}\}$. Распределение $\Phi(t)$ описывает также, статистически независимые между собой, интервалы $\{t_{ij}\}$, а вероятности рождения определенного числа толчков второго поколения равны

$$P(r) = \int_0^\infty P_\mu(r) p(\mu) d\mu,$$

где $p(\mu)$ – распределение случайных продуктивностей толчков первого поколения. Далее процесс развивается по аналогичному сценарию.

Обозначим за n среднее число толчков, порождаемое каждым толчком в следующем поколении. При $n < 1$ – процесс субкритический и через некоторое время прекратится. Наибольший практический интерес вызывает именно этот режим (а также критический, когда $n = 1$). В данной работе исследована, имеющая отношение к проблеме предсказания землетрясений, статистика числа толчков, возникших после текущего момента времени t и до прекращения процесса, а также интенсивность толчков.

При помощи аппарата производящих функций удалось получить уравнение для среднего числа оставшихся скачков:

$$\delta \frac{d^\theta \langle R_\mu(t) \rangle}{dt^\theta} + (1-n) \langle R_\mu(t) \rangle = \frac{\mu}{1-n} t^{-\theta},$$

где δ – характерное время распределения времени ожидания толчков.

Также было исследовано изменение интенсивности толчков в зависимости от времени. На рис.1 в логарифмическом масштабе построен точный график поведения интенсивности $N(t)$ от времени и ее асимптотика на больших временах (прямая). Вблизи главного землетрясения, интенсивность спадает медленнее ($N(t) \sim t^{-1+\theta}$), нежели после момента времени $t^* = (\delta/(1-n))^{1/\theta}$ ($N(t) \sim t^{-1-\theta}$). Более медленное спадание интенсивности числа

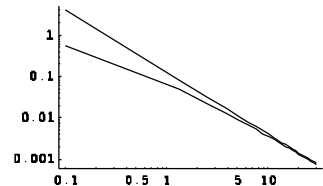


Рис. 1.

толчков при $t \ll t^*$ обусловлено эффектами многократной генерации новых толчков предыдущими толчками. Заметим в заключение, что в критическом случае ($n = 1$) указанное характерное время t^* обращается в бесконечность, и степенной закон спадания интенсивности $N(t) \sim t^{-1+\theta}$ справедлив на всех временах.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 03-02-16680, РФФИ 05-02-16517, Ведущие Научные Школы НШ-838.2003.2, "Университеты России" № 01.01.177.

- [1] Saichev A., Helmstetter A., Sornette D. //Pure Appl. Geophys. 2005. V.162. P.1.
- [2] Zhuang J., Ogata Y. //J. Geophys. Research. 2004. V.109. P.B05301–1.
- [3] Denzo Z., Barabasi A.-L. //Phys. Rev. E 2002. V.65. P.055103–1.
- [4] Yook S.-H., Jeong H., Barabasi A.-L. //PNAS 2002. V.99, No.21. P.13382.
- [5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.2. –М.: Наука, 1970, 328с.

СТАТИСТИКА ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОЙ ШУМОВОЙ ВОЛНЫ

С.А.Лапинова, А.И.Саичев

Нижегородский госуниверситет

Описание гидроакустических шумовых волн имеет важное практическое значение. Цель работы - вероятностное описание гидроакустических шумовых волновых полей. В качестве рабочей модели была выбрана функция Берри [1,2], изначально предложенная для описания квантовых случайных процессов. Общий вид ее следующий:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_m a_m \exp(i\mathbf{k}_m \mathbf{r}),$$

где \mathbf{r} -радиус вектор, $\mathbf{k}_m = k(\mathbf{e}_1 \cos \theta_m + \mathbf{e}_2 \sin \theta_m)$ - волновой вектор с постоянным модулем k , а θ_m - случайный угол направления с равномерным распределением на отрезке $[-\pi, \pi]$, M - общее число плоских волн, a_m - взаимно независимые случайные комплексные амплитуды, такие, что $\langle a_m \rangle = 0$, $\langle a_m a_n \rangle = 0$.

При большом числе слагаемых действительная и мнимая части будут статистически независимыми и, согласно Центральной предельной теореме, иметь распределение Гаусса со средним значением $\langle u(\mathbf{r}) \rangle = \langle v(\mathbf{r}) \rangle = 0$, и дисперсиями $\sigma_u = \sigma_v = 1$. Функцией корреляции u и v будет функция Бесселя

$$\langle u(\mathbf{r})u(\mathbf{r}+\mathbf{s}) \rangle = \langle v(\mathbf{r})v(\mathbf{r}+\mathbf{s}) \rangle = J_0(ks).$$

Известно, что вектор плотности потока энергии, переносимого волнами, определяется следующим соотношением [3]:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \text{Re} \{ i \psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) \}.$$

Использование функции Берри приводит его к следующему виду:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{v(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r})\nabla v(\mathbf{r})}{2}.$$

Была исследована зависимость функции корреляции амплитуд волн от вида распределения волнового числа. Рассмотрено равномерное распределение, распределение в виде δ - функции, распределение Гаусса, показательное распределение. Полученные результаты были использованы для вычисления функции корреляции потока энергии шумовых волн, которая была исследована в зависимости от параметров распределения волнового числа. Результаты были представлены в виде графиков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03-02-16680, 05-02-16517) и научной программы "Университеты России" (проект УР 01.01.177).

- [1] Berry M.V. //In book: "Chaos and Quantum Physics". –Amsterdam: Elsevier, 1990, p.251.
- [2] Berry M.V. //Phil. Trans. Roy. Soc. A 1977. V.287. P.237.
- [3] Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. –М.: Наука, 1973, с.443.
- [4] Saichev A.I., Berggren K.-F., Sadreev A.F. //Phys. Rev. E 2001. V.64. P.036222-1.