

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

СМЕШАННЫЙ КУМУЛЯНТ 3-ГО ПОРЯДКА ДЛЯ КОМПОНЕНТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

А.Т.Гаврилин

Нижегородский госуниверситет

В задачах ближней радиолокации, геологоразведки, исследования грозовых явлений, а также распространения радиоволн [1] иногда в целях более полного извлечения информации из полученных данных необходимо брать в расчет статистические зависимости высших (по отношению к корреляционным связям) порядков между различными составляющими электромагнитного поля (ЭМП) в ближней зоне излучателя или рассеивателя. В связи с этим знание упомянутых характеристик для наиболее простых излучателей может оказаться полезным для качественной оценки потенциальных возможностей приема в более сложных ситуациях. В настоящей работе смешанный кумулянт продольной и меридиональной компонент электрического поля и широтной компоненты магнитного поля вычисляется для элементарного электрического диполя. Выбор данных компонент продиктован тем, что ближнее поле электрического излучателя принадлежит классу поперечно-магнитных (ТМ) полей [2].

При расположении диполя в начале координат выражения для электрической и магнитной компонент его ЭМП в точке с радиус-вектором \mathbf{r} имеют вид [2,3]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \frac{Z_0}{4\pi} \left[\frac{1}{cr} \left(\frac{(\mathbf{p}'', \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p}'' \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{3(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p}' \right) + \frac{c}{r^3} \left(\frac{(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p} \right) \right] (t_r), \\ \mathbf{H}(t) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{cr} \left(\frac{[\mathbf{p}'', \mathbf{r}]}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{[\mathbf{p}', \mathbf{r}]}{r} \right) \right) (t_r), \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{p} – момент диполя, $r = |\mathbf{r}|$, $Z_0 = 120\pi$ Ом, $c \cong 3 \cdot 10^8$ м/с, $t_r = t - r/c$; штрихами обозначено дифференцирование по времени.

Если сферическую систему координат (r, θ, φ) выбрать так, чтобы ее полярная ось совпала с осью диполя, и обозначить $i = |\mathbf{p}'(t_r)|$, то согласно (1) интересующие нас компоненты поля примут вид:

$$E_r = \frac{Z_0}{4\pi c} \left(\frac{c}{r^2} i + \frac{c^2}{r^3} \int idt \right) 2 \cos \theta,$$

$$E_g = \frac{Z_0}{4\pi c} \left(\frac{1}{r} \frac{di}{dt} + \frac{c}{r^2} i + \frac{c^2}{r^3} \int idt \right) \sin \theta,$$

$$H\varphi = \frac{Z_0}{4\pi c} \left(\frac{1}{r} \frac{di}{dt} + \frac{c}{r^2} i \right) \sin \theta.$$

Далее мы будем предполагать, что “ток” $i(t)$ представляет собой стационарный негауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и биспектром $S_3(\omega_1, \omega_2)$ [4].

Имея в виду то, что для стационарного процесса $i(t)$ имеют место равенства

$$\left\langle i \frac{di}{dt} \right\rangle = 0, \quad \left\langle i \int idt \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{di}{dt} \int idt \right\rangle = -\left\langle i^2 \right\rangle,$$

где символ $\langle \cdot \rangle$ – статистическое (совпадающее для эргодических процессов с временным) усреднение по распределениям процесса $i(t)$, получаем выражение для смешанного одномоментного кумулянта выписанных выше полей

$$X_{\rho\psi\varphi} = \frac{(Z_0)^2}{(4\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{r^4} \left[\omega_1(\omega_1 + \omega_2) - \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} \frac{c^2}{r^2} - \frac{c^4}{r^4 \omega_1 \omega_2} \right] \times \\ \times S_3(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad \sin \vartheta \sin 2\vartheta,$$

где несобственный двойной интеграл должен пониматься в смысле главного значения, если биспектр $S_3(\omega_1, \omega_2)$ в окрестности начала координат не обращается в нуль.

Абсолютная величина полученного выражения, как и следовало ожидать, быстро убывает по мере удаления от излучателя (рассеивателя). Тем не менее, учитывая то обстоятельство, что для гауссовских помеховых источников и собственных шумов приемника асимметрия практически нулевая, можно с некоторой долей оптимизма утверждать, что обнаружение пассивных излучателей при их облучении источником ЭМП с заметной асимметрией тока является решаемой технической задачей. Что же касается задачи классификации молниевых разрядов в ближней зоне КНЧ-диапазона (туча-туча, туча-поверхность), то здесь решение в силу больших мощностей сигналов на входах датчиков сопрягается с обеспечением больших динамических диапазонов приемных трактов.

Работа поддержана грантом НП “Университеты России” (УР.01.01.008).

- [1] Schlegel K. //In: "Incoherent scatter: theory, practice and science". –N.-Y. 1997, p.89.
- [2] Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. Изд. 2-е. –М.: Сов. радио, 1971, 420с.
- [3] Хармут Х.Ф. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи. –М.: Радио и связь, 1985, 576с.
- [4] Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. –М.: Сов. радио, 1978, 376с.

ВРЕМЯ ЖИЗНИ МЕТАСТАБИЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В СИСТЕМЕ С ПЕРЕКЛЮЧАЮЩИМСЯ ПОТЕНЦИАЛОМ

А.В.Донской, А.А.Дубков

Нижегородский госуниверситет

Математическая теория времен первого достижения является эффективным инструментом исследования распада метастабильных состояний, прогнозирования отказов радиоэлектронной аппаратуры, анализа работы систем порогового типа. Так, при исследовании среднего темпа перехода броуновских частиц через флуктуирующий барьер в бистабильной системе было обнаружено явление резонансной активации [1]. В настоящей работе проводится более детальный анализ указанного феномена.

Рассмотрим передемпфированное движение броуновской частицы в переменном потенциале, координата которой $x(t)$ подчиняется уравнению Ланжевена

$$\dot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} U(x, t) + \xi(t), \quad (1)$$

где $\xi(t)$ – гауссов белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = 2D\delta(\tau)$. Будем, как и в [1], полагать, что потенциал $U(x, t) = a \cdot x \cdot \eta(t)$ ($0 < x < L$) переключается на два положения (рис.1). Они симметричны марковским телеграфным процессам $\eta(t)$, принимающим значения ± 1 со средней частотой перескоков μ . В точках $x=0$ и $x=L$ расположены, соответственно, отражающая и поглощающая границы. Воспользуемся уравнениями для средних времен первого достижения, полученными ранее в статье [2]. Для системы (1) они имеют вид

$$\begin{aligned} D\tau_+''(y) - a\tau_+'(y) - \mu[\tau_+(y) - \tau_-(y)] &= -1, \\ D\tau_-''(y) + a\tau_-'(y) - \mu[\tau_-(y) - \tau_+(y)] &= -1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tau_+(y)$ ($\tau_-(y)$) – среднее время первого достижения поглощающей границы $x=L$, если в начальный момент частица находилась в метастабильном $\eta(0) = +1$ (нестабильном $\eta(0) = -1$) состоянии в точке с координатой $x=y$ ($0 < y < L$). Уравнения (2) необходимо дополнить еще граничными условиями вида [3]

$$\tau_{\pm}(L) = 0, \quad \tau'_{\pm}(0) = 0. \quad (3)$$

Приведем решение системы (2) для $\tau_+(0)$ и $\tau_-(0)$

$$\tau_{\pm}(0) = \frac{L}{a\beta^3\gamma^4} \left\{ \nu\beta\gamma^2 - 1 + \frac{ch\gamma \pm \beta^3\gamma^3(sh\gamma - \gamma) + 2\nu\beta(1 + 2\gamma \cdot sh\gamma - \gamma^2)}{1 + 2\nu\beta \cdot ch\gamma} \right\}. \quad (4)$$

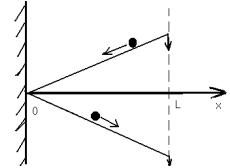


Рис. 1

Здесь введены безразмерные параметры: отношение интенсивности шума к высоте потенциального барьера $\beta=D/(aL)$ и частота переключений $\nu=\mu L/a$, $\gamma=(1+2\nu\beta)^{1/2}/\beta$.

Графики зависимости времен $\tau_+(0)$ (кривая 1) и $\tau_-(0)$ (кривая 2) от средней частоты переключений представлены на рис.2 для $\beta=0,1$ и на рис.3 для $\beta=0,01$. Как

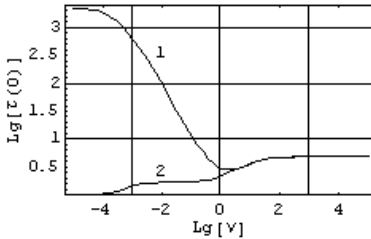


Рис. 2

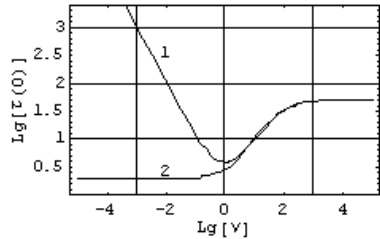


Рис. 3

видно из рисунков 2,3, характерный минимум при некоторой частоте переключений μ присутствует лишь в зависимости среднего времени $\tau_+(0)$, т.е. при наличии барьера в первоначальной конфигурации потенциала. Это и есть вышеупомянутый эффект резонансной активации, который был найден в [1,3] для среднего арифметического двух рассмотренных времен. На рис.4 и 5 дополнительно приведены контурные линии поверхностей $\tau_+(0)$ и $\tau_-(0)$ на плоскости безразмерных параметров (ν, β) .

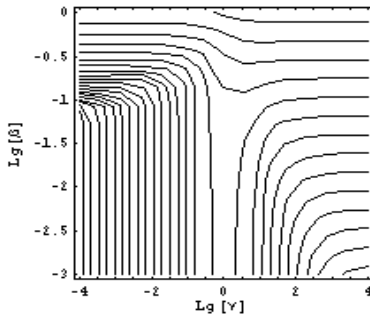


Рис. 4

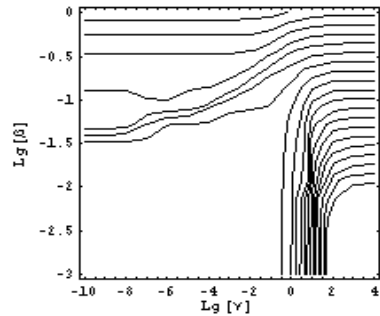


Рис. 5

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-17517), программы «Научные школы России» (грант № 1729.2003.2), научной программы «Университеты России» (проект УР.01.01.008) и INTAS (грант № 2001-0450).

- [1] Doering C.R. and Gadoua J.C. //Phys. Rev. Lett. 1992. V.69, №16. P.2318.
 [2] Balakrishnan V., Van den Broeck C., and Hänggi P. //Phys. Rev. A. 1988. V.38, №8. P.4213.
 [3] Bier M. and Astumian R.D. //Phys. Rev. Lett. 1993. V.71, №10. P.1649.

ДИХОТОМИЧЕСКИЙ ШУМ СО СПЕКТРОМ $1/f^\alpha$ **А.А.Дубков***Нижегородский госуниверситет*

В процессе миниатюризации электронной аппаратуры и появления тонкопленочных микрорезисторов, МОП-транзисторов было обнаружено, что медленные $1/f$ флуктуации тока в таких образцах обязаны захвату и эмиссии носителей заряда индивидуальными ловушками (дефектами). Это приводит к импульсным вариациям тока, напоминающим случайный телеграфный сигнал [1]. Остался невыясненным вопрос о том, при какой статистике переключений дихотомического шума его спектр может иметь фликкерный характер. В настоящей работе предложена математическая модель телеграфного случайного процесса со спектром вида $1/f^\alpha$, где $\alpha < 1$.

Рассмотрим для простоты симметричный дихотомический шум $x(t)$, допускающий простое представление

$$x(t) = \xi \cdot (-1)^{n(0,t)}, \quad (1)$$

где ξ – случайная величина, принимающая с равной вероятностью значения $\pm a$, а $n(0,t)$ – случайное число переключений на интервале $(0,t)$. Процесс (1) имеет нулевое среднее значение и корреляционную функцию вида

$$K(t, t + \tau) = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle = a^2 \langle (-1)^{n(t,t+\tau)} \rangle. \quad (2)$$

В качестве последовательности случайных моментов переключений возьмем поток восстановления, т.е. полагаем, что случайные интервалы времени между скачками статистически независимы и одинаково распределены с плотностью вероятности $w(\tau)$. В этом случае корреляционная функция телеграфного сигнала зависит лишь от разности времен τ , и для ее Лаплас-образа $\tilde{K}[s]$ получаем из (2)

$$\tilde{K}[s] = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tilde{P}_n(s), \quad (3)$$

где $\tilde{P}_n(s)$ – изображение по Лапласу вероятности n переключений на интервале $(0,\tau)$. Функцию $\tilde{P}_n(s)$ нетрудно выразить через Лаплас-образ $\tilde{w}(s)$ плотности вероятности $w(\tau)$ [2]:

$$\tilde{P}_n(s) = \frac{1 - \tilde{w}(s)}{s} \tilde{w}^n(s). \quad (4)$$

Подставляя соотношение (4) в (3) и проводя суммирование, приходим к

$$\tilde{K}[s] = \frac{a^2}{s} \cdot \frac{1 - \tilde{w}(s)}{1 + \tilde{w}(s)}. \quad (5)$$

Спектральная плотность шума в области физических частот $f \geq 0$ вычисляется по формуле

$$S(f) = 4 \operatorname{Re} \{ \tilde{K} [2\pi i f] \} . \quad (6)$$

Если средний интервал между переключениями $\langle \tau \rangle < \infty$, то

$$\tilde{w}(s) = \int_0^{\infty} w(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cong 1 - s \langle \tau \rangle , \quad (7)$$

и в соответствии с (5) и (6) получаем конечное значение спектра дихотомического шума на нулевой частоте: $S(0) = 2a^2 \langle \tau \rangle$. Отсюда видно, что неограниченное нарастание спектральной плотности на низких частотах возможно лишь в случае $\langle \tau \rangle = \infty$.

Примером одного из таких распределений может служить следующее [3]

$$w(\tau) = \frac{1-q}{q} \sum_{k=1}^{\infty} (q\lambda)^k \exp(-\lambda^k \tau) \quad (0 < \lambda < q < 1), \quad (8)$$

поскольку для него

$$\langle \tau \rangle = \frac{1-q}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{\lambda} \right)^k = \infty .$$

Легко убедиться, что Лаплас-образ плотности вероятности (8) удовлетворяет скейлинговому соотношению вида

$$\tilde{w}(\lambda s) = q \tilde{w}(s) + \frac{1-q}{1+s}, \quad (9)$$

из которого в пределе $s \rightarrow 0$ находим: $\tilde{w}(s) \cong 1 - A s^\beta$, где A – некоторая постоянная, $\beta = \ln q / \ln \lambda$, $0 < \beta < 1$. После подстановки этого соотношения в (5) и (6), получаем для $f \rightarrow 0$

$$S(f) \sim f^{-\alpha}, \quad \alpha = 1 - \beta . \quad (10)$$

Таким образом, $1/f$ – образное поведение спектра дихотомического шума наблюдается лишь при неограниченности среднего интервала между переключениями, т.е. при отсутствии у процесса характерного временного масштаба.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-17517), программы “Научные школы России” (грант № 1729.2003.2), научной программы “Университеты России” (проект УР.01.01.008) и INTAS (грант № 2001-0450).

[1] Kandiah K., Deighton M.O., Whiting F.B. //J. Appl. Phys. 1989. V.66, №2. P.937.

[2] Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. –М.: Сов. радио, 1977, 488с.

[3] Shlesinger M.F., Klafter J., Zumofen G. //Ann. J. Phys. 1999. V.67, №12. P.1253.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРА ДИФфуЗИИ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В БИСТАБИЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

В.Н.Ганин, А.А.Дубков

Нижегородский госуниверситет

Строгий теоретический анализ явления стохастического резонанса [1], связанного с появлением максимума в зависимости отношения сигнал/шум на выходе бистабильной системы от интенсивности шума, требует знания спектра шумовой компоненты. Обычно подобный расчет проводится приближенно при различных предположениях относительно амплитуды синусоидального сигнала и высоты потенциального барьера, разделяющего устойчивые состояния системы. В настоящей работе впервые точно решается задача о вычислении спектра установившегося движения броуновской частицы в двухъямном кусочно-линейном потенциале.

Как известно, движение частицы в среде с большой вязкостью описывается уравнением Ланжевена вида

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dU(x)}{dx} + \xi(t), \quad (1)$$

где: $x(t)$ – координата броуновской частицы, $\xi(t)$ – гауссов белый шум с интенсивностью $2D$.

Рассмотрим далее для простоты симметричный кусочно-линейный потенциал $U(x) = E \cdot (1 - |x|/L)$ с двумя минимумами вблизи отражающих границ $\pm L$ (рис.1). Спектр флуктуаций координаты броуновской частицы $S(f)$ в установившемся режиме ($t \rightarrow \infty$) может быть вычислен через Лаплас-образ функции корреляции $\tilde{K}(p)$ по формуле [2]

$$S(f) = 4 \operatorname{Re}[\tilde{K}(2\pi if)] = 4 \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_0 W_{\infty}(x_0) dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} x Y(x, x_0, 2\pi if) dx \right]. \quad (2)$$

Здесь: $Y(x, x_0, p)$ – преобразование Лапласа от плотности вероятностей переходов $W(x, t|x_0, 0)$ марковского процесса $x(t)$, $W_{\infty}(x)$ – установившееся вероятностное распределение. Соответствующее (1) уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности процесса $x(t)$ таково:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{E}{L} \operatorname{sgn}(x) \cdot W(x, t) \right] + D \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3)$$

где $\operatorname{sgn}(x)$ – знаковая функция. Для определения плотности вероятностей переходов $W(x, t|x_0, 0)$ уравнение (3) необходимо решать с начальным условием $W(x, 0) = \delta(x - x_0)$. На отражающих границах потенциального профиля $x = \pm L$ поток вероятности равен нулю, поэтому из уравнения (3) находим

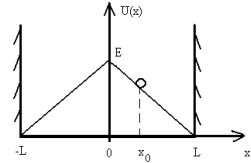


Рис. 1

$$[DW'_x(x, t) - (E/L) \operatorname{sgn}(x) \cdot W(x, t)]_{x=\pm L} = 0. \quad (4)$$

Переходя в (3) к Лаплас-образу плотности вероятностей переходов и учитывая начальное условие, приходим к уравнению для $Y(x, x_0, p)$ вида

$$DY'' - (E/L) \cdot [\operatorname{sgn}(x)Y]' - pY = -\delta(x - x_0). \quad (5)$$

Решаем (5) отдельно для трех областей: $-L \leq x < 0$, $0 < x < x_0$, $x_0 < x \leq L$ с учетом граничных условий (4) для функции $Y(x, x_0, p)$, а в точках $x=0$ и $x=x_0$ применяем вытекающие из (5) условия сшивки решений. После подстановки найденных решений в (2) и интегрирования с учетом известного выражения для установившегося распределения [3] системы (1) определяем Лаплас-образ корреляционной функции:

$$\begin{aligned} \tilde{K}(p) = & \frac{\langle x^2 \rangle}{p} + \frac{D \cdot [1 + (\beta - 1)e^\beta]}{p^2(e^\beta - 1)} + \frac{D\beta}{p^2(e^\beta - 1) \cdot (\lambda e^{-\lambda} - \mu e^{-\mu})} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\mu} (\beta e^{-\mu} - \lambda) \cdot [1 + (\mu - 1)e^\mu] - \frac{1}{\lambda} (\beta e^{-\lambda} - \mu) \cdot [1 + (\lambda - 1)e^\lambda] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь введены безразмерные параметры: высота потенциального барьера $\beta = E/D$ и корни λ, μ квадратного уравнения: $s^2 - \beta s - pL^2/D = 0$. Для вычисления спектра в формуле (6) осталось положить $p = 2\pi i f$ и найти реальную часть выражения.

На рис.2 представлен спектр флуктуаций координаты броуновской частицы для различных значений β (1- $\beta=0,1$; 2- $\beta=0,5$; 3- $\beta=1$; 4- $\beta=2$; 5- $\beta=5$). Как видно из рис.2, при малых β частица практически не замечает потенциальный барьер, и переходы из одного стабильного состояния в другое происходят относительно быстро. С увеличением высоты барьера эти переходы становятся уже достаточно редким явлением, и частица движется внутри одной из потенциальных ям. В результате ее координата изменяется очень медленно, и спектр сужается.

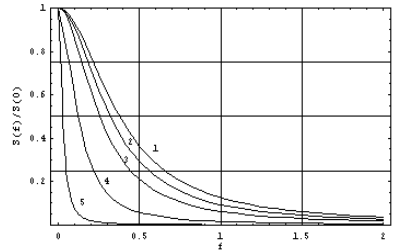


Рис. 2

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-17517), программы “Научные школы России” (грант № 1729.2003.2), научной программы “Университеты России” (проект УР.01.01.008) и INTAS (грант № 2001-0450).

- [1] Gammitoni L., Hänggi P., Jung P., Marchesoni F. //Rev. Mod. Phys. 1998. V.70. P.223.
 [2] Дубков А.А., Малахов А.Н., Саичев А.И. //Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т.43, №4. С.369.
 [3] Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. —М.: Сов. радио, 1977, 488с.

АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В СЖИМАЕМОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

С.А.Лапинова, А.И.Саичев

Нижегородский госуниверситет

В данной работе было проведено исследование диффузии и среднего отклонения скорости частицы примеси в сжимаемой турбулентной среде. Это позволило выявить следующий факт, связанный со сжимаемостью среды. В турбулентной среде наблюдается рост среднего отклонения от установившейся скорости падения частицы по сравнению со спокойной средой. Кроме того, отношение продольной и поперечной диффузии в случае сжимаемой среды стремится к нулю с ростом отношения установившейся скорости падения к характерной скорости $u_\tau = l_u/\tau_u$, где l_u – внешний масштаб турбулентности, τ_u – время корреляции среды.

Для описания движения частиц учтем их падение в гравитационном поле, вязкое трение и воздействие среды. Предположим также, что форма частиц примеси не влияет на его статистические характеристики, а частицы примеси достаточно массивны, чтобы пренебречь броуновским движением. Тогда изменение координаты и скорости отдельно взятой частицы можно описать уравнениями

$$d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{W}, \quad d\mathbf{W}/dt + \lambda \mathbf{W} = \lambda \mathbf{u}(\mathbf{Y}(t) + \mathbf{v}t, t) + \mathbf{g},$$

где $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{v}t$, $\mathbf{W}(t) = \mathbf{V}(t) - \mathbf{v}$ – векторы отклонения координаты $\mathbf{X}(t)$ и скорости $\mathbf{V}(t)$ от равномерного движения частицы, $\mathbf{v} = \mathbf{g}/\lambda$ – установившаяся скорость равномерного падения, λ – коэффициент обратный к τ_s – времени Стокса [1], \mathbf{g} – ускорение свободного падения, $\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)$ – поле скорости турбулентной среды.

Известно, что сжимаемое поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ распадается на сумму некоррелированных компонент соленоидальной \mathbf{u}_s и потенциальной \mathbf{u}_p . Это позволяет представить смещение координаты и скорости также в виде суммы векторов

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_p(t) + \mathbf{Y}_s(t), \quad \mathbf{W}(t) = \mathbf{W}_p(t) + \mathbf{W}_s(t)$$

и исследовать каждый случай отдельно.

Ранее в работе [2] было проанализировано влияние несжимаемого поля на статистические характеристики примеси. Это позволило детально исследовать следующий факт, предсказанный Csanady в [3] и Maxey в [1], – отношение коэффициентов поперечной и продольной диффузии стремится к 1/2 с ростом скорости падения, и скорость движения частиц не зависит от инерционности частицы.

Для анализа влияния потенциального поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ будем считать его статистически изотропным и однородным. Тогда продольная $G(s, \tau)$ и поперечная $F(s, \tau)$ корреляционные функции связаны следующим выражением:

$$G(s, \tau) = \partial/\partial s (sF(s, \tau)),$$

где $-s = |Y_2 - Y_1|$, $\tau = t_2 - t_1$. В результате преобразований получено, что в приближении свободного падения стационарная плотность вероятности в направлении \mathbf{g} удовлетворяет следующему уравнению:

$$w f_{||} - C_{||} f_{||} + \sigma_{||}^2 \partial f_{||} / \partial w = 0.$$

Здесь w -направление скорости вдоль \mathbf{g} , $C_{||}$ -среднее отклонение скорости от v . Решая его, получаем

$$f(w) = 1 / ((2\pi)^{1/2} \sigma_{||}) \exp(- (C_{||} - w)^2 / 2\sigma_{||}^2).$$

В отличие от несжимаемого поля среднее отклонение скорости $C_{||}$ не равно нулю. Исследования зависимости его от инерционности частицы и относительной скорости падения $\gamma = v/u_\tau$ показали, что в случае больших значений γ $C_{||} < 0$, то есть под воздействием турбулентности происходит замедление падения частицы, для более легких частиц или слабой турбулентности происходит увеличение скорости падения. Данный эффект численно получен Махеу в [1]. Из рис.1. видно, что с уменьшением инерционности максимум отклонения скорости в положительном направлении растет. Однако с ростом относительной скорости отклонение стремится к нулю, что можно объяснить уменьшением времени корреляции.

Исследование $D_{||}$ и D_{\perp} показало, что их независимость от инерционности частицы и их отношение стремится к нулю с ростом γ и определяется равенством:

$$D_{||} / D_{\perp} = 1 / (\gamma^2 + 1).$$

Результаты отношения продольной и поперечной диффузий представлены на рис.2.

Работа поддержана грантом РФФИ №03-02-16-680.

- [1] Махеу M.R. //J. Fluid Mech. 1987. V.174. P.441.
 [2] Грибова Е.З., Жукова И.С., Лапинова С.А., Саичев А.И., Эльперин Т. //ЖЭТФ. 2003. Т.123, №3. С.543.
 [3] Csanady G.T. //J. Atmosph. Sci. 1963. V.20. P.201.

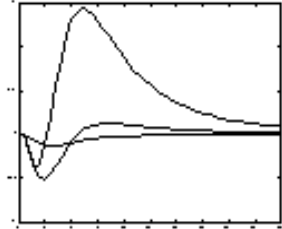


Рис. 1

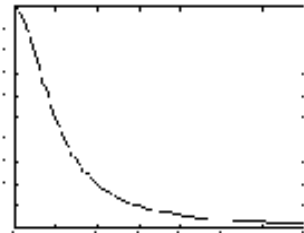


Рис. 2

МЕТОДИКА ОПТИМИЗАЦИИ ПОТЕНЦИАЛА ПРИ ВАРИАЦИОННЫХ РАСЧЕТАХ СПЕКТРОВ ТРЕХАТОМНЫХ МОЛЕКУЛ

С.В.Ширин, О.Л.Полянский, Н.Ф.Зобов

Институт прикладной физики РАН

Одним из основных способов получения теоретических спектров трехатомных молекул являются вариационные расчеты. Преимущества вариационных расчетов состоят в том, что они позволяют получать уровни энергии сразу во всех колебательных состояниях, для трехатомных молекул таких состояний тысячи. Недостатком вариационных расчетов до недавнего времени была их плохая точность, поэтому самым распространенным способом решения колебательно-вращательного уравнения Шредингера были эффективные гамильтонианы, полученные методом теории возмущения. Однако работы, проведенные в последние годы, привели к существенному повышению точности вариационных вычислений, которые все больше вытесняют эффективные гамильтонианы в качестве основного метода анализа спектров трехатомных молекул.

Вариационные расчеты заключаются в численном решении уравнения Шредингера с точным оператором кинетической энергии в приближении Борна-Оппенгеймера. Для получения наиболее точных расчетов используют полуэмпирические поверхности потенциальной энергии, параметры которых определяются из критерия наилучшего описания экспериментальных данных.

Колебательно-вращательные уровни E находятся из решения системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N \langle \phi_i | H - E | \phi_j \rangle C_j = 0,$$

где число N определяет размерность базиса волновых функций ϕ_i , C_j – константы разложения собственных функций гамильтониана H по этому базису. В вариационных расчетах используют различные аналитические представления для потенциальной поверхности $V(r_1, r_2, \theta)$, в наиболее простом виде функция записывается в виде ряда по отклонениям Δr_1 , Δr_2 , $\Delta \theta$ от состояния равновесия.

Поверхность потенциальной энергии – это значительный фактор, определяющий точность вариационных расчетов колебательно-вращательных спектров. При расчетах, в основе потенциальной поверхности обычно используется высококачественная *ab initio* поверхность в приближении Борна-Оппенгеймера. К этой поверхности также могут добавляться поправки к приближению Борна-Оппенгеймера. При расчете уровней энергии с использованием *ab initio* поверхности стандартное отклонение рассчитанных уровней от экспериментальных, в зависимости от “качества” поверхности, получает несколько обратных сантиметров. Для повышения точности расчетов проводят оптимизацию поверхности потенциальной энергии. Оптимизация может производиться разными способами. Обычно она осуществляется умножением потенциальной функции на некий морфический полином, запи-

санный в виде ряда по отклонениям Δr_1 , Δr_2 , $\Delta\theta$. Параметры морфического полинома подбираются из условия минимизации стандартного отклонения. Процедура оптимизации заключается в добавлении таких параметров, которые приводят к уменьшению стандартного отклонения и исключению параметров, которые увеличивают его. В оптимизации обязательно должны использоваться все уровни энергии. Интраполяционные свойства оптимизированного потенциала, как правило, получаются довольно высокими как по энергии, так и по квантовым числам. Экстраполяционные – несколько хуже.

Авторами были проведены оптимизации поверхностей потенциальной энергии для двух молекул – H_2O и D_2O . При оптимизации поверхности H_2O в основу была положена *ab initio* поверхность, рассчитанная Партриджем и Швенке [1]. К ней были добавлены поправки к приближению Борна-Оппенгеймера: адиабатическая [2], релятивистская [3,4], феноменологическая поправка к величине барьера линейности [5] и неадиабатическая поправка [2]. Оптимизация производилась до энергий 25000 см^{-1} . Было использовано всего 20 параметров, максимальная степень членов при которых не превышает четвертой. Получено стандартное отклонение $0,1 \text{ см}^{-1}$ [6].

При оптимизации поверхности молекулы D_2O в основу была положена высококачественная, недавно полученная новая *ab initio* поверхность молекулы воды [7]. К ней также были добавлены: адиабатическая [2], релятивистская [3,4] и неадиабатическая поправки [2]. Для конкретного применения требовался расчет низлежащих уровней, поэтому оптимизация производилась до энергий 8000 см^{-1} . Было использовано 23 параметра. Получено стандартное отклонение $0,019 \text{ см}^{-1}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 03-02-16125, № 03-02-06343).

- [1] Partridge H., Schwenke D.W. //J. Chem. Phys. 1997. V.106. P.4618.
- [2] Schwenke D. //J. Phys. Chem. A. 2001. V.105. P.2352.
- [3] Csaszar A., Kain J., Polyansky O., Zobov N., Tennyson J. //Chem. Phys. Let. 1998. V.293. P.317.
- [4] Quiney H., Barletta P., Tarczay G., Csaszar A., Polyansky O., Tennyson J. //Chem. Phys. Let. 2001. V.344. P.413.
- [5] Kain J., Polyansky O., Tennyson J. //Chem. Phys. Let. 1999. V.317. P.365.
- [6] Shirin S., Polyansky O., Zobov N., Barletta P., Tennyson J. //J. Chem. Phys. 2003. V.118, №5. P.2124.
- [7] Polyansky O., Csaszar A., Shirin S., Zobov N., Barletta P., Tennyson J., Schwenke D., Knowles P. //Science. 2003. V.299. P.539.

ОБОБЩЕННЫЙ ПРОЦЕСС ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

А.И.Саичев, С.Г.Уткин

Нижегородский госуниверситет

В последнее время большое внимание уделяется аномально диффузионным явлениям. Они рассматриваются в различных областях современной науки: хаотической динамике гамильтоновых систем [1], физике плазмы [2], теории турбулентности [3], физике твердого тела [4], физической химии [5], (см. также [6] и обзор [7]).

Один из наиболее плодотворных методов описания диффузионных явлений основывается на детальном исследовании модельных процессов, чьи вероятностные распределения являются точными решениями тех или иных диффузионных уравнений. Одним из таких процессов служит процесс Орнштейна-Уленбека, описывающий поведение частицы, совершающей броуновское движение при воздействии на нее упругой силы. Характерным его свойством является то, что он может быть легко преобразован в винеровский процесс, плотность вероятностей которого подчиняется классическому уравнению диффузии.

Многие авторы для удобства вводят так называемый “дробный процесс Орнштейна-Уленбека” [5-7], заменяя в уравнении Фоккера-Планка простые дифференциальные операторы их дробными аналогами [5]. В данной работе сконструирован обобщенный процесс Орнштейна-Уленбека и исследованы некоторые его статистические характеристики.

Как известно, обычный процесс Орнштейна-Уленбека удовлетворяет следующему уравнению Ланжевена

$$\dot{v} = -\gamma \cdot v + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ – гауссов белый шум. Дисперсия такого процесса будет подчиняться классическому линейному закону диффузии. Подставим вместо белого шума случайные блуждания, благодаря которым система приобретает аномально диффузионный характер [8], и рассмотрим процесс $X(t)$, удовлетворяющий уравнению Ланжевена

$$\frac{dX(t)}{dt} = V(t), \quad \frac{dV(t)}{dt} + hV(t) = \sum_k \eta_k \delta(t - t_k),$$

где η_k – гауссовы независимые случайные величины с нулевыми средними и одинаковыми дисперсиями σ^2 , в то время как $\{\dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\}$ – стационарный поток случайных моментов со статистически независимыми интервалами между ними $\tau_n = t_n - t_{n-1}$. Считается, что плотности вероятностей случайных длительностей интервалов не зависят от номера интервала.

При исследовании полученного процесса выведена зависимость второго момента от коэффициента затухания. Она совпадает с аналогичной зависимостью для процесса Орнштейна-Уленбека. Если средняя длительность интервала между моментами $\{t_n\}$ ограничена, то временная асимптотика среднеквадратичного отклоне-

ния растет по закону линейной диффузии. Однако при бесконечном среднем временная асимптотика среднеквадратичного отклонения растет нелинейно:

$$\langle X^2(t) \rangle \sim t^\beta, \quad 0 < \beta < 1,$$

что соответствует аномально-диффузионному закону, а при $\beta \rightarrow 1$ переходит в линейный закон.

Таким образом, рассмотренный процесс естественно обобщает процесс Орнштейна-Уленбека на случай нарушения центральной предельной теоремы.

- [4] Zaslavsky G.M., Edelman M., Niyazov B. //Chaos. 1997. V.7, №1. P.159.
- [5] Забурдаев В.Ю., Чукбар К.В. //ЖЭТФ. 2002. Т.121, вып.2. С.299.
- [6] Klafter J., Shlesinger M.F., Zumofen G. //Phys. Tod. 1996. V.49, №2. P.33.
- [7] Учайкин В.В. //ТМФ. 1998. Т.115, №1. С.154.
- [8] Barkai E., Silbey R. //J. Phys. Chem. B. 2000. V.104. P.3866.
- [9] Barkai E. //Phys. Rev. E. 2001. V.63. P.046118.
- [10] Metzler R., Klafter J. //Phys. Rep. 2000. V.339. P.1.
- [11] Саичев А.И., Уткин С.Г. //Актуальные проблемы статистической радиофизики (малаховский сборник). 2002. Т.1, №1. С.5.
- [12] Saichev A.I., Woyczynski W.A. Distributions in the Physical and Engineering Sciences. Volume I. –Boston: Birkhauser, 1997, 336p.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РИСКА ПЕРЕЛИВА КАПИТАЛА НА ФОНДОВОМ РЫНКЕ

Т.Н.Данилова, Е.В.Кошелев

Волго-Вятская Академия Государственной Службы

Изменение цен акций на фондовом рынке приводит к возникновению связанно с ними риска. Поскольку такие изменения происходят постоянно, инвестору приходится анализировать этот риск, чтобы определить, цены каких акций подвержены наибольшему риску, а также какие акции являются временно недооцененными или переоцененными. Во втором случае мы говорим о наличии возможности арбитража.

На реальном рынке капитала всегда существует возможность арбитража. Поэтому, формируя для каждого финансового титула соответствующий дублирующий портфель, можно определить, операция с какими портфелем и титулом принесет максимум прибыли. Оценивая таким способом различные альтернативы, находим, с каким титулом сопряжен наибольший риск, который мы будем называть риском перелива капитала.

Риск перелива капитала обусловлен возможностью изменения цен одних титулов под давлением цен других титулов рынка. Причем цены титулов могут как расти, так и падать, следовательно, хозяйствующий субъект может в этом случае либо выиграть, либо проиграть. Когда цена одного титула под давлением цен других титулов растет, происходит перелив капитала именно к этому титулу. В про-

тивном случае, т.е. когда цена титула падает, происходит отток капитала к другим титулам, чья цена выше. Указанные процессы будут происходить лишь с титулами, обладающими сходными характеристиками с позиции потребителя или инвестора. В нашем случае сходными характеристиками будут обладать дублируемый титул и дублирующий портфель.

Решая задачу оценки риска перелива капитала на фондовом рынке, мы должны ответить на два вопроса: 1) Какие титулы подвержены наибольшему колебанию цен? 2) Какие титулы являются временно недооцененными, а какие временно переоцененными?

Для решения поставленной задачи использовались арбитражные технологии [1]. Анализ проводился по результатам торгов на фондовых биржах России за 14 недель 2001 г. [2]. В качестве сравниваемых титулов рассматривались акции следующих эмитентов: АвтоВАЗ - титул 1, ВНК - титул 2, Пурнефтьгаз (прив.) - титул 3, Самароэнерго - титул 4, Сахалинморнефтегаз (прив.) - титул 5. Акции этих эмитентов наиболее интересны для анализа, поскольку за период в 14 недель они характеризовались наибольшей средней доходностью: АвтоВАЗ - 25,63%, ВНК - 40,23%, Пурнефтьгаз (прив.) - 7,54%, Самароэнерго - 9,89%, Сахалинморнефтегаз (прив.) - 38,01%. В качестве исследуемого периода брались последние 5 недель общего срока в 14 недель.

В результате проведенного анализа были получены следующие выводы:

1. По величине риска изменения цены анализируемые титулы можно отранжировать следующим образом: $3 > 4 > 2 > 1 > 5$. Это означает, что в ближайшем будущем наименьшим колебаниям будет подвержена цена титула 3, т.е. акций Пурнефтьгаза (прив.), а больше всего будет колебаться цена 5-го титула, т.е. акций Сахалинморнефтегаза (прив.).

2. По возможности перелива капитала титулы следует отранжировать таким образом: $1 > 5 > 4 > 2 > 3$. Это означает, что самый недооцененный из пяти титулов - это титул 1, т.е. акции АвтоВАЗа. Их цена в ближайшем будущем вырастет на наибольшую величину в процентном отношении, а значит, в эти акции будет больше инвестироваться капитала, обращающегося на исследуемом сегменте фондового рынка. Переоцененным титулом является только 3-й титул, т.е. акции Пурнефтьгаза (прив.). Эти акции будут падать в цене, поэтому будет наблюдаться отток капитала от этих активов рынка.

Полученные выводы отличаются от предпочтений инвестора, которые были получены с использованием критериев стохастического доминирования [1]. Они выглядели следующим образом: $2 > 3 > 4 > 1 > 5$. Такие различия в результатах произошли по двум причинам:

1. Оценка риска перелива капитала с использованием критериев стохастического доминирования проводилась на основе ретроспективных данных. Когда же мы использовали для оценки арбитражные технологии, мы исходили из прогнозных данных.

2. Критерии стохастического доминирования позволяют сравнивать альтернативы между собой по отдельности. Арбитражные технологии, в свою очередь,

позволяют сравнить каждый титул с дублирующим его портфелем, составленным из множества других титулов. Такое возможно на практике, когда инвестор владеет определенным количеством активов рынка либо готов осуществлять продажи без покрытия. В противном случае ему приходится сравнивать титулы по отдельности.

Если такой подход применить к оценке риска перелива капитала в экономике в целом, то это означает, что в случае, когда каждый собственник владеет каким-то одним предприятием, необходимо для анализа использовать критерии стохастического доминирования. Если же собственники диверсифицируют свою собственность, то следует использовать арбитражные технологии.

- [1] Крушвиц Л. Финансирование и инвестиции (пер. с немецкого под общей ред. В.В. Ковалева и З.А. Сабова) –СПб.: Питер, 2000, с.128.
- [2] Иванов А., Саркисян А. //Журнал для акционеров. 2001, №8 (112). С.39.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РИСКА ПЕРЕЛИВА КАПИТАЛА В ЭКОНОМИКЕ

Т.Н.Данилова, Е.В.Кошелев

Волго-Вятская Академия Государственной Службы

Анализируя денежные потоки производственного и финансового секторов экономики, аналитик в первую очередь сталкивается с влиянием рыночных факторов на возможность перелива капитала из одной отрасли экономики в другую, а в частном случае от одной рыночной единицы к другой. В качестве таких рыночных единиц следует рассматривать предприятия как частного, так и государственного сектора экономики, а также институты кредитно-банковской системы. Включение предприятий государственного сектора в число рыночных единиц объясняется тем, что такие предприятия непосредственно вовлечены во взаимодействие с рынком через систему цен на ресурсы, сырье и отпускную продукцию.

Изменения цен на товары, ценные бумаги и финансовые инструменты кредитно-банковской системы (т.е. цен титулов) в одном регионе приводят к корректировке условий контрактов, заключаемых между хозяйствующими субъектами, которые находятся в разных регионах, причем один из них находится в том регионе, где произошли указанные изменения. Кроме того, подобные ситуации могут повлечь за собой заключение новых контрактов или же аннулирование старых. Все это приводит к возникновению риска, который мы будем называть риском перелива капитала.

Риск перелива капитала обусловлен возможностью изменения цен одних титулов под давлением цен других титулов рынка. Причем цены титулов могут как расти, так и падать, следовательно, хозяйствующий субъект может в этом случае либо выиграть, либо проиграть. Когда цена одного титула под давлением цен других титулов растет, происходит перелив капитала именно к этому титулу. В противном случае, т.е. когда цена титула падает, происходит отток капитала к другим

титулам, чья цена выше. Указанные процессы будут происходить лишь с титулами, обладающими сходными характеристиками с позиции потребителя или инвестора.

Решать задачу о прогнозировании перелива капитала можно, например, используя в качестве цен титулов рыночную стоимость имущества хозяйствующих субъектов. В качестве такой стоимости может выступать рыночная цена акций предприятий. Такой подход позволит оценить риск перелива капитала в частном секторе экономики, основу которого составляют наиболее крупные акционерные общества, акции которых котируются на фондовых рынках.

Указанная задача решалась с использованием критериев стохастического доминирования [1]. Анализ проводился по результатам торгов на фондовых биржах России за 14 недель 2001 г. [2]. В качестве сравниваемых титулов рассматривались акции следующих эмитентов: АвтоВАЗ – титул 1, ВНК – титул 2, Пурнефтьгаз (прив.) – титул 3, Самароэнерго – титул 4, Сахалинморнефтегаз (прив.) – титул 5. Акции этих эмитентов наиболее интересны для анализа, поскольку за период в 14 недель они характеризовались наибольшей средней доходностью: АвтоВАЗ – 25,63%, ВНК – 40,23%, Пурнефтьгаз (прив.) – 7,54%, Самароэнерго – 9,89%, Сахалинморнефтегаз (прив.) – 38,01%. В качестве исследуемого периода брались последние 5 недель общего срока в 14 недель.

В итоге были получены следующие предпочтения инвестора: $2 > 3 > 4 > 1 > 5$. Поскольку на основе анализа статистических данных за последние 5 недель наиболее предпочтительным оказался титул 2, т.е. акции ВНК, спрос на эти акции на фондовом рынке возрастет, что в итоге увеличит их рыночную цену. В свою очередь, возрастет предложение титула 5, т.е. акций Сахалинморнефтегаза (прив.), что в итоге снизит его рыночную цену. Аналогично можно сделать выводы о переливах капитала между остальными титулами.

Полученные выводы не противоречат классическому правилу принятия решения на основе критериев “доходность/риск”, а лишь дополняют его результаты. Так по величине средней доходности за исследуемый период в 5 недель альтернативы можно отранжировать следующим образом: $5 > 2 > 3 > 4 > 1$. Часть этого соотношения, т.е. $2 > 3 > 4$, выполняется также и в случае, когда для принятия решения относительно предпочтений инвестора использовались критерии стохастического доминирования. По критерию риска, т.е. по коэффициенту вариации CV , наиболее рискованными альтернативами оказались 1-я и 5-я. Альтернативы 2, 3 и 4 обладают относительно малым риском на единицу доходности, т.е. CV мало отличается от 1. Поэтому большинство инвесторов будут придерживаться мнения, что $2 > 3 > 4$, несмотря на то, что по критерию риска $2 < 3 < 4$. В свою очередь, по критериям доходности и риска $5 > 1$. Однако, это на самом деле не так, если внимательно посмотреть на изначальные данные о ценах титулов [2]. А именно, мы можем наблюдать случайные скачки цен 1-го титула в 1-ую неделю и 5-го титула в 4-ую неделю, что существенно повлияло на расчет средней доходности и коэффициента вариации. Следовательно, соотношение $5 > 1$ следует поставить под сомнение.

Ответ на вопрос о том, как в действительности распределяются предпочтения инвестора, дают как раз критерии стохастического доминирования. Таким образом,

с помощью данной методики можно спрогнозировать реальное поведение инвесторов, а, следовательно, и возможности перелива капитала от одних титулов к другим. Эта информация является полезной как для самих инвесторов, так и для эмитентов, чьи акции оцениваются. Кроме того, учитывая, что рассмотренные выше эмитенты являются одними из наиболее крупных предприятий страны, и рыночная стоимость их имущества во многом отражает перспективы их развития, можно спрогнозировать развитие частного сектора экономики России.

- [1] Крушвиц Л. Финансирование и инвестиции (пер. с немецкого под общей ред. В.В. Ковалева и З.А. Сабова). –СПб.: Питер, 2000, с.116.
 [2] Иванов А., Саркисян А. //Журнал для акционеров. 2001, №8 (112). С.39.

БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА-ХОПФА ТОЧЕК ПЕРИОДА ДВА В ОБОБЩЕННОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЭНО

И.И.Овсянников

Нижегородский госуниверситет

В данной работе исследуется следующее квадратичное отображение

$$\begin{aligned}\bar{X} &= Y, \\ \bar{Y} &= M_1 - M_2 X - Y^2 + R\epsilon XY + S\epsilon Y^3, \quad \epsilon \ll 1.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь: $M_{1,2}$ – параметры, ϵ – малая величина, R и S – некоторые константы, области изменения координат и параметров покрывают все конечные значения при уменьшении ϵ .

Это отображение является модельным во многих задачах, связанных с гомоклиническим касанием многообразий седловой неподвижной точки [1,2] (в [2] $S=0$). Показано, что в случаях нейтрального двумерного седла [1] и касания коразмерности два многообразий трехмерного седла [2] отображение первого возвращения путем перемасштабирования координат и параметров может быть приведено к виду (1) с точностью до асимптотически малых членов. Изучение бифуркаций отображения первого возвращения дает информацию о характере бифуркаций основной системы, например, неподвижная точка модельного отображения отвечает периодической траектории исходной системы.

Из простейших бифуркаций наибольший интерес представляет бифуркация рождения замкнутой инвариантной кривой, то есть рождение инвариантного тора в исходной системе, что может отвечать срыву некоторой физической системы с периодического режима на биения.

Отображение (1) переходит в обычное отображение Эно при $\epsilon = 0$. Отображение Эно хорошо изучено, в том числе известно, что оно является вырожденным относительно бифуркации Андронова-Хопфа, так как оно консервативно (имеет постоянный якобиан M_2), и, следовательно, первая ляпуновская величина равна 0. Таким образом, при переходе от устойчивого фокуса к неустойчивому замкнутых инвари-

антных кривых не рождается. В исходной же системе рождаются замкнутые инвариантные кривые, поэтому для изучения этой бифуркации необходимо рассмотреть члены более высокого порядка малости.

В работе [1] была вычислена первая ляпуновская величина для сложного фокуса (т.е. когда неподвижная точка имеет пару мультипликаторов $e^{\pm i\varphi}$). Она оказалась пропорциональна ε , а ее знак полностью определяется знаком R .

В настоящей работе было найдено выражение для первой ляпуновской величины в случае аналогичной бифуркации точек периода два, то есть неподвижных точек квадрата отображения (1)

$$G = R\varepsilon g^2 \frac{\varphi}{2} (\sin \frac{\varphi}{2} - 1)(2 \sin \frac{\varphi}{2} + 1). \quad (2)$$

Знак ее противоположен знаку R , следовательно, при $R > 0$ из точек периода два рождается устойчивая замкнутая кривая, а при $R < 0$ – неустойчивая. Кроме того, она обращается в 0 при $\varphi = 0$, то есть точка с мультипликаторами $(+1, -1)$ вырождена, и для ее изучения учета членов порядка ε недостаточно. При $\varphi \rightarrow \pi$ первая ляпуновская величина имеет конечный предел, поэтому исследование точки $(-1, -1)$ квадрата отображения (1) возможно в рамках данной модели.

Следует отметить, что в формулу (2) не вошел коэффициент S . Это можно объяснить тем, что член $S\varepsilon Y^3$ – консервативный, то есть не влияет на якобиан отображения (1).

Работа поддержана грантом РФФИ № 02-01-00273.

- [1] Gonchenko S.V., Gonchenko V.S. On Andronov-Hopf bifurcation of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies. — Berlin. Preprint No.556, WIAS, 2000.
- [2] Gonchenko S.V., Gonchenko V.S., Tatjer J.C. //In: Proc. Int. Conf. “Progress in Nonlinear Science”, dedicated to 100th Anniversary of A.A. Andronov, 2001, p.63.