

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

К.Г. Мишагин

СИНХРОНИЗАЦИЯ АТОМНЫХ ЧАСОВ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 03.03.03 «Радиофизика» и специальности 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы»

Нижегород
2016

УДК 537.86, 621.396
ББК В.236.352+236.355
М-71

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **О.В. Болховская**

М-71 Мишагин К.Г. СИНХРОНИЗАЦИЯ АТОМНЫХ ЧАСОВ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 26 с.

Рассматривается задача синтеза оптимальной системы автоподстройки фазы и частоты атомных часов с использованием метода линейно-квадратичного гауссовского управления и с применением фильтра Калмана. Даны базовые сведения о математических моделях и характеристиках шумов атомных часов.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов и аспирантов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 03.03.03 «Радиофизика» и специальности 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы». Пособие может быть использовано в качестве дополнительного материала для студентов радиофизического факультета, слушающих курс «Радиоавтоматика».

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии
радиофизического факультета ННГУ,
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 537.86, 621.396
ББК В.236.352+236.355

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2016

Содержание

Введение	4
1. Модель сигнала квантового генератора	6
2. Модель цифровой системы автоподстройки фазы и частоты генератора	7
3. Описание шумов генераторов.....	10
4. Фильтр Калмана для системы автоподстройки фазы и частоты.....	14
5. Выбор оптимальных значений параметров управления	16
6. Пример расчета параметров для системы синхронизации водородного мазера.....	17
7.1. Описание дифференциального метода сравнения шкал времени с использованием сигналов космических навигационных систем	18
7.2. Нестабильность частоты пассивного водородного стандарта	20
7.3. Замечание о выборе интервала времени управления.....	21
7. Результаты моделирования системы автоподстройки	23
Список литературы.....	25

Введение

Термин «синхронизация» широко используется в науке и технике и в зависимости от области употребления может иметь несколько отличное значение. В целом под синхронизацией понимается выработка единого ритма или периода колебаний у взаимодействующих систем, каждая из которых обладает своим собственным ритмом в отсутствие взаимодействия [1]. В физических системах данное явление обусловлено нелинейной динамикой, присущей взаимодействующим системам. В технике для обеспечения совпадения периодов колебаний относительно редко используется синхронизация, возникающая как физическое явление, обычно реализуется специальная система, которая может называться системой автоподстройки, автоматического регулирования или радиоавтоматики. Если система автоподстройки цифровая, то предполагается использование некоторого алгоритма синхронизации. Стоит отметить, что в технике зачастую под синхронизацией понимается не только совпадение периодов колебаний, но и совпадение фаз или совпадение моментов времени начала некоторых событий: синхронизация пакетов данных в сетях связи, синхронизация псевдослучайных последовательностей, символьная и тактовая синхронизация [2]. Еще одной важной особенностью технических систем синхронизации является то, что для их описания обычно достаточно применения линейной модели.

В данном пособии рассматривается синхронизация в технической системе: решается задача автоподстройки фазы и частоты атомных часов с использованием метода линейно-квадратичного гауссовского управления [3]. Описанная методика может быть применена и к другим генераторам. Атомные часы или квантовый стандарт частоты и времени представляет собой прецизионный генератор, состоящий, как правило, из высокостабильного кварцевого генератора, подстраиваемого относительно частоты квантового перехода. Выходными сигналами генератора являются высокочастотный синусоидальный сигнал частотой 5, 10 или 100 МГц и полученный из высокочастотного импульсный сигнал с частотой 1 Гц. Высокочастотный сигнал используется для передачи эталонной частоты, а импульсный сигнал для передачи шкалы времени (импульсный сигнал 1 Гц называют сигналом шкалы времени). Несмотря на то, что каждый стандарт частоты содержит в себе эталонный источник, которым является квантовый переход, частоты и фазы выходных сигналов стандартов, если и были в начальный момент времени сведены с высокой точностью, то со временем начинают расходиться настолько, что это не удовлетворяет приложениям, в которых используются эти сигналы. Не вдаваясь в подробности, можно лишь сказать, что данное расхождение связано с индивидуальными характеристиками, присущими отдельным стандартам, квантовые переходы одних и тех же атомов или ионов в разных стандартах имеют неидентичные сдвиги, которые оцениваются с помощью расчета, так называемого бюджета неопределенностей [4]. Особую роль играют внешние факторы, такие, как температура, влажность, магнитные

и электрические поля, гравитация и т.д., влияющие на изменение частоты и фазы стандартов, при этом каждый стандарт имеет собственную зависимость от внешних параметров (исключая гравитацию). Таким образом, даже расположенные близко в одних условиях стандарты будут отличаться по частоте, не говоря уже о стандартах, расположенных в разных точках планеты или на орбите Земли. Получается, что задача синхронизации является актуальной даже для атомных часов.

На рис. 1 представлена общая схема системы автоматической коррекции фазы и частоты сигнала атомных часов.

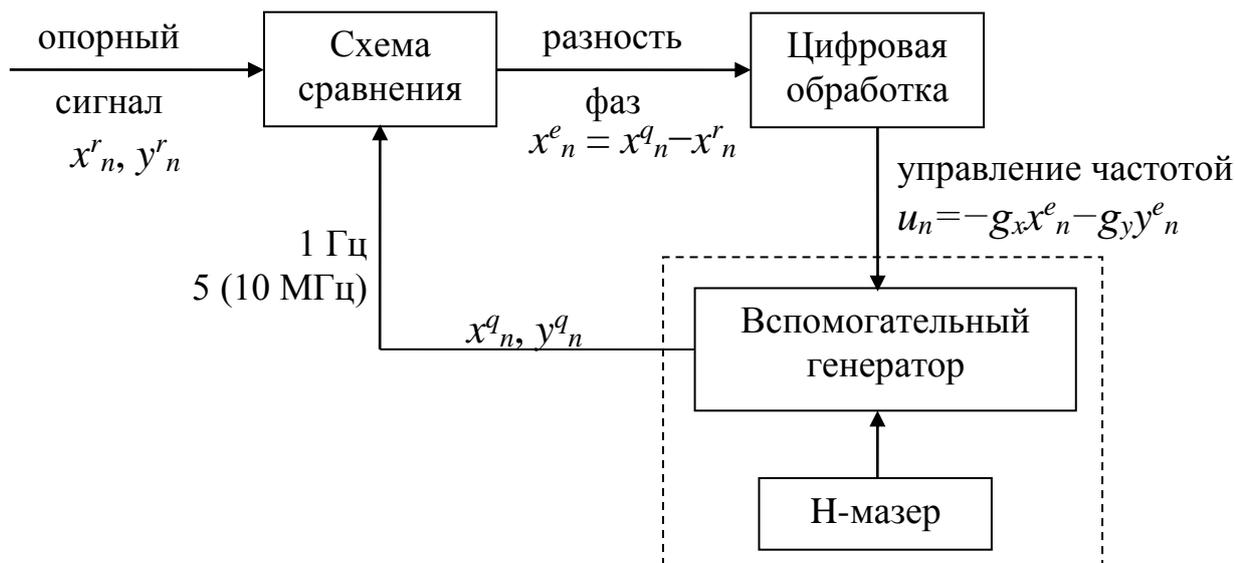


Рис. 1. Схема автоматической коррекции фазы и частоты квантового стандарта (см. раздел 2)

В качестве атомных часов будем рассматривать водородные стандарты частоты и времени (водородные мазеры). Водородные стандарты обладают наилучшими характеристиками стабильности частоты на интервалах времени измерения от 1 с до нескольких суток по сравнению с другими квантовыми стандартами, изготавливаемыми промышленностью, поэтому сигналы водородных стандартов используют для хранения национальных шкал атомного времени, а также используют для передачи эталонных значений времени и частоты потребителям [5]. Несмотря на высокие показатели стабильности для водородных стандартов характерен дрейф частоты, поэтому требуется периодическая коррекция сигналов водородных стандартов.

Как правило, управление осуществляется не самим водородным стандартом, а вспомогательным генератором, который представляет собой кварцевый генератор, частота которого стабилизирована относительно водородного стандарта. Можно приближенно считать, что сигнал вспомогательного генератора повторяет сигнал водородного мазера, но отстроен от него по фазе и частоте в соответствии с внешним управлением.

В зависимости от конкретной задачи для подстройки водородного стандарта могут использоваться различные опорные сигналы. Водородный стандарт может подстраиваться относительно репера частоты, в качестве которого сейчас в крупных лабораториях используются стандарты фонтанного типа, а раньше использовались стандарты на основе цезиевой атомно-лучевой трубки. Может осуществляться подстройка относительно так называемой виртуальной шкалы времени, формируемой на основе взаимных сличений в ансамбле из нескольких стандартов. В настоящем пособии приводится пример автоподстройки фазы и частоты водородного стандарта с использованием приемника сигналов космических навигационных спутниковых систем (КНС). Космические навигационные системы широко используются для передачи потребителям шкалы Всемирного координированного времени UTC, а также для сравнения шкал времени территориально разнесенных эталонов.

1. Модель сигнала квантового генератора

Квантовые стандарты частоты являются прецизионными генераторами гармонических колебаний, сигнал которых описывается следующей моделью [6]:

$$V(t) = [V_0 + \varepsilon(t)] \sin[2\pi f_0 t + \varphi(t)], \quad (1)$$

где $V(t)$ – мгновенное значение напряжения, V_0 – номинальное значение амплитуды, $\varepsilon(t)$ – амплитудный шум, f_0 – номинальное значение частоты сигнала, $\varphi(t)$ – случайный процесс, описывающий флуктуации фазы сигнала. Относительные отклонения амплитуды и частоты, вызванные шумами, являются малыми в квантовых стандартах:

$$\left| \frac{\varepsilon(t)}{V_0} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{1}{2\pi f_0} \frac{d\varphi}{dt} \right| \ll 1. \quad (2)$$

Будем рассматривать только частотные (фазовые) флуктуации сигнала. Далее определим ряд величин.

Мгновенное значение частоты $f(t)$ сигнала в модели (1):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [2\pi f_0 t + \varphi(t)] = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (3)$$

Мгновенное относительное отклонение частоты:

$$y(t) = \frac{f(t) - f_0}{f_0} = \frac{1}{2\pi f_0} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (4)$$

Фазовое время:

$$x(t) = \frac{\varphi(t)}{2\pi f_0}. \quad (5)$$

Величина $y(t)$ характеризует отстройку вне зависимости от используемой номинальной частоты, она одинакова для всех выходных сигналов квантового стандарта (5 МГц, 10 МГц, 1 Гц). Величина $x(t)$ имеет размерность секунды и характеризует сдвиг шкалы времени (сигнала 1 Гц), соответствующий сдвигу

фазы $\varphi(t)$ на частоте f_0 . Для краткости далее будем использовать термин фаза, подразумевая $x(t)$.

Произвести фазовые измерения сигнала возможно лишь с использованием другого сигнала, то есть всегда измеряется не сама фаза, а разность фаз между двумя сигналами $x_{12}(t)$.

На практике определение разности фаз осуществляется в дискретные моменты времени с интервалом Δt . По измеренным значениям разности фаз вычисляются оценки средней разности частот на интервале времени измерения $\tau = M \cdot \Delta t$:

$$y_n(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_{t_n-\tau}^{t_n} y(t) dt = \frac{x(t_n) - x(t_n - \tau)}{\tau} = \frac{x_n - x_{n-M}}{M \Delta t}. \quad (6)$$

2. Модель цифровой системы автоподстройки фазы и частоты генератора

В данном разделе представлено описание цифровой системы автоподстройки, позволяющей получить нулевые статические ошибки как по частоте, так и по фазе (астатизм второго порядка). Отметим, что цифровые системы являются принципиально нелинейными в силу нелинейности процедуры квантования сигнала по уровню. Однако количество разрядов в современных цифровых устройствах достаточно велико, поэтому можно использовать линейные модели с добавлением шума квантования. Вначале рассмотрим динамические свойства системы автоподстройки, поэтому будем использовать математическую модель без шума.

Пусть цифровая система автоподстройки (см. рис. 1) изменяет свое состояние дискретно во времени с интервалом Δt . С таким же интервалом в схеме сравнения измеряется разность фаз x_n^e и разность частот y_n^e между сигналом подстраиваемого генератора (q) и опорным сигналом (r):

$$x_n^e = x_n^q - x_n^r, \quad y_n^e = \frac{1}{\Delta t} (x_n^e - x_{n-1}^e). \quad (7)$$

Частота вспомогательного генератора в момент времени t_n изменяется под действием управляющего сигнала u_n :

$$y_{n+1}^q = y_n^q + u_n. \quad (8)$$

Тогда фаза вспомогательного генератора изменится на интервале времени (t_n, t_{n+1}) следующим образом:

$$x_{n+1}^q = x_n^q + y_{n+1}^q \Delta t = x_n^q + y_n^q \Delta t + u_n \Delta t. \quad (9)$$

Динамика фазы опорного сигнала, полагая, что его частота постоянна, описывается следующим уравнением:

$$x_{n+1}^r = x_n^r + y^r \Delta t. \quad (10)$$

Предположение о постоянстве частоты опорного сигнала означает, что решается задача стабилизации.

Система автоподстройки должна иметь такую структуру, которая бы обеспечивала нулевые статические ошибки и по фазе, и по частоте:

$$x_n^e \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad y_n^e \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (11)$$

Из теории автоматического регулирования [7] известно, что система автоподстройки, обладающая астатизмом k -го порядка, должна содержать в петле обратной связи k идеальных интеграторов в случае непрерывной системы или k реверсивных сумматоров (аккумуляторов) в случае дискретной системы. Таким образом, для выполнения (11) система цифровой автоподстройки должна содержать два аккумулятора. Один аккумулятор уже введен в модель в результате записи управления частотой генератора в виде (8). Простое каскадное включение еще одного аккумулятора приведет к неустойчивости системы, поэтому второй аккумулятор добавляется параллельно с пропорциональным звеном (см. рис. 2). В результате получается пропорционально-интегральное звено, означающее управление по фазовому и частотному рассогласованиям:

$$u_n = -g_x x_n^e - g_y y_n^e, \quad (12)$$

где g_x, g_y – коэффициенты обратной связи.

Подставляя (12) в (8) и вычитая из (8) y^r , а также вычитая из (9) выражение (10), получим уравнения, описывающие динамику разности фаз и частот между подстраиваемым и опорным генератором:

$$\begin{cases} x_{n+1}^e = (1 - g_x \Delta t)x_n^e + (1 - g_y)y_n^e \Delta t, \\ y_{n+1}^e = -g_x x_n^e + (1 - g_y)y_n^e. \end{cases} \quad (13)$$

Уравнения систем автоподстройки часто записывают в векторном виде. В данном случае вектор состояния $\mathbf{X}_n = (x_n^e, y_n^e)^T$, тогда:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_n + \mathbf{B}u_n, \quad \mathbf{u}_n = -\mathbf{G}\mathbf{X}_n = -\begin{bmatrix} g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^e \\ y_n^e \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где матрица перехода (матрица эволюции процесса) и матрица управления следующие:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \Delta t \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

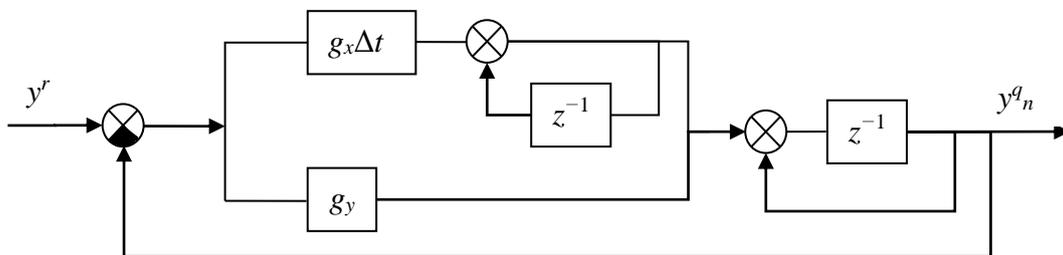


Рис. 2. Структурная схема цифровой системы автоподстройки фазы и частоты

На рис. 2 представлена структурная схема системы автоподстройки фазы и частоты, соответствующая системе уравнений (13). Действительно,

выбранная структура обратной связи позволяет устранить фазовую и частотную статическую ошибку. Это можно показать, используя передаточную функцию ошибки, но еще проще в этом убедиться, рассматривая систему (13), как линейное точечное отображение, координаты неподвижной точки которого $(0, 0)$.

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости системы автоподстройки. Из структурной схемы на рис. 2 следует, что передаточная функция разомкнутой системы записывается следующим образом:

$$W_p(z) = \left(g_y + g_x \Delta t \frac{z}{z-1} \right) \frac{1}{z-1}. \quad (16)$$

Для устойчивости требуется, чтобы все полюсы цифровой системы автоподстройки находились внутри круга единичного радиуса на комплексной плоскости. Значения полюсов определяются следующим уравнением [7]:

$$W_p(z) + 1 = z^2 - (2 - g_y - g_x \Delta t)z + 1 - g_y = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) является характеристическим уравнением для неподвижной точки отображения (13), его корни являются мультипликаторами неподвижной точки.

Корни характеристического уравнения (17) располагаются внутри круга единичного радиуса, если параметры обратной связи удовлетворяют следующим неравенствам:

$$g_x \Delta t > 0, \quad g_y > 0, \quad g_y < 2 - \frac{g_x \Delta t}{2}. \quad (18)$$

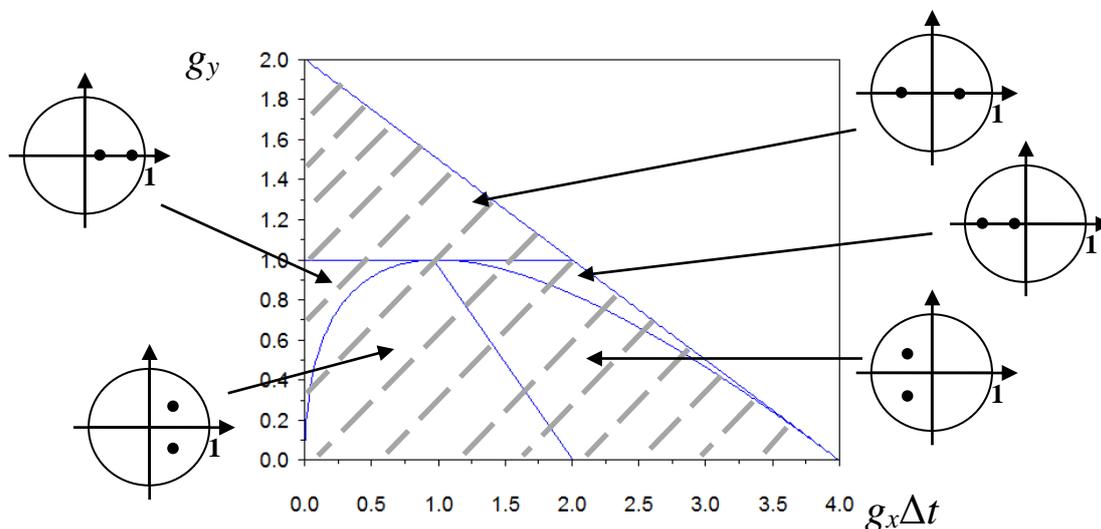


Рис. 3. Область устойчивости системы (13)

Область устойчивости, определяемая неравенствами (18), представлена на рис. 3 и поделена на 5 подобластей с различным расположением корней внутри единичного круга. Переходные процессы системы при значениях параметров из разных подобластей различаются между собой.

Какие же конкретные значения параметров g_x , g_y , Δt следует выбрать внутри области устойчивости? Если бы в рассматриваемой системе, действительно, полностью отсутствовали бы шумы (шумы генераторов, шумы системы сравнения, шумы квантования), то модель (13) была бы абсолютно точной. В этом случае, очевидно, что автоподстройку можно было бы осуществить за один такт (при параметрах $g_x \Delta t = g_y = 1$). Однако такое управление не позволит добиться наилучшей точности автоподстройки при наличии шумов, которые всегда присутствуют в реальных системах. При наличии шума измерений возникает задача оптимальной оценки разности фаз и разности частот в системе автоподстройки. Для поиска оптимальных значений параметров управления и оптимального оценивания текущих разностей фаз и частот требуется знание характеристик шумов, краткому описанию которых посвящён следующий раздел.

3. Описание шумов генераторов

Для описания шумов генераторов и квантовых стандартов частоты, в частности, применяется следующая модель (односторонней) спектральной плотности мощности частотных флуктуаций [6] (см. рис. 4):

$$S_y(f) = \begin{cases} \sum_{n=-2}^2 h_n f^n, & f \leq f_h, \\ 0, & f > f_h, \end{cases} \quad (19)$$

Ограничение спектра флуктуаций частотой f_h вызвано тем, что реальные измерения всегда происходят в некоторой полосе частот. Верхняя частота f_h определяет минимальный интервал времени измерения τ . Нижняя граница f_1 связана с конечным временем наблюдения процесса.

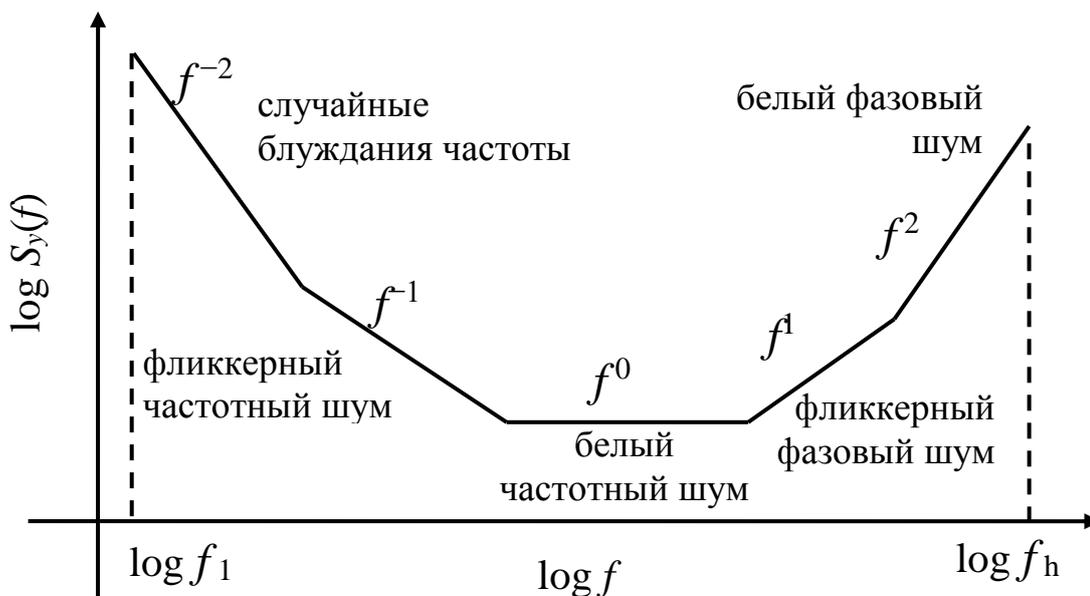


Рис. 4. График $S_y(f)$, качественно соответствующий модели (19)

Наличие в модели (19) слагаемых со степенями $n = -2$ (шум случайных блужданий частоты) и $n = -1$ (фликкерный частотный шум) приводит к тому, что случайный процесс отсчетов разностей частот $y_n(\tau)$ (6) будет являться нестационарным. Оценка дисперсии разности частот сравниваемых генераторов будет стремиться к бесконечности при стремлении к бесконечности времени наблюдения (или $f_1 \rightarrow 0$). Поэтому в качестве характеристики нестабильности частоты вместо «истинной» дисперсии используют так называемую **дисперсию Аллана** [6], характеризующую дисперсию вариаций частоты. На практике, используя N фазовых отсчетов с интервалом τ , оценку дисперсии Аллана вычисляют по следующей формуле:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2(N-2)} \sum_{n=1}^{N-2} \sigma_n^2(\tau), \quad (20)$$

$$\sigma_n(\tau) = y_{n+1}(\tau) - y_n(\tau) = \frac{1}{\tau} [x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n].$$

Отсчеты вариаций частоты σ_n представляют собой стационарный случайный процесс для модели (19) и соответствующая дисперсия является ограниченной. Аналогично тому, как это принято в англоязычной литературе, квадратный корень из дисперсии Аллана $\sigma_y(\tau)$ будем называть **девиацией Аллана**. Девиацию Аллана в русскоязычной литературе часто обозначают аббревиатурой СКДО (среднеквадратическое относительное двухвыборочное отклонение измеренного значения меры частоты [8]). Название СКДО отражает смысл девиации Аллана, значение которой для интервала времени измерения τ характеризует неопределенность измерения частоты (разности частот) на интервале τ .

Для описания динамики флуктуаций фазы и частоты генераторов используются математические модели на основе стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрим следующую линейную систему стохастических дифференциальных уравнений [9]:

$$\begin{cases} dx(t) = y(t)dt + d\xi(t), \\ dy(t) = Ddt + d\eta(t), \end{cases} \quad z(t) = x(t) + \varepsilon(t), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle &= s_\xi^2 \delta(\tau), & \langle \eta(t)\eta(t+\tau) \rangle &= s_\eta^2 \delta(\tau), \\ \langle \varepsilon(t)\varepsilon(t+\tau) \rangle &= s_\varepsilon^2 \delta(\tau), & S_{\xi,\eta,\varepsilon}(\omega) &= s_{\xi,\eta,\varepsilon}^2. \end{aligned} \quad (22)$$

В (21) $x(t)$ – характеризует состояние фазы случайного процесса (но не саму фазу), $y(t)$ – характеризует состояние частоты, $z(t)$ – соответствует измеряемому значению фазы (разности фаз), D – описывает линейный дрейф частоты. Величины $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\varepsilon(t)$ описывают белые гауссовские случайные процессы некоррелированные между собой, с нулевым средним, интенсивности которых определены в (22) ($\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $S(\omega)$ – двухсторонняя спектральная плотность мощности шума). Введем понятие матрицы спектральной плотности мощности [10] двумерного случайного процесса $\mathbf{w}(t) = [\xi(t), \eta(t)]^T$ в правой части модели (21), которая будет использована позднее:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} s_{\xi}^2 & 0 \\ 0 & s_{\eta}^2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Интенсивности белых гауссовских случайных процессов $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\varepsilon(t)$ находятся в простом соотношении с параметрами исходной модели (19):

$$s_{\xi}^2 = \frac{h_0}{2}, \quad s_{\eta}^2 = 2\pi^2 h_{-2}, \quad s_{\varepsilon}^2 = \frac{h_2}{2(2\pi)^2}. \quad (24)$$

Отметим, что соотношения (24) объясняются тем, что параметры h описывают одностороннюю спектральную плотность мощности для частоты f в модели (19), а параметры s описывают двустороннюю спектральную плотность мощности для частоты ω в модели (21).

Модель (21) позволяет учесть белый фазовый шум (ε), белый частотный шум (ξ), шум случайных блужданий частоты (η), а также линейный дрейф частоты (D), но не учитывает фликкерные шумы. Несмотря на отсутствие фликкерного шума, эта модель благодаря своей простоте широко применяется как при численных расчетах, так и при оценке фазы и частоты квантовых стандартов с использованием фильтра Калмана.

При дискретизации модели (21) получается следующая система разностных стохастических уравнений [10]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \cdot \Delta t + D \frac{(\Delta t)^2}{2} + \xi_n, & z_n = x_n + \varepsilon_n, \\ y_{n+1} = y_n + D \cdot \Delta t + \eta_n. \end{cases} \quad (25)$$

В дискретной модели (25) шумовые слагаемые ξ_n и η_n коррелированы. Двумерный случайный процесс $\mathbf{w}_n = [\xi_n, \eta_n]^T$ является стационарным гауссовским с нулевым средним и корреляционной (ковариационной) матрицей $\mathbf{Q}_n = \langle \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_n^T \rangle$: $\mathbf{w}_n \sim N(0, \mathbf{Q}_n)$. Ковариационная матрица согласно [10] вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{Q}_n(\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{F}^T(t) dt = \begin{bmatrix} s_{\xi}^2 \Delta t + s_{\eta}^2 \frac{(\Delta t)^3}{3} & s_{\eta}^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ s_{\eta}^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} & s_{\eta}^2 \Delta t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

В настоящем пособии приводится пример, в котором матрица ковариации процесса вычисляется согласно (26). Значения σ_{ξ}^2 , σ_{η}^2 рассчитываются на основе графика дисперсии Аллана с использованием таблицы 1, при этом график $\sigma_y(\tau)$ аппроксимируется V-образной кусочно-линейной функцией.

Несмотря на то, что модель (25) не описывает фликкерный частотный шум, в некоторых работах предлагается все равно учитывать его вклад в ковариационную матрицу процесса. В таком случае матрица \mathbf{Q}_n может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{Q}_n(\Delta t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} h_0 \Delta t + 2h_{-1}(\Delta t)^2 + \frac{2}{3} \pi^2 h_{-2}(\Delta t)^3 & \pi^2 h_{-2}(\Delta t)^2 \\ \pi^2 h_{-2}(\Delta t)^2 & 2\pi^2 h_{-2} \Delta t \end{bmatrix}. \quad (27)$$

При численном моделировании двумерного случайного процесса \mathbf{w}_n с нулевым средним и заданной ковариационной матрицей \mathbf{Q}_n применяется следующий алгоритм [11].

1. Вычисляется разложение Холецкого симметричной, положительно определенной матрицы $\mathbf{Q}_n = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, где \mathbf{L} – нижняя треугольная матрица [12] (в Matlab данное разложение реализуется с помощью функции *chol*).
2. При помощи генератора случайных чисел создается вектор нормально распределенных случайных чисел \mathbf{a}_n с нулевым средним и единичной дисперсией.
3. Вычисляется искомый вектор коррелированных случайных чисел: $\mathbf{w}_n = \mathbf{L}\cdot\mathbf{a}_n$.

В модели (25) ε_n отвечает за белый фазовый шум. Отсчеты ε_n вычисляются как «независимые» случайные числа с гауссовским распределением $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Дисперсия дискретных отсчетов ε_n следующим образом связана с величиной спектральной плотности мощности шума $\varepsilon(t)$ модели (21): $\sigma_\varepsilon^2 = s_\varepsilon^2 \cdot 2f_h = s_\varepsilon^2 / \Delta t$ (т.е. верхняя частота f_h в соответствии с теоремой Котельникова принимается равной половине частоты дискретизации).

На практике по массиву измеренных значений разностей фаз вычисляется девиация Аллана и строится график зависимости от интервала времени измерения в логарифмическом масштабе. На каждом интервале времени измерения будет преобладать шум определенного типа. Для шумов разных типов график девиации Аллана будет иметь разный наклон (за исключением белого и фликкерного шумов фазы, для различения шумов этих типов используют модифицированную девиацию Аллана). Качественный вид зависимости девиации Аллана σ_y от τ представлен на рис. 5.

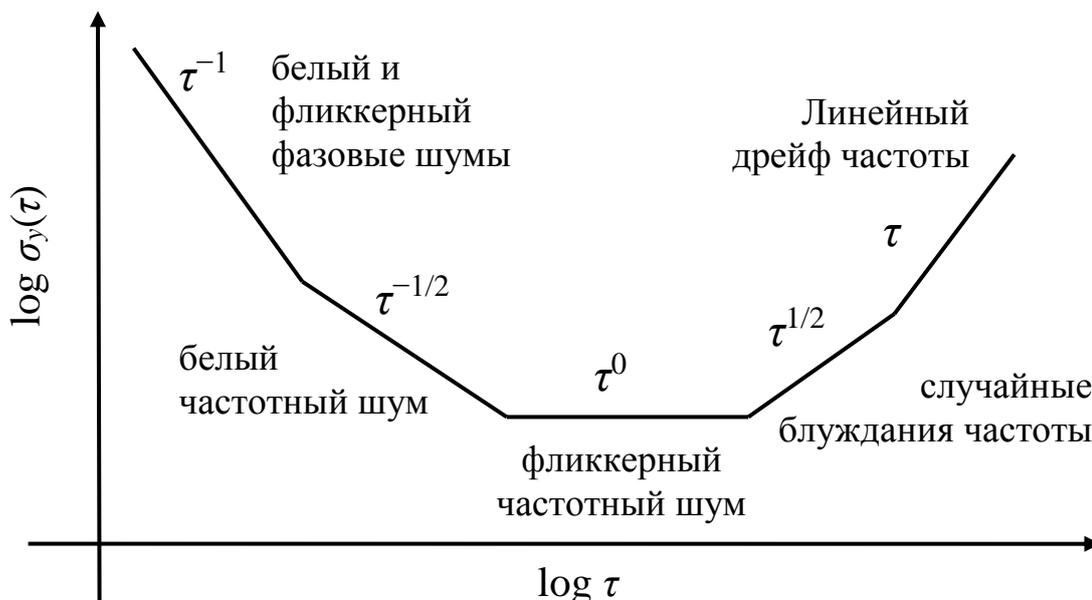


Рис. 5. Качественный вид зависимости девиации Аллана от интервала времени усреднения для квантовых стандартов частоты

По экспериментально полученному графику зависимости $\sigma_y(\tau)$ можно определить, какой из шумов преобладает на том или ином участке интервалов времени измерения. Используя табл. 1 [6] можно по значениям $\sigma_y(\tau)$ оценить параметры математических моделей (19) и (21).

Таблица 1

Связь дисперсии Аллана и параметров математических моделей

Тип шума	$S_y(f), f > 0$	$\sigma_y^2(\tau)$	$\sigma_y^2(\tau)$
Белый шум фазы	$h_2 f^2$	$h_2 \frac{3f_h}{(2\pi)^2 \tau^2}$	$\frac{6f_h s_\varepsilon^2}{\tau^2} = \frac{3\sigma_\varepsilon^2}{\tau^2}$
Фликкерный шум фазы	$h_1 f$	$h_1 \frac{1}{\tau^2 4\pi^2} [1.038 + 3 \ln(2\pi f_h \tau)]$	-
Белый шум частоты	h_0	$\frac{h_0}{2\tau}$	$\frac{s_\xi^2}{\tau}$
Фликкерный шум частоты	$h_{-1} f^{-1}$	$2h_{-1} \ln 2$	-
Шум случайных блужданий частоты	$h_{-2} f^{-2}$	$\frac{(2\pi)^2}{6} h_{-2} \tau$	$\frac{s_\eta^2}{3} \tau$

4. Фильтр Калмана для системы автоподстройки фазы и частоты

Перейдем к задаче оптимального оценивания разностей фаз и частот в системе автоподстройки, описанной в разделе 2. Дискретный фильтр Калмана, являющийся оптимальным в смысле минимума квадрата ошибки оценивания, вполне подходит для решения данной задачи. Фильтр Калмана является рекурсивным и позволяет производить оценку текущего состояния параметров на основе предыдущей оценки и данных текущих измерений.

Требуется оценить текущее (в момент времени t_n) значение разности фаз x_n^e и частот y_n^e между сигналом вспомогательного генератора и опорным сигналом. Таким образом, вектор состояния фильтра должен содержать две переменные: $\mathbf{X}_n = [x_n^e, y_n^e]^T$. Уравнение, описывающее изменение вектора состояния фильтра Калмана, имеет следующий вид:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{F}\mathbf{X}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \Delta t \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Уравнение (28) содержит слагаемое, отвечающее за управляющее воздействие \mathbf{u}_n , как в (14), а также вектор шума процесса $\mathbf{w}_n = [\xi_n, \eta_n]^T$, как в стохастической модели (25). Таким образом, уравнение (28) описывает динамику фазовой и частотной ошибок системы автоподстройки с учетом белого частотного шума и шума случайных блужданий частоты.

Связь между вектором состояния фильтра и измеряемыми величинами задается следующим уравнением:

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{H}\mathbf{X}_n + \mathbf{v}_n. \quad (29)$$

Для рассматриваемой задачи z_n является скалярной величиной и представляет собой измеряемую в схеме сравнения (см. рис. 1) разность фаз между сигналом подстраиваемого вспомогательного генератора и опорным сигналом. Матрица связи (или матрица наблюдений) имеет в нашем случае вид: $\mathbf{H} = [1, 0]$. Вектор \mathbf{v}_n соответствует белому гауссовскому шуму измерений.

Шум процесса \mathbf{w}_n и шум измерений \mathbf{v}_n характеризуются ковариационной матрицей процесса \mathbf{Q}_n и ковариационной матрицей шума измерений \mathbf{R}_n .

$$\mathbf{Q}_n = \langle \mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_n^T \rangle, \quad \mathbf{R}_n = \langle \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n^T \rangle = \sigma_\varepsilon^2. \quad (30)$$

Ковариационная матрица процесса \mathbf{Q}_n для используемой стохастической модели была описана в предыдущем разделе. Может быть использовано выражение (26) либо (27).

Перейдем к описанию принципа работы фильтра Калмана. Оценка вектора состояния определяется по формуле:

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{X}}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n + \mathbf{K}_{n+1}[\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{H}(\mathbf{F}\hat{\mathbf{X}}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n)], \quad (31)$$

где \mathbf{K}_n – коэффициент усиления фильтра Калмана. Далее согласно работам [2-3] будем обозначать верхним индексом со знаком «-» предсказываемую (неуточненную) оценку. Коэффициент усиления вычисляется таким образом, чтобы минимизировать ковариационную матрицу ошибки оценивания, которая определяется так:

$$\mathbf{P}_n = \langle (\mathbf{X}_n - \hat{\mathbf{X}}_n)(\mathbf{X}_n - \hat{\mathbf{X}}_n)^T \rangle = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n\mathbf{H})\mathbf{P}_n^-. \quad (32)$$

Коэффициент усиления фильтра:

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_n^-\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_n^-\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}. \quad (33)$$

Алгоритм работы фильтра Калмана выглядит следующим образом.

- Шаг 1. Осуществляется инициализация фильтра: задается начальная оценка вектора состояния $\hat{\mathbf{X}}_0^-$ и матрицы ковариации ошибки оценивания \mathbf{P}_0^- .
- Шаг 2. Производится измерение z_n .

- Шаг 3. Вычисляется коэффициент усиления фильтра:

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_n^-\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}_n^-\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}.$$

- Шаг 4. Осуществляется уточнение оценки вектора состояния:

$$\hat{\mathbf{X}}_n = \hat{\mathbf{X}}_n^- + \mathbf{K}_n(\mathbf{z}_n - \mathbf{H}\hat{\mathbf{X}}_n^-).$$

- Шаг 5. Уточнение матрицы ковариации ошибки оценивания:

$$\mathbf{P}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_n\mathbf{H})\mathbf{P}_n^-.$$

- Шаг 6. Предсказание на следующий шаг итерации согласно модели процесса:

$$\hat{\mathbf{X}}_{n+1}^- = \mathbf{F}\hat{\mathbf{X}}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n,$$

$$\mathbf{P}_{n+1}^- = \mathbf{F}\mathbf{P}_n\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}.$$

- Шаг 7. Переход на шаг 2 и повторение процедуры для каждого измерения.

Таким образом, фильтр Калмана позволяет уменьшить влияние шумов на результат измерений и оптимально (в смысле минимума суммарной среднеквадратичной ошибки) оценить разность фаз x_n^e и разность частот y_n^e в режиме реального времени. Полученные оценки x_n^e , y_n^e позволяют вычислить управляющее воздействие u_n по формуле (12) для реализации автоподстройки. Однако еще следует определить управляющие коэффициенты g_x и g_y , входящие в (12). Один из возможных подходов, используемых для определения параметров управления, описан в следующем разделе.

5. Выбор оптимальных значений параметров управления

Наиболее общая постановка задачи синтеза оптимальных систем подразумевает достижение минимума некоторого функционала (критерия качества), который учитывает как суммарную ошибку системы автоматического регулирования, так и ограничения на управляющее воздействие. Линейно-квадратичное гауссовское управление (ЛКГ, LQG – Linear Quadratic Gaussian Control) является одним из вариантов построения оптимальных систем автоматического регулирования.

Метод ЛКГ-управления предполагает реализацию фильтра Калмана для оптимальной оценки параметров рассогласования (LQE – Linear Quadratic Estimator), а также реализацию линейно-квадратичного регулятора (LQR – Linear Quadratic Gaussian Regulator). Таким образом, рассмотренный фильтр Калмана (31) и линейное управление $u_n = -g_x x_n^e - g_y y_n^e$ (12) можно использовать для реализации ЛКГ-управления. Кроме этого решается задача по минимизации следующего функционала:

$$J = \left\langle \sum_n (\mathbf{x}_n^T \mathbf{W}_Q \mathbf{x}_n + \mathbf{u}_n^T \mathbf{W}_R \mathbf{u}_n) \right\rangle. \quad (34)$$

Матрицы \mathbf{W}_Q и \mathbf{W}_R задаются вручную, они характеризуют весовые коэффициенты для вектора ошибки и вектора управления. В рассматриваемой задаче используется скалярное управление (12), поэтому \mathbf{W}_R является скалярной величиной. Матрицы \mathbf{W}_Q и \mathbf{W}_R имеют следующий смысл. При увеличении \mathbf{W}_Q по сравнению с \mathbf{W}_R более жесткие требования предъявляются к точности подстройки, при этом величина управления ограничивается в меньшей степени, что должно привести к более быстрому, но и более резкому управлению. При увеличении \mathbf{W}_R по сравнению с \mathbf{W}_Q более жесткие ограничения накладываются на величину управления, что должно привести к плавному управлению, жертвуя точностью автоподстройки.

Запишем управляющее воздействие (12) в векторном виде:

$$u_n = -\mathbf{G}\mathbf{x}_n, \quad \mathbf{G} = (g_x, g_y). \quad (35)$$

Тогда минимизация функционала (34) достигается, если вектор коэффициентов управления удовлетворяет равенству:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{W}_R)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{F}, \quad (36)$$

где $\mathbf{\Gamma}$ является решением алгебраического уравнения Риккати:

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{F}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{F} + \mathbf{W}_Q - \mathbf{F}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{B} + \mathbf{W}_R)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{F}. \quad (37)$$

Уравнение (37) решается численными методами. Например, в Matlab для решения может быть использована специализированная функция *dare*, которая также позволяет рассчитать вектор коэффициентов управления \mathbf{G} .

Полученные с помощью описанной выше процедуры значения параметров управления g_x и g_y требуется проверить на удовлетворение условию устойчивости (18).

Методы синтеза оптимальных систем, к которым относится ЛКГ-управление, имеют один существенный недостаток, который заключается в том, что взаимосвязь между параметрами функционала качества (\mathbf{W}_Q и \mathbf{W}_R) и характеристиками качества системы автоматического регулирования (среднеквадратической ошибки) является неизвестной. Не существует правила выбора значений \mathbf{W}_Q и \mathbf{W}_R . Таким образом, необходимо осуществлять перебор параметров функционала совместно с анализом характеристик качества системы. В рассматриваемой задаче в качестве характеристики качества используется дисперсия Аллана выходного сигнала вспомогательного генератора.

6. Пример расчета параметров для системы синхронизации водородного лазера

Рассмотрим практический пример расчета параметров для системы автоподстройки с использованием метода линейно-квадратичного гауссовского управления [3]. Будем решать следующую задачу: требуется осуществить плавное управление частотой пассивного водородного стандарта частоты и времени с целью его подстройки относительно шкалы UTC(SU) с использованием канала внешних сличений. Такая задача возникает в разных областях науки и техники. Например, для организации измерений методом радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой (РСДБ) требуется одновременное наблюдение космических объектов с помощью радиотелескопов, удаленных друг относительно друга на тысячи километров. На радиотелескопах используются атомные часы, от точности взаимной синхронизации которых зависит точность определения направления на источник.

Для организации канала внешних сличений обычно используются данные, получаемые от спутников космических навигационных систем с помощью прецизионных приемников. В целом система автоподстройки соответствует схеме, изображенной на рис. 1.

Чтобы рассчитать параметры системы автоподстройки требуется выяснить статистические характеристики опорного и подстраиваемого генераторов, а также характеристики схемы сравнения.

7.1. Описание дифференциального метода сравнения шкал времени с использованием сигналов космических навигационных систем

В данном разделе анализируется точность схемы сравнения, в качестве которой используется метод, основанный на использовании сигналов космических навигационных систем (КНС). Можно выделить два метода сравнения с использованием сигналов КНС: автономные сличения и взаимные сличения (дифференциальный метод).

Под автономными сличениями понимается измерение смещения (разности фаз) между шкалой времени указанной лаборатории и шкалой времени КНС (GPS или ГЛОНАСС в зависимости от выбора). При выборе автономных сличений используются результаты измерений одного приемника КНС.

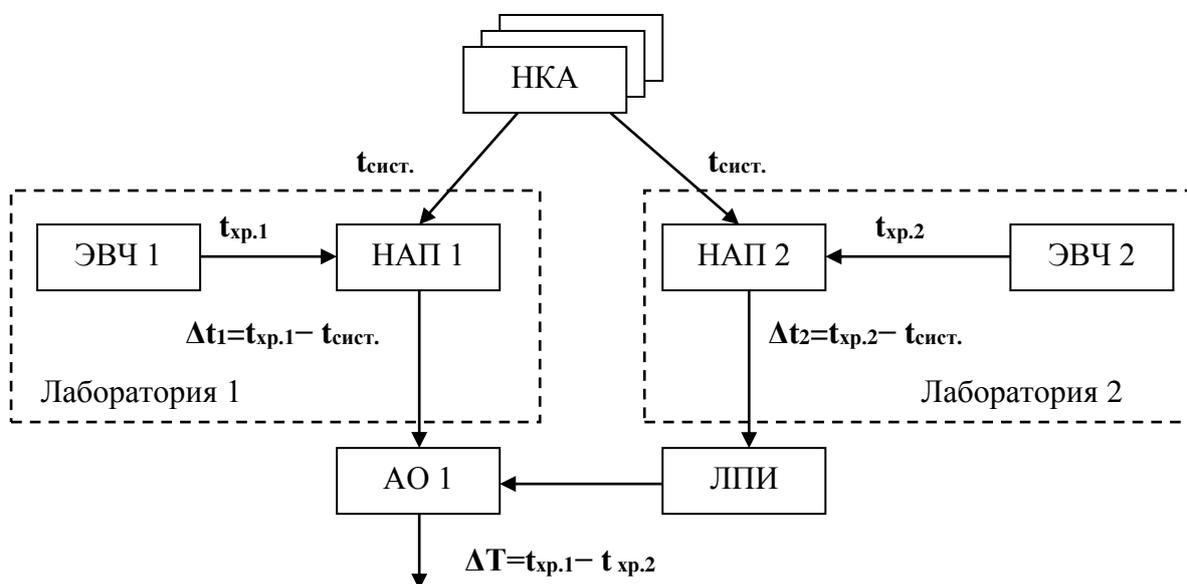


Рис. 6. Схема дифференциального сравнения шкал времени эталонов времени и частоты с помощью спутниковых навигационных сигналов (НКА – навигационный космический аппарат, ЭВЧ – эталон времени и частоты, НАП – навигационная аппаратура потребителей (приемник ГНСС), ЛПИ – линия передачи информации, АО – аппаратура обработки)

Взаимные сличения предполагают обработку результатов измерений, проведенных в один и тот же временной промежуток и полученных двумя приемниками сигналов КНС. Каждый приемник осуществляет измерение временных сдвигов между шкалой локальной лаборатории и шкалами времени, передаваемыми спутниками КНС. Если лаборатории находятся на таком расстоянии друг от друга, что в одно и то же время приемники КНС этих лабораторий могут принимать сигналы одних и тех же спутников, то возможно взаимное сличение шкал времени лабораторий методом *common view* (CV), т.е. с помощью дифференциальной обработки (см. рис. 6). При дифференциальной обработке исключаются шкалы времени, передаваемые общими для двух

лабораторий спутниками, что позволяет достичь высокой точности взаимных сличений территориально разнесенных эталонов.

Для оценки точности метода взаимных сличений (CV) воспользуемся данными измерений (файлы в формате CGGTTS), находящимися в открытом доступе, для двух институтов, реализующих национальные шкалы времени: Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений (ВНИИФТРИ) в п. Менделеево (Московской области) и Физико-технический институт (РТВ) в г. Брауншвейг (Германия). Расстояние между институтами составляет ~ 1780 км. Измерения проводились с помощью специализированных приемников TTS-3 в январе-феврале 2015 г.

На рис. 7 представлены графики девиации Алана $\sigma_y(\tau)$ для результатов измерения разностей шкал времени UTC(SU) и UTC(РТВ) между эталонами ВНИИФТРИ и РТВ с помощью метода CV. Поскольку расстояние между институтами достаточно большое, и сигналы между спутниками и наземными пунктами проходят через разные области ионосферы, которые дают различные задержки, используется методика компенсации влияния ионосферы L3P. При расчете методом CV L3P используется комбинация результатов вычисления задержек, полученных для двух частотных каналов L1 и L2 систем ГЛОНАСС/GPS. Как видно из графика, зависимость $\sigma_y(\tau) \sim \tau^{-1}$, что соответствует белому фазовому шуму (см. таблицу 1). Данный фазовый шум является шумом измерений и возникает в результате использования метода CV (наибольший вклад вносят тропосферные и ионосферные флуктуации).

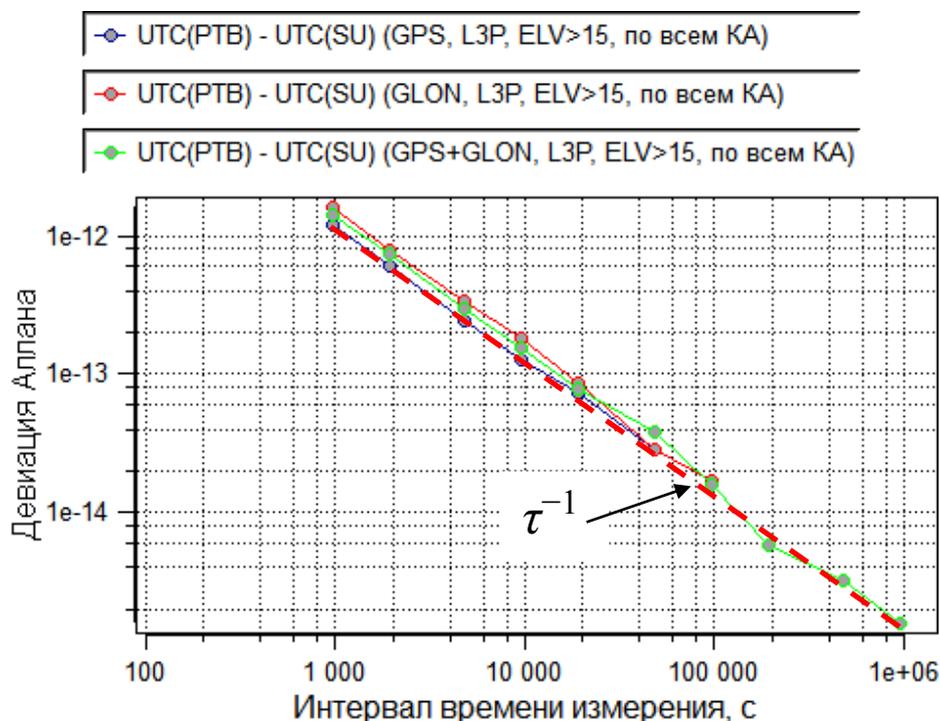


Рис. 7. Девиация Аллана для разности шкал времени UTC(SU) и UTC(РТВ)

На рассматриваемых интервалах времени шум метода измерений значительно превышает другие виды шумов, обусловленные статистическими свойствами сравниваемых эталонов времени и частоты.

На основе графика (см. рис. 7) получим, что значение ковариации шума измерений в фильтре Калмана, используемого в системе автоподстройки, составит:

$$\mathbf{R}_n = \langle \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_n^T \rangle = \sigma_\varepsilon^2 \approx 10^{-18}. \quad (38)$$

7.2. Нестабильность частоты пассивного водородного стандарта

Для определения параметров модели процесса фильтра Калмана (25) воспользуемся результатами измерений разности фаз между сигналом пассивного водородного стандарта частоты и времени Ч1-1007 и активного водородного стандарта Ч1-1003А, полученным с помощью многоканального фазового компаратора VCH-315. По результатам измерений построен график девиации Аллана, который представлен на рис. 8.

Так как активные водородные стандарты частоты обладают более высокими метрологическими характеристиками по сравнению с пассивными стандартами, то будем приближенно считать, что при взаимных измерениях основной вклад в нестабильность частоты вносит пассивный стандарт.

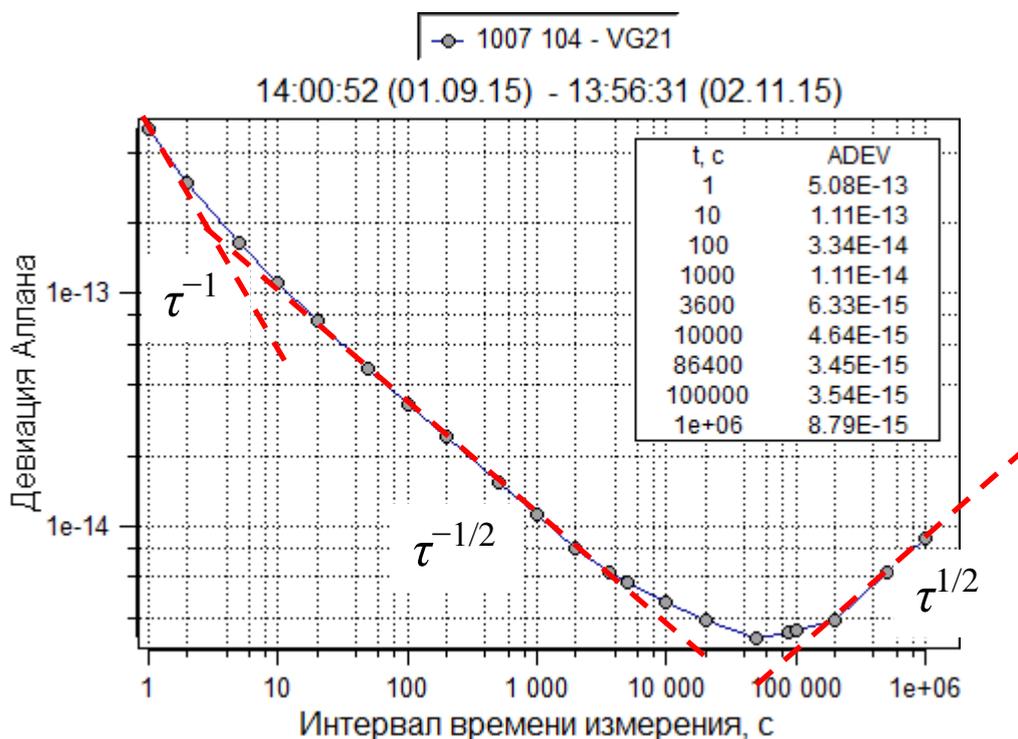


Рис. 8. Девиация Аллана пассивного водородного стандарта частоты и времени Ч1-1007 с исключенным дрейфом

Параметры модели (21) для пассивного водородного стандарта частоты и времени

Тип шума	$\sigma_y^2(\tau)$	Значения параметров ковариации
Белый шум фазы	$\frac{3\sigma_\varepsilon^2}{\tau^2}$	$\sigma_\varepsilon^2 \approx 8,6 \cdot 10^{-26}$
Белый шум частоты	$\frac{s_\xi^2}{\tau}$	$s_\xi^2 \approx 1,1 \cdot 10^{-25}$
Шум случайных блужданий частоты	$\frac{s_\eta^2}{3} \tau$	$s_\eta^2 \approx 2,3 \cdot 10^{-34}$

Анализируя график девиации Аллана (рис. 8), получим оценки для параметров модели (21), используемой в фильтре Калмана, которые представлены в табл. 2.

Еще раз отметим, что сигнал вспомогательного генератора на рассматриваемых интервалах времени измерения (больше 1 с) с высокой точностью повторяет сигнал опорного генератора (пассивного водородного стандарта в рассматриваемом примере). Поэтому шумовые характеристики сигнала вспомогательного генератора также соответствуют значениям, указанным в табл. 2.

Шум измерений определяется аппаратурой внешних сличений (38), так как белый фазовый шум сигнала вспомогательного генератора на много порядков меньше. Нестабильность частоты эталонного сигнала, реализующего шкалу времени UTC(SU), намного меньше нестабильности частоты пассивного водородного стандарта, сигнал которого должен подстраиваться относительно UTC(SU). Таким образом, значения матрицы ковариации процесса для фильтра Калмана, оценивающего разность фаз и частот между вспомогательным генератором и UTC(SU), могут быть вычислены на основе значений s_ξ^2 , s_η^2 из табл. 2.

Теперь параметры шумов модели фильтра Калмана для рассматриваемой задачи известны.

7.3. Замечание о выборе интервала времени управления

Перед тем как перейти к моделированию работы системы автоподстройки, необходимо выбрать временной интервал управления Δt . Если для коэффициентов фазового и частотного управления используется методика, описанная в разделе 5, то значение Δt требуется выбрать вручную.

На рис. 9 качественно представлены характеристики нестабильности частоты, соответствующие изображенному на рис. 7 (зашумленный опорный

сигнал) и на рис. 8 (сигнал вспомогательного генератора). Интервал времени измерения, при котором эти характеристики пересекаются, равен $\tau^* \approx 2 \cdot 10^5$ с.

В результате работы системы автоподстройки необходимо, чтобы на временах $\tau < \tau^*$ нестабильность частоты управляемого вспомогательного генератора определялась бы характеристиками пассивного стандарта частоты, а на временах $\tau > \tau^*$, определялась бы нестабильностью опорного сигнала. Для этого требуется, чтобы, во-первых, интервал управления должен удовлетворять условию $\Delta t < \tau^*$, во-вторых, на интервале Δt модель процесса в фильтре Калмана адекватно описывала бы поведение реальных сигналов. Результаты измерений схемы сравнения с использованием сигналов космических навигационных систем принято записывать в формате CGGTTS, который предполагает интервал между измерениями 16 минут (960 с). Выберем это же значение для интервала управления Δt . На данном интервале используемая модель должна хорошо соответствовать реальной системе, согласно рис. 8 преобладает белый частотный шум, а дрейфом частоты, который отсутствует в модели фильтра Калмана, можно пренебречь (значение дрейфа частоты составляет порядка 10^{-15} за сутки).

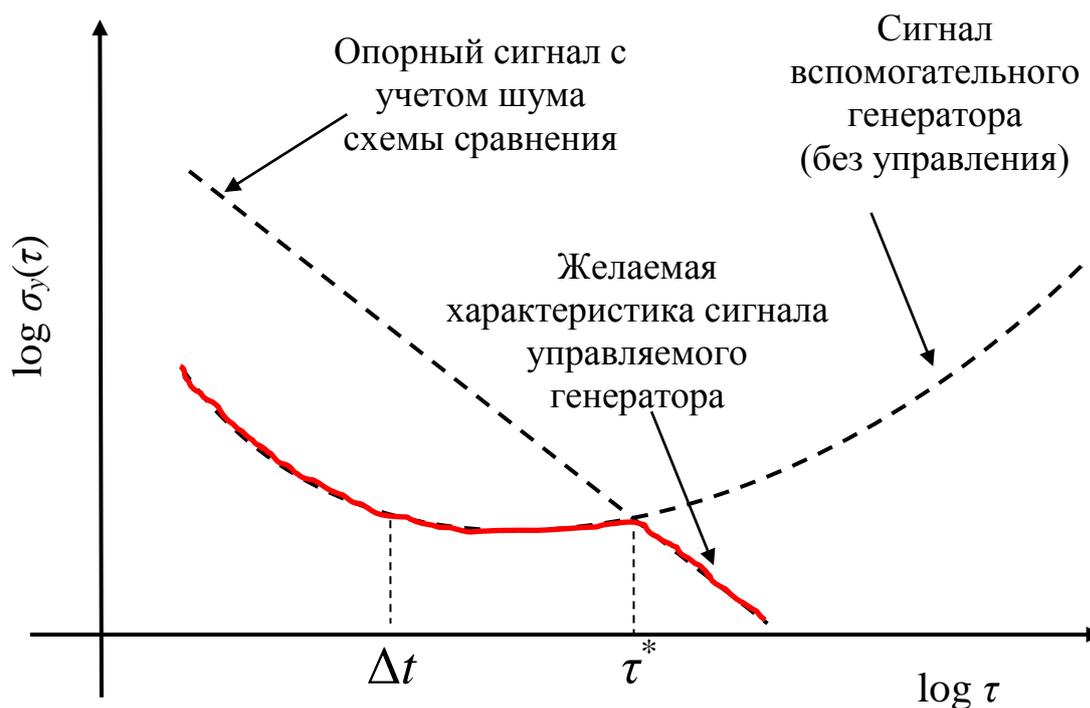


Рис. 9. Качественный вид характеристик нестабильности частоты опорного сигнала, свободного и управляемого вспомогательного генератора

7. Результаты моделирования системы автоподстройки

Как уже было сказано в разделе 5, используемый метод линейно-квадратичного гауссовского управления ничего не говорит о том, какие требуется выбрать параметры функционала качества (\mathbf{W}_Q и \mathbf{W}_R), чтобы получить желаемые характеристики выходного сигнала (как на рис. 9). Поэтому осуществим перебор параметров. Основываясь на результатах работы [3], выберем

$$\mathbf{W}_Q = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

а величину \mathbf{W}_R будем изменять в пределах $10^5 - 10^{12}$. Интервал времени управления $\Delta t = 960$ с.

Таблица 3

Коэффициенты управления для различных \mathbf{W}_R , вычисленные по формуле (36)

Номер на рис. 10	\mathbf{W}_R	g_x	g_y
3	10^5	$7,99 \cdot 10^{-5}$	0,3618
4	10^6	$2,79 \cdot 10^{-5}$	0,2226
5	10^7	$9,32 \cdot 10^{-6}$	0,1319
6	10^8	$3,04 \cdot 10^{-6}$	0,0765
7	10^9	$9,78 \cdot 10^{-7}$	0,0437
8	10^{10}	$3,12 \cdot 10^{-7}$	0,0248
9	10^{11}	$9,93 \cdot 10^{-8}$	0,0140
10	10^{12}	$3,15 \cdot 10^{-8}$	0,0079

На рис. 10 представлены результаты моделирования работы системы автоподстройки для различных значений параметра функционала качества \mathbf{W}_R . Значения коэффициентов управления, посчитанные по формуле (36), представлены в табл. 3. Как видно из представленных результатов, увеличение неустойчивости частоты выходного сигнала вспомогательного генератора при $\tau < \tau^*$, вызванное действием системы автоподстройки, минимально для кривых № 9 и № 10. При этом в области $\tau > \tau^*$ график № 9 не выходит за характеристику неустойчивости опорного сигнала. Если для решаемой задачи важно сохранение высоких показателей стабильности частоты на интервалах времени $\tau < \tau^*$ и при этом стабилизировать номинал частоты и ход шкалы времени, то параметры для кривой № 9 $g_x = 3,15 \cdot 10^{-8}$, $g_y = 0,014$ представляются наиболее подходящими из всех рассмотренных в этом примере. Действительно, продолжительность многих прикладных измерений (поверка стандартов частоты, радиоастрономические измерения, некоторые физические эксперименты) меньше τ^* , которое в данном примере соответствует приблизительно 2,5 суткам, поэтому выбор параметров для кривой 9 можно считать обоснованным.

На рис. 11 наглядно представлены графики фазы подстраиваемого генератора для случая более сильного (соответствует кривой 3 на рис. 9) и

более слабого (соответствует кривой 9 на рис. 10) управления. Как видно, более сильное управление позволяет с большей точностью стабилизировать шкалу времени (фазу) относительно моделируемой шкалы UTC(SU), однако при этом ухудшается стабильность частоты на относительно коротких интервалах времени.

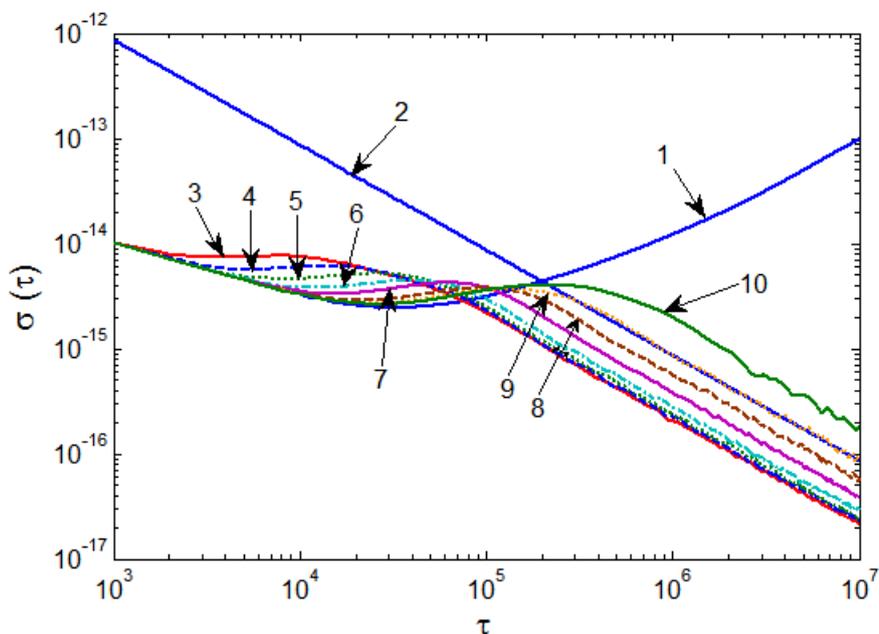


Рис. 10. Девияция Аллана. Результаты моделирования для различных W_R (см. таблицу 3). 1 – сигнал вспомогательного генератора без внешнего управления, 2 – характеристика опорного сигнала, 3 – 10 характеристики выходного сигнала

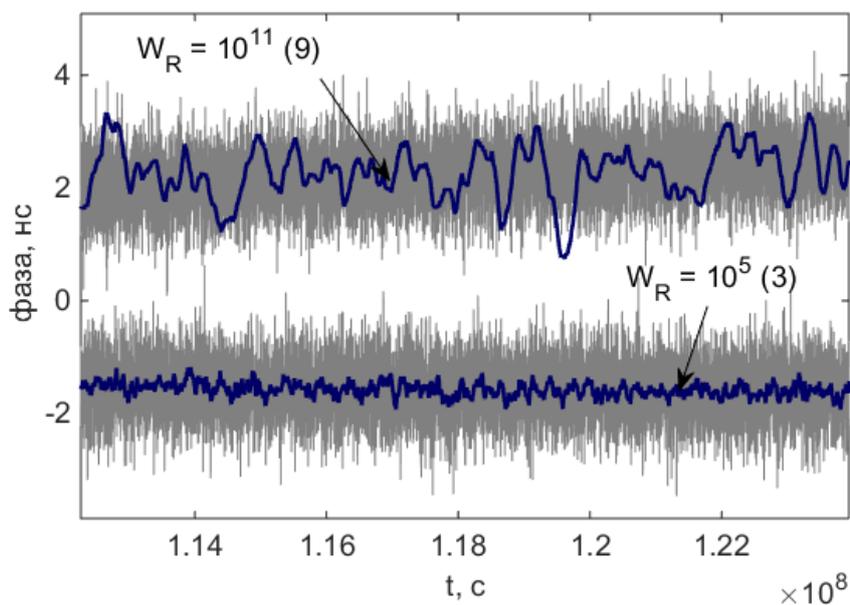


Рис. 11. Фаза сигнала управляемого квантового стандарта частоты для двух различных параметров функционала качества W_R , соответствующих кривым 3 и 9 на рис. 10, светло-серым цветом отмечены опорные сигналы. Диапазон времени на графике соответствует приблизительно 135 суткам

Список литературы

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. – М.: Техносфера, 2003.
2. Брени С., Рыжков А.В. Синхронизация цифровых сетей связи. – М.: Мир, 2003.
3. Koppang P., Leland R. Linear quadratic stochastic control of atomic hydrogen masers //Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on. – 1999. – Т. 46. – №. 3. – С. 517–522.
4. Одуан К., Гино Б. Измерение времени. Основы GPS. Пер. с англ //М.: Техносфера, 2002. – 400с.
5. Кварцевые и квантовые меры частоты / Е.Н. Базаров, Н.А. Демидов, Е.Т. Жуков и др.; под ред. Б.И. Макаренко. – МО СССР, 1989. – 536с.
6. Рютман Ж. Характеристики нестабильности фазы и частоты сигналов высокостабильных генераторов: Итоги развития за пятнадцать лет //ТИИЭР. – 1978. – Т. 66, № 9. – С. 70–101.
7. Коновалов Г.Ф. Радиоавтоматика: Учебник для вузов по специальности Радиотехника. – 1990.
8. ГОСТ 8.567–2014 Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения времени и частоты. Термины и определения.
9. Galleani L. et al. A mathematical model for the atomic clock error //Metrologia. – 2003. – Т. 40. – №. 3. – С. S257.
10. Gelb A. Applied optimal estimation. – MIT press. – 1974.
11. Терехов С.А. Случайные гауссовские процессы в задачах аппроксимации данных [Электронный ресурс]. URL: <http://alife.narod.ru/lectures/gauss2008/GaussianProcessLecture.pdf>
12. Голуб Д., Ван Лоан Ч. Матричные вычисления. – 1999.

Константин Геннадьевич **Мишагин**

СИНХРОНИЗАЦИЯ АТОМНЫХ ЧАСОВ

Учебно-методическое пособие

Компьютерная верстка – К.Г. Мишагин

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч-изд. л.
Заказ № . Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского.
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37.