ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

АНАЛИЗ СПЕКТРА АММИАКА ВЫСОКОГО РАЗРЕШЕНИЯ В БЛИЖНЕМ ИНФРАКРАСНОМ ДИАПАЗОНЕ, 6458-6528 СМ$^{-1}$

И.А.Коваль[1)], М.А.Кошелев [1)], В.А.Савин[1)], М.Ю.Третьяков[2)]

[1)]*Нижегородский госуниверситет,* [2)]*Институт прикладной физики РАН*

В последнее время диодные лазеры с внешней перестройкой частоты нашли широкое применение в спектроскопии атомов и молекул, поскольку они обладают хорошими шумовыми и частотными характеристиками. При достаточно большой мощности они имеют низкий уровень шума и широкий диапазон перестройки.

На сегодняшний день существует много работ по исследованию колебательно-вращательных полос $\nu_1+\nu_3$ и $2\nu_3$ спектра аммиака в 1,5 мкм диапазоне. Однако только в одной из них [1] проводятся широкодиапазонные исследования спектра с высоким разрешением, выполненные с помощью Фурье-спектрометра. Точность измерения частоты, указанная в работе [1], значительно превосходит, а чувствительность значительно уступает нашей, поэтому далее наши результаты приводятся в сравнении с этой работой.

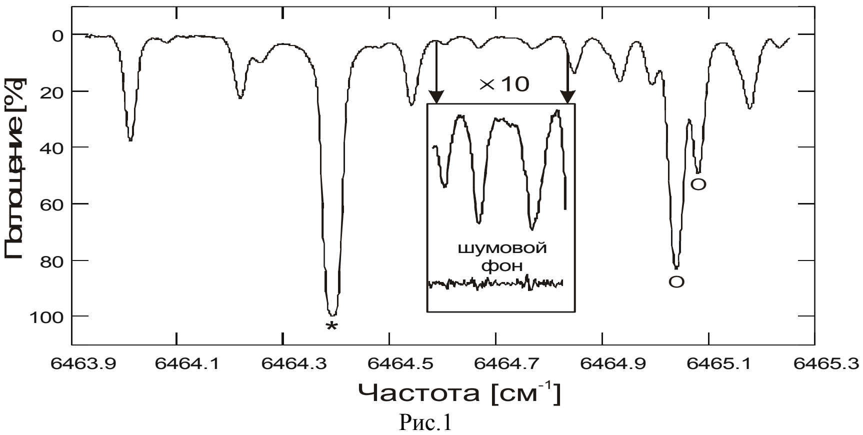


Рис.1

На рис.1 приведена экспериментальная запись участка спектра аммиака шириной 1,4 см$^{-1}$. На рисунке отмечены все линии, обнаруженные в этом диапазоне в работе [1]. Одна из них (*) была идентифицированная, а две других (^{O}) – нет. Большое число остальных линий с меньшей амплитудой, наблюдаемых нами, не были обнаружены в работе [1] из-за меньшей чувствительности.

На рис.2 приведены смещения центров линий, наблюдаемых в обоих экспериментах. Поскольку экспериментальная ошибка в работе [1] составляла 0,0005 см$^{-1}$, а декларируемая производителем точность волномера, использованного в нашем эксперименте, была на порядок хуже 0,0065 см$^{-1}$, то их данные были использованы для абсолютной частотной калибровки наших измерений. Для этого вводилась корректирующая функция, которая показана сплошной линией. На рисунке 3 показаны смещения центров линий с учетом корректирующей функции. Пунктиром отмечены ошибки эксперимента.

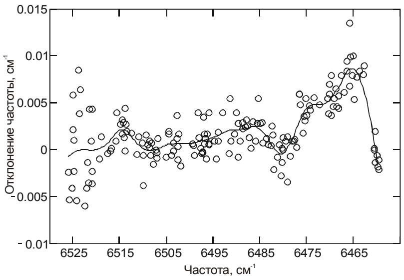


Рис.2

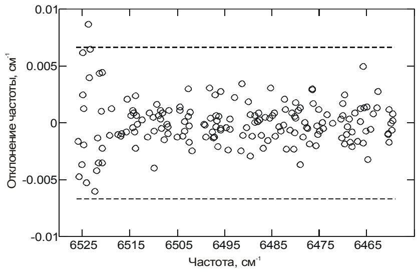


Рис.3

Обработка спектра проводилась Фойгтовским профилем поглощения с учетом насыщения линий. Доплеровская полуширина составляла приближенно 0,0097 см$^{-1}$. Лоренцевская ширина спектральных линий варьировалась. Каждая линия обрабатывалась отдельно с учетом влияния крыльев соседних линий и аппаратной функции спектрометра. Кроме центральной частоты линии из обработки определялись полуширина линии и поглощение в центре линии в относительных единицах. Сравнение величины поглощения, определенного из наших данных, с данными работы [1] также дало хорошее совпадение. Отличие составляло не более 10%.

Таким образом, количество экспериментально наблюденных линий в спектре аммиака увеличено в несколько раз. В работе [1] приведено около 200 линий, попавших в вышеобозначенный диапазон. Нами же в этом диапазоне обнаружено около 800 спектральных линий аммиака.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 00-02-16604 и государственным контрактом по теме “Развитие методов субмиллиметровой спектроскопии сверхвысокого разрешения”.

[1] Lundsberg-Nielsen L., Hegelund F., and Nicolaisen F.M. //J. Mol. Spectrosc. 1993. V.162. P.230.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ДОХОДНОСТИ ОБЛИГАЦИЙ С УЧЕТОМ НАЛОГОВ

Т.Н.Данилова, Е.В.Кошелев

Волго-Вятская Академия Государственной Службы

Облигации являются достаточно привлекательным финансовым инструментом для инвесторов, что объясняется надежностью получения дохода. В то же время, не все инвесторы имеют достаточную информацию о порядке налогообложения дохода по облигациям. В данной статье анализируются различные варианты налогообложения дохода по облигациям в зависимости от их вида с целью определить выгоды инвестора от отсрочки выплаты некоторых налогов.

В классической теории финансов полная доходность облигации находится из уравнения

$$P=\sum_{t=1}^{4n}\frac{gN}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{k_d}{4}}\right)^t+N\left(\frac{1}{1+\frac{k_d}{4}}\right)^{4n},$$

где P – цена приобретения облигации, N – номинал облигации, g – годовая купонная ставка, t – порядковый номер квартала, n – количество лет до погашения облигации, k_d – полная годовая доходность облигации. Здесь мы рассматриваем безотзывную купонную облигацию с квартальной выплатой купонов.

Для решения проблемы учета налогов разделим доход инвестора по облигации на две составляющие: процентный доход и дисконтный доход. Тогда уравнение для вычисления полной доходности облигации с учетом налогов будет выглядеть следующим образом:

$$P=\sum_{t=1}^{4n}\frac{gN}{4}\left(1-T_1\right)\left(\frac{1}{1+\frac{k_{dAT}}{4}}\right)^t+\sum_{t=1}^{4n}\left[P\left(1+i\right)^t-P\left(1+i\right)^{t-1}\right]T_2\left(\frac{1}{1+\frac{k_{dAT}}{4}}\right)^t+$$

$$+\left[N-\left(N-P\right)T_2\right]\left(\frac{1}{1+\frac{k_{dAT}}{4}}\right)^{4n},$$

где T_1 – ставка налога на процентный доход по облигации, T_2 – ставка налога на дисконтный доход по облигации, i – квартальная ставка, по которой P вырастает за весь срок владения облигацией до N, а k_{dAT} – полная годовая доходность облигации с учетом налогов.

Второе слагаемое в уравнении отражает налоговую экономию, которая возникает из-за того, что до момента реализации или погашения облигации налог с дисконтного дохода не платится. Он уплачивается только один раз в момент реализации или погашения облигации с разницы между ценой реализации и ценой приобретения ценной бумаги. В случае, когда инвестор в конце срока погашает облигацию по номиналу, эта разница будет $N - P$.

Таким образом, каждый квартал инвестор получает налоговую экономию в размере дисконтного дохода за соответствующий квартал, умноженного на ставку налога на этот доход. За счет этой экономии инвестор получает дополнительную доходность по облигации.

На основе эмпирических данных и правовых условий НК РФ можно решить последнее уравнение относительно k_{dAT} в программе "Mathematica 3". В результате проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Существует кроме купонной и текущей доходности третий компонент полной доходности облигации с учетом налогов – дополнительная доходность, возникающая вследствие экономии на налогах.

2. Величина дополнительной доходности растет с увеличением дисконтного дохода по облигации, ставки налога на этот доход и срока владения облигацией.

3. Кроме дополнительной доходности по облигации можно рассчитать приведенный денежный выигрыш в результате экономии на налогах, величина которого зависит от номинала облигации и от тех же параметров, что и величина дополнительной доходности.

4. За счет различий в ставках налога на прибыль для юридических лиц и налога на доходы физических лиц полная доходность по облигациям с учетом налогов получается больше для физических лиц, а дополнительная доходность и приведенный денежный выигрыш – больше для юридических лиц.

5. При определенных условиях раздельного налогообложения процентного и дисконтного доходов по облигациям, как, например, для государственных и муниципальных ценных бумаг, условиями выпуска и обращения которых предусмотрено получение дохода в виде процентов, большая ставка налога на дисконтный доход для юридических лиц компенсируется соответствующим уровнем дополнительной доходности таким образом, что полная доходность с учетом налогов оказывается даже несколько больше для юридических, чем для физических лиц.

[1] Налоговый кодекс Российской Федерации. Часть первая: Постатейный комментарий. /Под общей ред. В.И.Слома. –М.: Статут, 1998, с.103.
[2] Налоговый кодекс Российской Федерации. Часть вторая. –М.: ЭКМОС, 2000, с.90.
[3] Постатейный комментарий к главе 25 НК РФ. Налог на прибыль организаций. –М.: Статус-Кво 97, 2002, с.246.
[4] Бригхем Ю., Гапенски Л. Финансовый менеджмент. –С.-Петербург: Экономическая школа, 1999, с.108 (т.1), с.56 (т.2).
[5] Четыркин Е.М. Финансовая математика. –М.: Дело, 2002, с.233.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ В БЫСТРО МЕНЯЮЩЕМСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

А.А.Дубков

Нижегородский госуниверситет

Ранее в статье А.Н.Малахова [1] было показано, что в быстро флуктуирующем периодическом потенциале процесс диффузии броуновских частиц ускоряется по сравнению со случаем свободной диффузии. Однако точная формула для эффективного коэффициента диффузии была получена автором лишь для пилообразного потенциального профиля. В настоящей работе результаты [1] обобщаются на случай произвольного периодического потенциала.

Рассмотрим, как и в [1], следующее стохастическое уравнение Ланжевена для координаты броуновской частицы в вязкой среде

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{dU(x)}{dx}\eta(t)+\xi(t)\,, \qquad (1)$$

где $U(x)$ – четная функция с периодом L, $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – статистически независимые гауссовы белые шумы с нулевыми средними значениями и интенсивностями D и D_η соответственно. Поместим начало координат в один из минимумов потенциала $U(x)$.

Как показано в [2] на примере диффузии броуновских частиц в периодической структуре, задача отыскания эффективного коэффициента диффузии D_∞, определяемого как

$$D_\infty=\lim_{t\to\infty}\frac{<x^2(t)>}{t}\,,$$

сводится к отысканию среднего времени первого достижения $\tau(0)$ одной из поглощающих границ x=±L, расположенных в ближайших минимумах поля, броуновской частицей, стартующей из точки x=0,

$$D_\infty=\frac{L^2}{\tau(0)}\,. \qquad (2)$$

Записывая для рассматриваемой системы (1) хорошо известное уравнение для среднего времени первого достижения

$$\frac{D}{2}\cdot\frac{d^2\tau(x)}{dx^2}+\frac{D_\eta}{2}\cdot U'(x)\frac{d}{dx}\left[U'(x)\frac{d\tau(x)}{dx}\right]=-1$$

и решая его с условиями поглощения на границах $x=\pm L$: $\tau(\pm L)=0$, нетрудно найти время $\tau(x)$ и после подстановки в (2) получить следующую точную квадратурную формулу для D_∞

$$D_\infty = D \cdot \left[\frac{1}{L} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{1 + D_\eta \left[U'(x)\right]^2 / D}} \right]^{-2} . \qquad (3)$$

Как видно из (3), при любой форме потенциала $U(x)$ эффективный коэффициент диффузии всегда больше коэффициента D, отвечающего свободной диффузии броуновских частиц ($U(x)$=0), что согласуется с прогнозом работы [1]. Для пилообразного профиля $U(x)=2E|x|/L$ при $|x| \le L/2$ сразу же приходим к ранее полученному А.Н.Малаховым точному результату

$$D_\infty = D + D_\eta \frac{4E^2}{L^2} . \qquad (4)$$

В случае синусоидального потенциала $U(x)=E \sin^2(\pi x/L)$ формула (3) дает значение

$$D_\infty = \frac{\pi^2 D \cdot (1+m^2)}{4\boldsymbol{K}^2 (m/\sqrt{1+m^2})} , \qquad m = \frac{\pi \cdot E}{L} \sqrt{\frac{D_\eta}{D}} , \qquad (5)$$

где $\boldsymbol{K}(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода ($0<k<1$). Анализ соотношения (5) показывает, что приближенный результат работы [1]

$$D_\infty = D + D_\eta \frac{\pi^2 E^2}{2L^2} . \qquad (6)$$

получается лишь при условии m<<1, а эффективный коэффициент диффузии, в отличие от (4), возрастает с увеличением D_η (m>>1) медленнее линейного закона

$$D_\infty \approx \frac{D_\eta}{\ln^2 D_\eta} .$$

Заметим также, что согласно (4)-(6), положительная добавка к коэффициенту свободной диффузии D определяется не высотой потенциального профиля E, а его крутизной E/L. Результаты работы, подтвердившие явление ускорения диффузии путем быстрой стохастической модуляции поля с заданным пространственным периодом, могут представлять интерес для современных диффузионных технологий изготовления устройств полупроводниковой электроники.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 00-15-96620 и 02-02-17517), INTAS (грант 01-0450) и НП “Университеты России” (грант УР.01.008).

[1] Малахов А.Н. //Письма в ЖТФ. 1998. Т.24, №21. С.9.
[2] Weaver D.L. //Physica A. 1979. V.98. P.359.

ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА ОБНАРУЖЕНИЯ / РАЗЛИЧЕНИЯ БИСПЕКТРАЛЬНО ОРГАНИЗОВАННЫХ ТРИПЛЕТОВ

А.Т.Гаврилин

Нижегородский госуниверситет

Как известно, существенным препятствием к использованию когерентного приема в реальных каналах связи со случайно изменяющимися параметрами является необходимость точного знания начальной фазы ожидаемых сигналов (или нулевой опорной фазы). С целью сохранения преимуществ когерентного приема в каналах со стационарными замираниями и доплероовским рассеянием в [1] в качестве переносчика сообщения предложен биспектрально организованный триплет (*бот)*. Бот представляет собой сумму трех попарно независимых (но зависимых в совокупности) квазидетерминированных гармонических сигналов

$$s(t) = \sum_{i=1}^{3} A_i \cos\,(\omega_i t + \varphi_i). \qquad (1)$$

В (1) φ_1, φ_2, φ_3 – равномерно распределенные на $[0,2\pi]$ случайные фазы, такие что $\varphi_1 + \varphi_2 - \phi_3 = \psi = \mathrm{const}$; $\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = 0$. Бот обладает тем замечательным свойством, что его биспектр сосредоточен в одной точке (ω_1,ω_2) 45^0-го сектора биспектральной плоскости, причем это свойство сохраняется при стационарных линейных преобразованиях бота, а при масштабных преобразованиях оси времени упомянутая точка перемещается по лучу с угловым коэффициентом $k = \omega_2 / \omega_1$. В настоящем сообщении доказывается, что при поэлементном приеме дискретных сообщений с известным тактовым интервалом полученная по методу моментов [2] оценка биспектра аддитивной смеси бота и нормального шума в точке (ω_1,ω_j) практически совпадает с достаточной статистикой [2] для оценки двузначного параметра $\vartheta = \{0,1\}$, закодированного в амплитуде высшей гармоники бота или его бифазе ψ.

Именно: пусть наблюдению в течение интервала времени $[0,T]$ доступна реализация аддитивной смеси

$$x(t,\vartheta) = s(t,\vartheta) + n(t),$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум с двусторонней спектральной плотностью N_0, $s(t,\vartheta)$ – один из нижеприведенных вариантов бота, нагруженного сообщением ϑ:

$$s(t,\vartheta) = \vartheta\ A_3 \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2) + \sum_{i=1}^{2} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i);$$

$$s(t,\vartheta) = A_3 \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2 + \vartheta\pi) + \sum_{i=1}^{2} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i).$$

При этих предположениях, согласно оценочно-корреляционному принципу [3], функционал отношения правдоподобия параметра ϑ записывается в виде

$$L(\vartheta) = \exp\left\{ \frac{1}{N_0} \int_0^T (\hat{s}_1(t) - \hat{s}_0(t)) x(t)\, dt - \frac{1}{2N_0} \int_0^T (\hat{s}_1{}^2(t) - \hat{s}_0{}^2(t)) dt \right\},$$

где $\hat{s}_k(t) = \langle s(t,\vartheta) | x_0^t,\ \vartheta = k \rangle$, ($k$=0,1) – условные математические ожидания сигнала, и первый интеграл под знаком экспоненты понимается в смысле Ито [3].

При $T >> |\omega_i - \omega_j|^{-1}$, $i \neq j$, оптимальная оценка бота на фоне белого шума распадается в сумму аналогичных оценок составляющих его гармоник. Ясно, что при этом оценки неинформативных компонент бота для ϑ=0 и ϑ=1 совпадают:

$$\left\langle \begin{matrix} \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i \end{matrix} \middle| x_0^t \right\rangle = \left(\frac{N_0}{A_i} + \frac{A_i t}{2} \right)^{-1} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos\omega_i u \\ -\sin\omega_i u \end{pmatrix} x(u) du + O\left(\frac{1}{\omega_i t} \right), \quad (i = 1,2).$$

В любом из рассматриваемых случаев достаточной статистикой для оценивания параметра ϑ оказывается корреляционный интеграл

$$\int_0^T x(t) \left\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2) \middle| x_0^t \right\rangle dt \,. \qquad (2)$$

Поскольку в режиме высокой апостериорной точности

$$\left\langle \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \middle| x_0^t \right\rangle \approx \left\langle \sin\varphi_1 \middle| x_0^t \right\rangle \left\langle \cos\varphi_2 \middle| x_0^t \right\rangle + \left\langle \sin\varphi_2 \middle| x_0^t \right\rangle \left\langle \cos\varphi_1 \middle| x_0^t \right\rangle,$$

$$\left\langle \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \middle| x_0^t \right\rangle \approx \left\langle \cos\varphi_1 \middle| x_0^t \right\rangle \left\langle \cos\varphi_2 \middle| x_0^t \right\rangle - \left\langle \sin\varphi_1 \middle| x_0^t \right\rangle \left\langle \sin\varphi_2 \middle| x_0^t \right\rangle,$$

то квазиоптимальный приемник, согласно (2), оказывается приемником третьего порядка, отличаясь в принципиальном плане от биспектроанализатора тем, что опорными сигналами в нем выступают ФМ колебания со случайными законами модуляции (квазикогерентный прием).

Можно показать, что при наличии мультипликативных искажений в боте, вызванных федингующим каналом, рассматриваемая процедура сохраняет свою структуру. Модификация состоит лишь в размытии эффективного “биспектрального окна”, степень которого определяется глубиной и селективностью замираний.

Работа поддержана грантом НП «Университеты России» (УР. 01. 008).

[1] Бочков Г.Н., Горохов К.В., Марков Г.А. //Бюллетень “Изобретения в России”, 27.11.1997. №33.
[2] Крамер Г. Математические методы статистики. –М.: Мир, 1975, 642с.
[3] Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. – М.: Сов. радио, 1978, 320с.

ИССЛЕДОВАНИЕ АТМОСФЕРНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ДИАПАЗОНЕ 110-200 ГГЦ

М.А.Кошелев, А.Ф.Крупнов, М.Ю.Третьяков, В.В.Паршин, В.Н.Шанин, С.Е.Мясникова, В.В.Доровских

Институт прикладной физики РАН

Диапазон частот 110-200 ГГц играет важную роль в различных областях науки и техники. Так, спектральные линии поглощения кислорода на 118 ГГц и водяного пара на 183 ГГц представляют большой интерес для метеорологии при дистанционном зондировании атмосферы с бортов летательных аппаратов и искусственных спутников Земли. Знание параметров линий важно для построения модели поглощения в атмосфере. Поэтому целью данной работы является исследование атмосферного поглощения в диапазоне 110-200 ГГц, получение параметров атмосферных линий поглощения (форм-фактора, ширины, параметров уширения различными компонентами атмосферы).

Для исследования поглощения в реальной атмосфере использовался резонаторный спектрометр диапазона 40-200 ГГц с быстрым прецизионным управлением частотой излучения, блок-схема и принцип работы которого описан в [1].

Методами микроволновой резонаторной спектроскопии была получена запись спектра поглощения в широком диапазоне частот от 110 до 200 ГГц (рис.1).

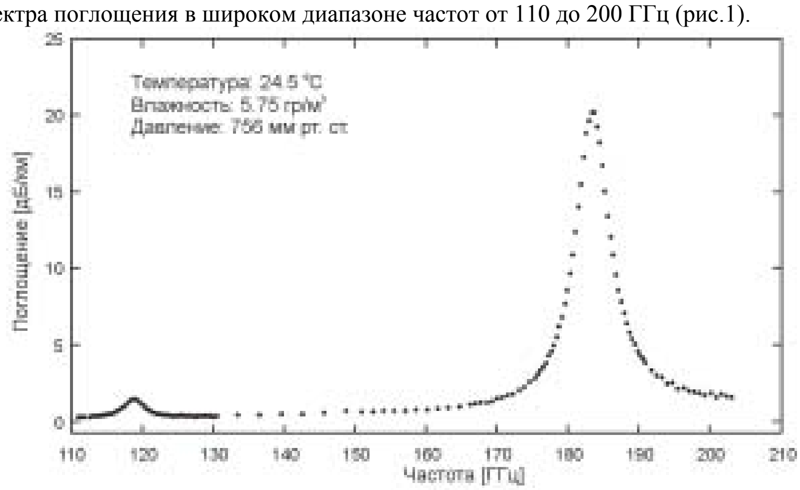


Рис.1.

Обе линии исследовались отдельно. Для определения параметров линии экспериментальные данные обрабатывались формой Ван Влека – Вайскопфа, откуда извлекались центральная частота и ширина линии. На рис.2 показана обработанная формой Ван Влека – Вайскопфа (сплошная линия) экспериментальная запись линии поглощения водяного пара (точки). Внизу показано отличие эксперимента от теоретической модели.

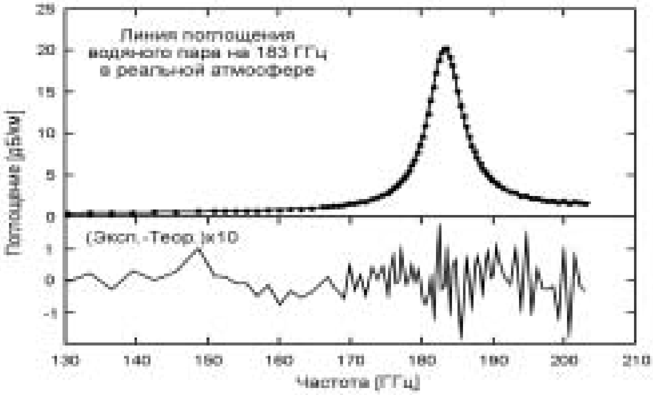


Рис.2.

Аналогичные расчеты были проделаны для атмосферной линии кислорода на 118 ГГц (рис.3).

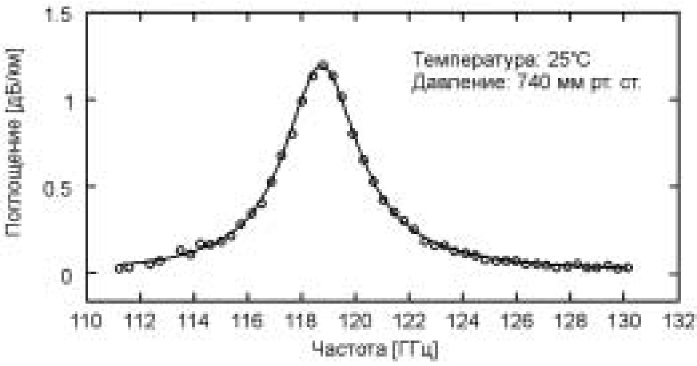


Рис.3.

В результате проделанной работы были определены параметры уширения сухим воздухом и сдвига центра линии давлением воздуха для линий водяного пара на 183 ГГц и кислорода на 118 ГГц.

Работа поддержана грантами РФФИ №02-02-06351 и №00-02-16604 и контрактом Министерства промышленности, науки и технологий РФ №40.020.1.1.1160.

[1] Krupnov A.F., Tretyakov M.Yu., Parshin V.V., Shanin V.N. and Myasnikova S.E. //Journal of Molecular Spectroscopy. 2000. V.202, №1. P.110.

“РЕЗОНАНСНОЕ” ПОВЕДЕНИЕ ВРЕМЕНИ УСТАНОВЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИМЕСИ В СРЕДЕ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ

А.А.Дубков, Е.Л.Панкратов

Нижегородский госуниверситет

Работа посвящена анализу зависимости времени установления стационарного распределения примеси от пространственно-временного закона изменения коэффициента диффузии среды. Интерес к проблеме вызван неизученностью параметрических эффектов диффузии в полупроводниковых приборах. Рассмотрим одномерную среду с отражающими границами $x=0$ и $x=L$ и слабо меняющимся в пространстве и времени коэффициентом диффузии: $D=D(x,t)$. Пусть в начальный момент в среду инжектируется примесь единичной массы с распределением концентрации $f(x)$. С течением времени примесь равномерно заполнит среду. Найдём время установления концентрации примеси с целью его минимизации при известной структуре неоднородности среды и заданном законе модуляции коэффициента диффузии.

Время установления примеси определим с помощью асимптотически оптимального критерия в виде равновеликого по площади прямоугольника [1]

$$\Theta(x)=\left[f(x)-1/L\right]^{-1}\int\limits_0^\infty\left[C(x,t)-1/L\right]dt\,, \tag{1}$$

где концентрация примеси $C(x,t)$ удовлетворяет уравнению диффузии

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(x,t)\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}\right]. \tag{2}$$

Представим коэффициент диффузии в виде $D(x,t)=D_0(1+\gamma\, h(x)w(t))$, где D_0 – его среднее значение, $0\le\gamma<<1$, $|h(x)|\le 1$, $|w(t)|\le 1$. Условие малости изменения $D(x,t)$ позволяет применить метод малого параметра [2] и искать решение уравнения (2) в виде степенного ряда по γ: $C(x,t)=C_0(x,t)+\gamma C_1(x,t)+\gamma^2 C_2(x,t)+\ldots$ В силу линейности оценки (1) по функции $C(x,t)$ время установления приобретает форму аналогичного ряда: $\Theta(x)=\Theta_0(x)[1+\gamma\tau_1(x)+\gamma^2\tau_2(x)+\ldots]$. Ограничимся далее линейным по параметру γ приближением для времени установления и рассмотрим случай, когда примесь впрыскивается на одном конце среды $f(x)=\delta(x)$, а время установления концентрации вычисляется на противоположном её конце. В этом случае нулевое приближение определяется соотношением: $\Theta_0(L)=L^2/6D_0$, а первая поправка равна

$$\tau_1(L)=6D_0L^{-2}\cdot\left[\int\limits_0^L v h(v)\frac{\partial}{\partial v}\int\limits_0^\infty w(t)C_0(v,t)dtdv\right]. \tag{3}$$

В настоящее время наибольший практический интерес представляют плоскослоистые среды, коэффициент диффузии которых удобно аппроксимировать функциями Уолша $wal(k,x)$. С ростом порядка функции Уолша поправка $\tau_1(L)$ монотонно спадает по абсолютной величине [2]. По этой причине ограничимся аппроксимацией $h(x)$ функциями Уолша первого и второго порядков, которые равны $wal(1,x)=\mathrm{sign}(L/2-x)$ и $wal(2,x)=\mathrm{sign}(L/2-x)\mathrm{sign}(x-3L/4)$. Временную модуляцию коэффициента диффузии зададим функцией $w(t)=\cos(\omega t+\varphi)$. Зависимость поправки $\tau_1(L)$ от ω является немонотонной, она изображена на рис.1 и рис.2, соответственно, для функций $wal(1,x)$ и $wal(2,x)$. Графики приведены для различных значений начальной фазы φ: $\varphi=0$ (сплошная линия) и $\varphi=-\pi/2$ (пунктирная линия).

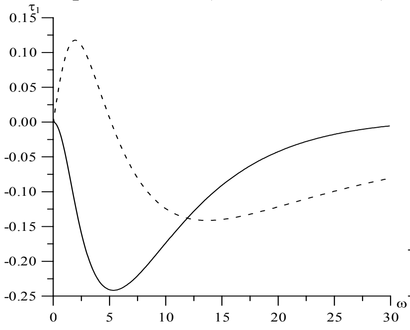


Рис.1

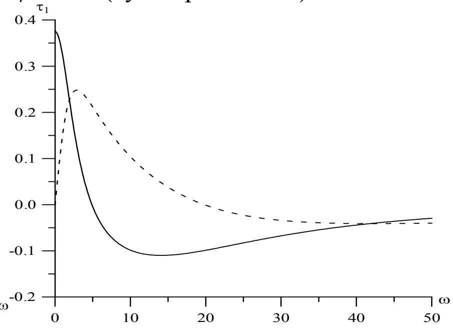


Рис.2

Как видно из рисунков, зависимость поправки $\tau_1(L)$ от ω при законе модуляции $w(t)=\cos(\omega t)$ имеет явно выраженный экстремум (область низких частот неинтересна для анализа) и сходство с резонансной кривой. При модуляции $w(t)=\sin\omega\, t$ поправка $\tau_1(L)$ имеет двугорбую зависимость от ω. Таким образом, скорость установления примеси зависит от начальной фазы функции *w(t)*. Интересной особенностью зависимости $\tau_1(L)$ от частоты является рост значений частот, соответствующих её экстремумам и нулям с ростом D_0 и уменьшением L. Выбор начальной фазы из соотношения $\varphi_0(L,\omega)=\pi n-\mathrm{arctg}[\tau_{1\sin}(L)/\tau_{1\cos}(L)]$ ($\tau_{1\sin}(L)$ и $\tau_{1\cos}(L)$ – поправки при законах модуляции $w(t)=\sin(\omega t)$ и $w(t)=\cos(\omega t)$) и пространственной структуры среды в виде функции $wal(2,x)$ позволяет максимально ускорить процесс диффузии примеси. Зависимость поправки $\tau_1(L)$ от ω, φ и k можно объяснить с помощью анализа динамики потока примеси. При правильном подборе частоты и начальной фазы закона $w(t)$ ускорение диффузии примеси может достигать *~5%* по сравнению со случаем, соответствующим однородной среде с коэффициентом диффузии D_0. С ростом параметра γ величина ускорения растёт медленнее величины замедления.

Данная работа поддержана грантами РФФИ 02-02-17517 и INTAS 01-0450.

[1] Малахов А.Н., Панкратов Е.Л. //Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т.44. С.367.
[2] Мальцев А.А., Панкратов Е.Л. // Труды (пятой) научной конференции по радиофизике / ред. А.В. Якимов. –Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2001, с.211.

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОГО ТРУБОПРОВОДА ПРИ ПРОТЕКАНИИ ЧЕРЕЗ НЕГО ПОТОКА ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

С.Г.Уткин[1), Е.Е.Лисенкова[2)]

[1)]*Нижегородский госуниверситет,* [2)]*Нф ИМАШ РАН*

Весьма широкое распространение в различных областях промышленности имеют трубопроводы, предназначенные для перекачки жидкости и газа. В процессе прокладки трубопровода возможны несоблюдения прямолинейности укладки. Так, например, на стыке двух отрезков трубы при их соединении может возникнуть поперечное смещение, или же два отрезка трубы могут оказаться закреплены под ненулевым углом. А это может привести к возникновению нежелательных колебаний и даже к разрушению конструкции.

В связи с этим исследовалось динамическое поведение ограниченного трубопровода длины l с постоянным смещением U_o на границе, лежащего на вязкоупругом основании, при протекании по нему идеальной несжимаемой жидкости со скоростью V.

Поскольку трубопровод является системой "труба + текущая жидкость", то плотность его функции Лагранжа является суперпозицией лагранжианов трубы и жидкости. Для изгибных колебаний при выводе плотности функции Лагранжа, будем сохранять названия соответствующих моделей изгибных колебаний для балок [1]. Запишем лагранжиан для трубопровода Бернулли-Эйлера.

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{\rho_o V^2 + \rho_o (U_t + VU_x)^2 + \rho U_t^2 - IEU_{xx}^2 - NU_x^2 - h_o U^2\right\}.$$

Поперечные смещение $U(x,t)$ описываются решениями уравнения:

$$\alpha^2 \cdot u_{\xi\xi\xi\xi} + u_{\tau\tau} + 2mv \cdot u_{\xi\tau} + (mv^2 - 1)\cdot u_{\xi\xi} + 2\mu \cdot u_\tau + u = 0\,, \qquad (1)$$

удовлетворяющими краевым условиям:

$$u(0,\tau)=u_o,\ u(l,\tau)=u_\xi\,(0,\tau)=u_\xi\,(l,\tau)=0, \qquad (2)$$

где ξ, τ, u – безразмерные продольные координаты, время и поперечное смещение, соответственно, m, δ, h – коэффициенты, характеризующие инерционные, вязкие и упругие свойства системы, $c^2=N/(\rho+\rho_o)$, c – скорость распространения поперечных волн, N – натяжение шланга, IE – изгибная жесткость, $\alpha^2=IE\cdot h/N^2$.

$$\mu = \frac{\delta}{\sqrt{h(\rho+\rho_o)}}\,,\ \ v_{os} = \sqrt{\frac{1-2\alpha}{m}}\,,\ \ v_{un} = \sqrt{\frac{1+2\alpha}{m}}\,.$$

Исследуя уравнение, можно найти критические значения скоростей жидкости, при переходе через которые качественно изменяется поведение системы. При скоростях ниже v_{os} амплитуда прогиба трубопровода экспоненциально спадает при удалении от источника; с увеличением скорости до значения v_{un} в системе возникают колебания со спадающей по экспоненте амплитудой; а при скоростях, выше v_{un}, трубопровод теряет устойчивость.

Зависимости критических значений скорости от параметра α имеют следующий вид (рис.1). Кривые $v=v_{os}$ и $v=v_{un}$ разбивают плоскость параметров на три области: в I и II система устойчива, а в III – устойчивость теряется.

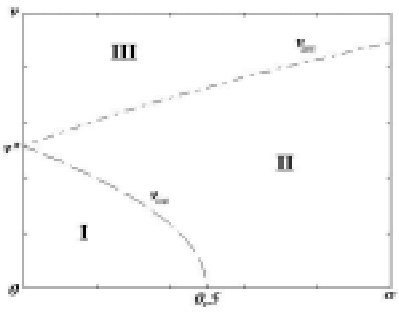


Рис.1

Для случаев источника нулевой частоты и смещения границы трубопровода под некоторым углом найдено точное решение краевой задачи (1,2).

Заметим, что знаменатель амплитуды поперечных смещений может обращаться в ноль. На рис.2а и 2б приведены его зависимости для значений параметра α меньших и больших ½, соответственно.

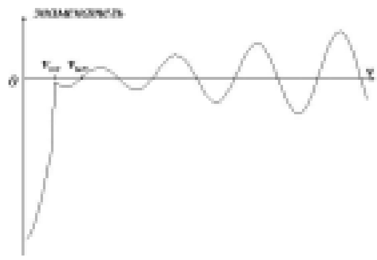


Рис.2а

Рис.2б

До скорости $v=v_{un}$ знаменатель не обращается в ноль, при превышении этого значения он зануляется периодически, этот факт подтверждает найденное значение границы области неустойчивости. С увеличением длины отрезка трубопровода картина "сжимается" вдоль оси абсцисс, периодичность возникновения резонансных колебаний уменьшается. Уменьшение параметра α, отвечающего за изгибную жесткость (приближение к модели шланга), приводит к тому же эффекту.

Работа поддержана РФФИ (00-02-16167, 00-15-96619).

[1] Весницкий А.И., Крысов С.В., Уткин Г.А. Постановка краевых задач динамики упругих систем исходя из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского –Горький: ГГУ, 1983, 65с.
[2] Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. –М.: Машиностроение, 1982.
[3] Весницкий А.И., Лисенкова Е.Е., Уткин Г.А. Волновые процессы в одномерных механических системах с движущимися вдоль них объектами. –Н.Новгород: ННГУ, 1998, 75с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПРИМЕСИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ

А.И.Саичев, С.А.Лапинова

Нижегородский госуниверситет

Целью данной работы является вывод соотношения между продольным и поперечным коэффициентами диффузии примеси, распространяющейся в турбулентной среде под воздействием стационарной силы, а также исследование зависимости поведения коэффициентов диффузии от ε – отношения времени корреляции к инерционности частицы. Задачи такого рода встречаются, например, при изучении поведения пылевых скоплений или водных капель в атмосфере [1,2]. Будем считать, что радиус рассматриваемых частиц позволяет пренебречь броуновским движением, и достаточно мал, чтобы влияние формы примеси на характер ее движения было незначительно. Уравнение движения отдельной частицы примеси следующее:

$$d\boldsymbol{X}/dt=\boldsymbol{V},\ d\boldsymbol{V}/dt+\lambda\boldsymbol{V}=\lambda\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)+\boldsymbol{g}. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{X}(t)$, $\boldsymbol{V}(t)$–ее координаты и скорость, λ –коэффициент, характеризующий инерционность и учитывающий вязкость окружающей среды, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$ –скорость среды. Анализ (1) дает диффузионное уравнение вида:

$$\partial f/\partial t+\boldsymbol{\omega}_\perp\nabla_\perp f=\lambda\nabla_{\omega\perp}\boldsymbol{\omega}_\perp f+\lambda\,\partial(\omega f)/\partial\omega+\lambda\sigma_\perp^2(\boldsymbol{\omega})\nabla^2{}_{\omega\perp}f+\lambda\sigma_\|^2\partial^2 f/\partial\omega^2$$

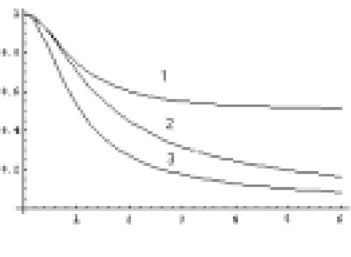
$$+[\lambda D_\perp-\sigma^2{}_\perp](\nabla_{\omega\perp}\nabla_y)f+[\lambda D_{||}-\sigma^2{}_\|]\partial^2 f/\partial\omega\partial y,$$

где f – плотность вероятности распределения примеси, $\boldsymbol{\omega}_\perp$ и ω – отклонения от установившейся скорости равномерного падения в вязкой среде в поперечном и продольном направлениях, соответственно, а также введены следующие величины:

$$\sigma_\|^2=\lambda\int G(v\tau,\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau,\ \sigma^2{}_\perp=\lambda\int F(v\tau,\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau,$$
$$D_\|=\lambda\int G(v\tau,\tau)d\tau,\ D_\perp=\lambda\int F(v\tau,\tau)e^{-\lambda\tau}\,d\tau.$$

Здесь $D_\|$ и $D_\perp$ – коэффициенты продольной и поперечной диффузии, $G(v\tau,\tau)$, $F(v\tau,\tau)$ –продольная и поперечная компоненты тензора корреляции статистически изотропного поля скорости среды [3], v –установившаяся скорость равномерного падения, τ –временной интервал до t –текущего. Исследование зависимости поперечного и продольного коэффициентов диффузии от $\varepsilon=\lambda\tau_u$ показало, что в случае гауссовой продольной функции корреляции

$$G(s,\ \tau)=\sigma_u^2 exp(-s^2/l_u^2-\tau^2/\tau_u^2)$$



с увеличением ε их отношение асимптотически стремится к ½. На рисунке представлены следующие графики: 1 – отношение поперечного коэффициента диффузии к продольному в зависимости от ε, 2-ой график продольного коэффициента диффузии, 3-й график зависимости поперечного коэффициента диффузии от ε.

Данная работа поддержана грантами РФФИ № 00-02-16167, № 00-15-96619.

[1] Csanady G.T. // J.Atmos.Sci. 1963. V.2**0.** P.201.
[2] Maxey M.R. // J.Fluid Mech. 1987. V.174. P.441.
[3] Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. // Введение в статистическую радиофизику. Т.II –М.: Наука, 1978, с.48.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

О.Н.Репин, А.И.Саичев

Нижегородский госуниверситет

В работе рассматривается один из вариантов построения субдиффузионного процесса с помощью винеровского процесса со случайной заменой времени.

Пусть $W(t)$ – винеровский процесс, для которого одномерная плотность распределения $w(x,t)$ описывается уравнением диффузии

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} . \tag{1}$$

Рассмотрим случай процесс вида $X(t) = W(\tau(t))$, полученный из винеровского процесса случайной заменой времени, предполагая $W(t)$ и $\tau(t)$ статистически независимыми. Используя уравнение в дробных производных для субдиффузионного процесса [1]

$$\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\delta(x) ., \tag{2}$$

где $0<\alpha<1$, $f(x,t)$ – одномерная плотность процесса $X(t)$, найдем условия на плотность распределения $Q(\tau,t)$ случайного времени, при которой одномерная плотность процесса $X(t)$ удовлетворяют уравнению (2). По формуле полной вероятности

$$f(x,t) = \int_0^\infty w(x,\tau)Q(\tau,t)d\tau . \tag{3}$$

Используя характеристическую функцию винеровского процесса, запишем представление характеристической функции $\theta(z,t)$ процесса $X(t)$

$$\theta(z,t) = \int_0^\infty e^{-z^2\tau}Q(\tau,t)d\tau . \tag{4}$$

Обозначив через $\varphi(s,t)$ Лаплас-образ плотности $Q(\tau,t)$ и используя (4), получим:

$$\theta(z,t) = \varphi(z^2,t) . \tag{5}$$

Применив преобразование Фурье к уравнению (2), получим уравнение для характеристической функции процесса $X(t)$ в виде:

$$\frac{\partial^{\alpha}\theta(z,t)}{\partial t^{\alpha}} = -z^2\theta(z,t) + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что решение уравнения (6) представимо в виде

$$\theta(z,t) = \mathrm{E}_{\alpha}(-z^2 t^{\alpha}), \tag{7}$$

где $\mathrm{E}_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma(1+\alpha n)}$ – функция Миттага-Лефлера [2]. Используя соотношение (5), получаем представление Лаплас-образа плотности распределения случайного времени через функцию Миттага-Лефлера в виде

$$\varphi(s,t) = \mathrm{E}_{\alpha}(-st^{\alpha}).$$

[1] Saichev A.I., Zaslavsky G.M. //Chaos. V.7. №.4. P.753.
[2] Бейтман Г., Эрдейи В. Высшие трансцендентные функции. Т.3. –М.: Наука, 1967.

БАЛКА ТИМОШЕНКО, СВЯЗАННАЯ С ВЯЗКО-УПРУГИМ СЛОЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫМИ ШПАЛАМИ, КАК МОДЕЛЬ РЕЛЬСОВОГО ПУТИ

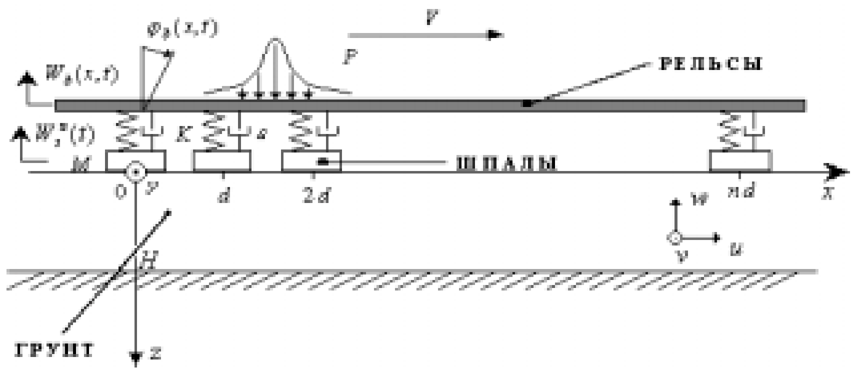
А.В.Вострухов, Р.А.Назаров

Нижегородский госуниверситет

Моделируется железнодорожный путь на трехмерном основании с учетом влияния на поезд волновых процессов, порождаемых в грунте движением поезда. Рассматривается балка Тимошенко, положенная на ряд периодически расположенных опор, лежащих на вязко-упругом слое. Опоры, моделирующие шпалы, описываются набором масс M, расположенных на расстоянии d друг от друга. Контакт рельс и шпал моделируется пружинами жесткости K_p и демпфером ε_p, описывающим вязкие потери в прокладке между рельсами и шпалами. Грунт моделируется вязко-упругим слоем конечной толщины H. Плотность слоя ρ. По балке со скоростью V движется гармоническая нагрузка P_0, распределенная по координате x согласно закону Гаусса.

Уравнения движения для слоя:

$$\hat{\mu}\Delta\vec{u} + \left(\hat{\lambda} + \hat{\mu}\right)\nabla\left(\nabla\vec{u}\right) = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}. \tag{1}$$



Граничные условия на верхней и нижней поверхностях слоя:

$$
\sigma_{zz}(x,y,0,t) = -\frac{H\left(a-|y|\right)}{4ab}\times
$$

$$
\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[M\frac{\partial^2 W_s^n}{\partial t^2}+\varepsilon_p\frac{\partial}{\partial t}\left(w\left(nd,0,0,t\right)-W_b\right)+K_p\left(w\left(nd,0,0,t\right)-W_b\right)\right]H\left(b-|x-nd|\right), \quad (2)
$$

$$
\tau_{xz}\left(x,y,0,t\right)=0, \quad \tau_{yz}\left(x,y,0,t\right)=0, \quad \vec{u}\left(x,y,H,t\right)=0.
$$

Условие безотрывности контакта шпал и слоя:

$$
W_s^n\left(t\right)=w(nd,0,0,t). \quad (3)
$$

Уравнения для балки:

$$
\begin{gathered}
\rho_0 F W_{b_{tt}}+\gamma_1 W_{b_t}-\varpi GF\left(W_{b_{xx}}-\varphi_{b_x}\right)=-\frac{P_0}{V}\exp\left(-\frac{\left(x-Vt\right)^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(i\Omega t\right),\\
\rho_0 J\varphi_{b_{tt}}+\gamma_2\varphi_{b_t}+\varpi GF\left(\varphi_b-W_{b_x}\right)-EJ\varphi_{b_{xx}}=0.
\end{gathered} \quad (4)
$$

Граничные условия в точках контакта балки и шпал:

$$
\begin{gathered}
\left[W_b\right]_{x=nd}=\left[\varphi_b\right]_{x=nd}=\left[\varphi_{b_x}\right]_{x=nd}=0,\\
\varpi GF\left[W_{b_x}\right]_{x=nd}=-\left(K_p-\varepsilon_p\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(W_b\left(nd,t\right)-W_s^n\left(t\right)\right),
\end{gathered} \quad (5)
$$

где **u**$=\{u,v,w\}$ – вектор смещений слоя; W_b – смещение средней линии балки; φ_b – угловой сдвиг сечения балки; $W^n{}_s$ – смещение шпалы номер n; λ, μ – операторы Фойхта; σ_{zz}, τ_{xz}, τ_{yz} – компоненты тензора напряжений; $H(\ldots)$ – функция Хевисайда; a, b – длина и ширина основания шпалы; M – масса шпалы; ρ_0 – плотность балки; F – площадь ее сечения; J – момент сечения на поворот; γ_1, γ_2 – описывают затухание в балке; ώ – коэффициент Тимошенко; E, G – модуль Юнга и модуль сдвига материала балки; P_0 – величина нагрузки; Ω – частота нагрузки. Квадратные скобки в формуле (5) означают разницу величины, стоящей в скобках, от значений справа и слева от координаты $x=nd$.

Отклик балки на вязко-упругом основании на действие гармонической равномерно движущейся нагрузки

Задача решается с помощью Фурье-преобразования по времени и пространственным координатам. Показывается, что система уравнений (1)-(3) может быть сведена к дисперсионному соотношению:

$$\left(-M\omega^2 + K_p - i\omega\varepsilon_p + \chi_{l-s}\right)C - C_0\left(K_p - i\omega\varepsilon_p\right) = 0. \qquad (6)$$

Здесь $\chi_{l\text{-}s}$ – эквивалентная динамическая жесткость слоя по отношению к шпалам [1]. Это переменная по частоте комплекснозначная функция.

Получено аналитическое решение задачи об отклике балки в частотной области. Установившийся отклик во временной области находится численным обратным преобразованием Фурье.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 00-01-00344).

[1] Metrikine A.V. and Popp K.// European Journal of Mechanics A/Solids. 1999. V.18, № 4. P.679.

АНАЛИЗ СОЛНЕЧНОГО И ЛАБОРАТОРНОГО СПЕКТРОВ МОЛЕКУЛЫ ВОДЫ В ДИАПАЗОНЕ 4878-7552 см$^{-1}$

С.В.Ширин, Н.Ф.Зобов, О.Л.Полянский

Институт прикладной физики РАН

Молекула воды – одна из наиболее жизненно важных молекул, и знание ее физических характеристик необходимо для понимания многих природных процессов и явлений. Точная интерпретация инфракрасного спектра горячей воды является одной из важнейших проблем молекулярной спектроскопии.

Молекула воды обнаружена в пятнах на Солнце. Идентификация линий воды в солнечных пятнах позволила идентифицировать линии молекулы воды в атмосферах, богатых кислородом, холодных звезд, таких как Бетельгейз и Антарес. В некоторых звездах, таких как коричневые карлики, вода является наиболее часто встречающейся молекулой после водорода. В нашей Солнечной системе вода обнаружена на Венере, Марсе, лунах гигантских планет и объектах пояса Куипера. В атмосфере Земли водяной пар играет ключевую роль в поглощении солнечного излучения в инфракрасном, оптическом и ближнем ультрафиолетовом диапазонах, оказывая существенное влияние на радиационный баланс Земли и, следовательно, на климатические процессы.

Целью данной работы был анализ спектра поглощения в солнечном пятне H-(5540-6997 см$^{-1}$) окна прозрачности атмосферы и лабораторного спектра излучения молекулы воды в диапазоне 4878-7552 см$^{-1}$. Спектр поглощения в солнечном пятне был получен L. Wallace & W.C.Livigston [1] на McMath-Pierce телескопе в Национальной обсерватории Kitt Peak (Аризона), и содержит в исследуемом диапазоне порядка 3500 линий. Лабораторный спектр излучения воды был получен на Фурье спектрометре высокого разрешения Bruker IFS 120 HR в университете города Ватерлоо (Канада). В указанном диапазоне экспериментально измерены частоты 7395 линий молекулы воды [2,3].

Идентификация спектров проводилась с применением созданной нами автоматизированной методики идентификации, реализованной в виде независимых, но согласованных по входным и выходным информационным потокам программ [4]. Она осуществлялась в несколько этапов. Первым этапом явилась прямая идентификация, т.е. идентификация с использованием уже известных уровней энергии. Дальнейшая идентификация проводилась с помощью комбинационных разностей. Если переходы осуществляются с двух разных нижних уровней на один верхний, то разница между частотами переходов равна разности энергий между нижними уровнями. Экспериментальным частотам с такой разностью приписывались идентификации теоретических линий. Если этим способом идентификация не удавалась, то проводилось сравнение с расчетным списком линий: разницы между теоретической и экспериментальной энергией уровней с близкими квантовыми числами должны быть примерно одинаковыми. Идентификация производилась по совпадению разности теоретической и экспериментальной энергии анализируемого уровня с определенными ранее.

полоса	N_{sun}	N_{lab}
011-000	169	879
200-000	24	318
101-000	80	540
111-010	36	315
012-010	142	661
031-010	30	262
031-020	46	389
041-020	27	117
201-100	26	170
012-001	15	273
300-001	11	85
041-030	11	193
051-030	15	15

Результатом данной работы явилось:

1) идентификация горячего (3300^{o}К) инфракрасного спектра поглощения солнечного пятна в диапазоне Н-полосы. Было идентифицировано 682 линии и определено 136 новых энергетических уровней молекулы воды;

2) идентификация лабораторного инфракрасного спектра излучения молекулы воды в диапазоне 4878-7552 см$^{-1}$. Было идентифицировано 5589 из 7395 измеренных линий.

Количество идентифицированных линий в солнечном (N_{sun}) и лабораторном (N_{lab}) спектрах, по основным полосам, приведено в таблице.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 02-02-06343, 00-02-16604).

[1] Wallace L., Livingston W. //ApJS. 1996. V.106. P.165.
[2] Bernath P.F. //Chem. Soc. Rev. 1996. V.25. P.111.
[3] Zobov N.F., Polyansky O.L., Tennyson J., Shirin S.V., Nassar R., Hirao T., Imajo T., Bernath P.F., Wallace L. //Astrophys. Journal. 2000. V.503. P.994.

[4] Ширин С.В., Зобов Н.Ф., Савин В.А., Полянский О.Л. //Известия вузов. Радиофизика. 2001. Т.44. № 11, С.953.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМАТИЧЕСКОГО РИСКА МЕЖДУНАРОДНЫХ БАНКОВСКИХ КРЕДИТОВ

Т.Н.Данилова, Е.В.Кошелев

Волго-Вятская Академия Государственной Службы

Долговой кризис наименее развитых стран (LDC) в 1970-х и 80-х годах продемонстрировал необходимость оценки странового риска международных банковских кредитов и, прежде всего, систематической его составляющей.

В финансовой теории систематический риск относится к недиверсифицируемому риску, который испытывают все инвесторы в отношении своего рискового имущества. При выдаче кредитов LDC-странам систематический риск заключается в вероятности дефолта или недоимок по рыночному портфелю долгов LDC. Они происходят по причине обычных или глобальных факторов, которым “систематически” подвергаются все нации-заемщики. Несистематический риск, напротив, составляет дополнительный риск дефолта или недоимок благодаря специфическим для стран факторам, воздействие которых испытывают все заимодавцы, чьи портфели займов LDC-стран отличаются от рыночного портфеля. Систематический риск обусловлен положительной корреляцией сходных экономических факторов в различных LDC-странах, которая влияет на вероятность недоимок в рыночном портфеле займов LDC, где каждая страна взвешивается соответственно ее доле в общей капитализации рынка. Несистематический риск возникает только в том случае, если отдельно взятый портфель отличается от рыночного портфеля.

В настоящей статье используется математическая модель для того, чтобы показать, как факторы систематического риска в силу их неполной корреляции между странами воздействуют на ожидаемую доходность долговых обязательств банку.

Рассмотрим банк, чьи пассивы полностью состоят из депозитов D, по которым применяется рыночная ставка d. Для простоты модели мы игнорируем резервы и банковский капитал. Банк имеет три инвестиционных направления: он может купить безрисковые ценные бумаги A и получить гарантированную доходность a; он может выдать кредиты LDC-стране 1 (L_1) и LDC-стране 2 (L_2). Контрактная ставка по всем кредитам LDC-стран определяется как r. Полученные доходности по кредитам для двух LDC-стран соответственно будут k_1 и k_2, и они опустятся ниже значения r, если по каждому заемщику будут недоимки.

Обозначим вероятность недоимок через p. Предполагаем, что для обеих LDC-стран эта вероятность будет зависеть от каждой отдельной непрерывной переменной x, которая воздействует на способность обеих стран-заемщиков уплатить долг. Эффект переменной x, заключающийся в воздействии на вероятность недоимок, специфичен для стран, и для простоты принимаем, что он не обусловлен экономической активностью каждой из стран, которая могла бы приниматься в рассмотрение. Например, x может уравнять мировые цены на нефть. Тогда $p_i=p_i(x)$, $i=1,2$, и ожидаемая доходность $M[k_i]$ по выдаваемым кредитам для каждой страны будет следующей:

$$M\left[k_i\right] = r\left(1 - p_i\left(x\right)\right),\ i=1,\ 2.$$

В этом случае уравнение для ожидаемой прибыли банка примет вид:

$$M\left[\pi\right] = aA + r\left(1 - p_1\left(x\right)\right)L_1 + r\left(1 - p_2\left(x\right)\right)L_2 - dD\ ,$$

оно подчиняется бюджетному требованию:

$$A + L_1 + L_2 = D\ .$$

Влияние эффекта dx будет выражаться уравнением

$$\frac{\partial M\left[\pi\right]}{\partial x} = \left[L_1 = const, L_2 = const\right] = -\frac{\partial p_1}{\partial x}L_1 - \frac{\partial p_2}{\partial x}L_2\ .$$

Производная от p_i по x имеет соответствующий знак; для импортера нефти, как, например, Перу, $(\partial p_i / \partial x) > 0$, в то время как для экспортера нефти, как, например, Мексика, $(\partial p_i / \partial x) < 0$. Если в последнем уравнении обе частные производные положительные, ожидаемая прибыль банка упадет; но степень сокращения прибыли здесь средняя взвешенная, которая зависит от банковских относительных L_1 и L_2. Если одна частная производная отрицательна, а другая положительна, как в случае Перу/Мексика, тогда ожидаемая прибыль может или упасть, или даже возрасти.

Систематические риски международного кредитования легко характеризуются в условиях рассмотренного примера. Предположим, что рыночный портфель состоит из вектора $L_m = L_1 + L_2$, такого, что $L_2 = nL_1$, и что вероятность недоимок для рыночного портфеля выражается через $p_m = p_m(x)$. Предположим затем, что рассматриваемый j-ый банк имеет портфель кредитов, выданных LDC-странам (L_1', L_2'), такой, что $L_2' \neq nL_1'$. Тогда эффект влияния dx на $M[\pi]$ будет выражаться уравнением

$$\frac{\partial M\left[\pi\right]}{\partial x} = \left[L_1 = const, L_2 = const\right] = -\frac{\partial p_m}{\partial x}L_1^j\left(1 + n\right) - \frac{\partial p_2}{\partial x}\left(L_2^j - nL_1^j\right)\ .$$

Тогда влияние x на банковскую вероятность будет тем больше, чем больше L_2' отличается от nL_1', и чем больше $\partial p_m / \partial x$ отличается от $\partial p_2 / \partial x$.

Первое слагаемое в правой части уравнения представляет собой банковский систематический риск, второе слагаемое – несистематический или специфический для страны риск.

[1] Dymski G., Solberg R. //In book: Country-Risk Analysis. /Edited by Ronald L.Solberg. -London and New York: Routledge, 1992, p.133.