

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Радиофизический факультет  
Кафедра теории колебаний

Методические указания  
к лабораторному практикуму  
тема: «Метод Ван дер-Поля»

Учебно-методические указания

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета  
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки  
03.03.03 «Радиофизика», 010300 «Фундаментальная информатика  
и информационные технологии»

Нижний Новгород

2016

**УДК 534.1**  
**ББК 22.213**

Методические указания к лабораторному практикуму, тема Метод Ван дер-Поля, методические указания – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 14 с., 8 рис.

В данной работе рассматривается метод Ван дер-Поля, который позволяет исследовать слабонелинейные, близкие к консервативным, системы путем анализа укороченных уравнений.

Метод дается в применении к исследованию системы лабораторной установки «Исследование фазовой плоскости лампового генератора».

Разработка рекомендуется для студентов радиофизического факультета ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Ответственный за выпуск:  
заместитель председателя методической комиссии  
радиофизического факультета ННГУ,  
д.ф.-м.н., проф. **Е.З. Грибова**

УДК 534.1  
ББК В 236.352

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского

## Основные положения метода медленно меняющихся амплитуд

Слабонелинейные квазиконсервативные системы могут совершать периодические движения с постоянной амплитудой, определяемой свойствами системы. Таким периодическим движениям на фазовой плоскости соответствуют изолированные замкнутые фазовые траектории, называемые предельными циклами.

Предельный цикл будет устойчивым, если все фазовые траектории, начинающиеся в малой окрестности предельного цикла, будут асимптотически к нему приближаться при  $t \rightarrow \infty$ .

Динамические системы, в фазовом портрете которых имеется, по крайней мере, один устойчивый предельный цикл, называются автоколебательными [1].

В данном пособии предлагаются основы одного из методов исследования автоколебательных систем, совершающих почти синусоидальные колебания, - метода медленно-меняющихся амплитуд или метода Ван-дер-Поля.

Будем считать, что система описывается уравнением вида

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}), \quad (1)$$

где  $f(x, \dot{x})$  - нелинейная ограниченная функция,  $\mu$  - малый безразмерный параметр.

Нас интересуют периодические решения. Метод Ван-дер-Поля позволяет задачу отыскания периодических решений уравнения (1) свести к несравненно более простой - задаче нахождения состояний равновесия так называемых укороченных уравнений.

Перейдем к составлению укороченных уравнений интересующей нас системы (1). При  $\mu = 0$  уравнение (1) описывает обычный гармонический осциллятор, и его решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= A \cos(t + \varphi) = A \cos \theta, \\ \dot{x} &= y = -A \sin(t + \varphi) = -A \sin \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A$  и  $\varphi$  - произвольные постоянные, имеющие физический смысл амплитуды и фазы колебаний.

Решение можно представить и в комплексной форме и виде

$$\begin{aligned} x &= z e^{jt} + z^* e^{-jt}, \\ \dot{x} &= y = j(z e^{jt} - z^* e^{-jt}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $z$  и  $z^*$  - произвольные постоянные, являющиеся комплексной и комплексно сопряженной амплитудами.

Решение вида (3) легко сводится к виду (2), если положить

$$z = \rho e^{j\varphi}, \quad z^* = \rho e^{-j\varphi}.$$

В результате получим

$$x = \rho(e^{j(t+\varphi)} + e^{-j(t+\varphi)}) = 2\rho \cos(t + \varphi),$$

$$\dot{x} = y = j\rho(e^{j(t+\varphi)} - e^{-j(t+\varphi)}) = 2\rho \sin(t + \varphi).$$

Следовательно,

$$|z| = |z^*| = \rho = \frac{A}{2}, \quad (4)$$

$$\arg z = -\arg z^* = +\varphi.$$

При  $\mu \neq 0$ , но сколь угодно малом, решение уравнения (1) не должно существенно отличаться от решения для линейного осциллятора, поэтому будем его искать в виде (2), считая теперь  $A$  и  $\varphi$  не постоянными величинами, а некоторыми неизвестными функциями времени.

Найдем уравнения, которым удовлетворяют наши новые переменные  $A$  и  $\varphi$ . Продифференцируем вначале первое из уравнений (2) по времени, входящему как явно (в аргумент тригонометрической функции), так и неявно (новые переменные зависят от времени) и учтем второе уравнение системы (2):

$$\dot{x} = \dot{A} \cos \theta - A(1 + \dot{\varphi}) \sin \theta = -A \sin \theta, \quad \theta = t + \varphi$$

Откуда следует

$$\dot{A} \cos \theta - A \dot{\varphi} \sin \theta = 0.$$

Подставляя решение (2) в уравнение (1), будем иметь

$$\dot{A} \sin \theta + a \dot{\varphi} \cos \theta = -\mu f(A \cos \theta; -A \sin \theta).$$

Разрешая два последних уравнения относительно  $\dot{A}$  и  $\dot{\varphi}$ , получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\mu f(A \cos \theta; -A \sin \theta) \sin \theta, \\ A \dot{\varphi} &= -\mu f(A \cos \theta; -A \sin \theta) \cos \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

адекватную уравнению (1), но записанную в других переменных, называемых переменными Ван-дер-Поля. Полученная система не является более простой по сравнению с уравнением (1). Однако, если учесть, что  $\mu \ll 1$ , то из нее можно получить приближенную, значительно более простую систему.

Правая часть системы (5) является периодической функцией явно входящего времени  $t = \theta - \varphi$  и зависит от  $A$  и  $\varphi$ . Поскольку  $A$  и  $\varphi$  являются медленно меняющимися функциями времени<sup>1</sup> ( $\dot{A}$  и  $\dot{\varphi}$  - порядка  $\mu$  (5)), то можно их считать постоянными на периоде быстрых осцилляций. Воспользуемся этим и, проинтегрировав уравнения, определим средние значения за период  $T = 2\pi$ . Заметим, что интегрирование можно проводить не по времени, а по  $\theta = t + \varphi$ . В результате получим систему

---

<sup>1</sup> Отметим, что медленность изменения  $A$  и  $\varphi$  не предполагалась и не требовалась заранее. Это получилось автоматически из-за малости нелинейности. В этом отличие метода Ван-дер-Поля от других асимптотических методов.

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(ACos\theta; -ASin\theta) Sin\theta d\theta, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{\mu}{2\pi A} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(ACos\theta; -ASin\theta) Cos\theta d\theta.\end{aligned}\tag{6}$$

Запишем ее в виде

$$\frac{dA}{dt} = \mu\Phi(A), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu\phi(A),\tag{7}$$

где  $\Phi(A)$  и  $\phi(A)$  - средние за период значения периодических функций

$$-f(ACos\theta; -ASin\theta)Sin\theta, \quad -\frac{1}{A}f(ACos\theta; -ASin\theta)Cos\theta$$

зависящие только от  $A$ .

Полученные уравнения (7) и называются системой укороченных или усредненных уравнений. Согласно решению (2) эта система определяет амплитуду и фазу квазигармонических колебаний исходной системы, описываемой уравнением (1). Решения полученной системы укороченных уравнений (7) аппроксимируют при достаточно малых  $\mu$  решения полной системы (5), которая эквивалентна исходному уравнению (1). Поэтому, если мы найдем решения укороченных уравнений, то с помощью соотношений (2) получим приближенные решения исходной системы. В частности, состояния равновесия укороченных уравнений  $A = A_0, \varphi = \varphi_0$  соответствуют синусоидальным периодическим решениям исходного уравнения (1).

Проведем исследование системы укороченных уравнений для некоторых частных случаев.

1. Пусть  $\phi(A) = 0$ .

Этот случай довольно часто встречается на практике, например, при рассмотрении режимов работы ламповых генераторов без учета сеточных токов.

Тогда система укороченных уравнений (7) принимает вид:

$$\frac{dA}{dt} = \mu\Phi(A), \quad \varphi = \varphi_0 = Const.\tag{8}$$

Рассмотрим первое уравнение, которое может исследоваться независимо от второго, т.к. оно зависит только от  $A$ . Найдем состояния равновесия на фазовой прямой  $A$ . Координаты этих состояний равновесия  $A_0$  есть корни уравнения:

$$\Phi(A_0) = 0\tag{9}$$

При этом характеристическое уравнение имеет вид  $p - \mu\Phi'_A(A_0) = 0$  и состояние равновесия будет устойчивым, если

$$\frac{d\Phi}{dA} = \Phi'_A(A_0) < 0$$

и неустойчивым при выполнении обратного неравенства.

Нетрудно представить себе картину фазовых траекторий на плоскости переменных Ван-дер-Поля для системы (8) ( $A$  и  $\varphi$  полярные координаты).

Все интегральные кривые суть прямые, проходящие через начало координат и наклоненные под всевозможными углами  $\varphi = Const$ . Закон движения вдоль каждой из прямых одинаков и определяется первым уравнением системы (7). Корни уравнения (9) определяют радиусы окружностей, каждая точка которых соответствует различным значениям фазы. На рис.1 приведено разбиение на траектории плоскости переменных Ван-дер-Поля для случая трех состояний равновесия укороченного уравнения (8).

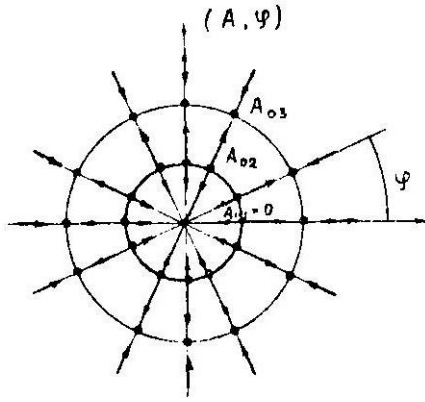


Рис. 1

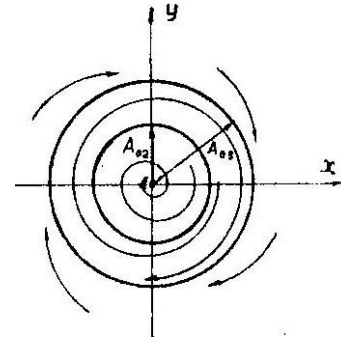


Рис. 2

Перейдем теперь от плоскости переменных Ван-дер-Поля к фазовой плоскости  $xu$  с помощью формул преобразования (2). Фазовый портрет на плоскости  $xu$  может быть получен, если вращать плоскость Ван-дер-Поля по часовой стрелке с круговой частотой  $\omega = 1$  (см. уравнение (1)) вокруг начала координат. Тогда окружности, состоящие из состояний равновесия, перейдут в круговые предельные циклы, имеющие те же радиусы  $A_{0i}$ . Предельные циклы будут устойчивы, если устойчивы состояния равновесия укороченных уравнений, и наоборот. Остальные траектории, представляющие собой отрезки прямых на плоскости переменных Ван-дер-Поля, преобразуются на плоскости  $xu$  в спирали (рис.2).

2. Пусть функция  $\Phi(A) = 0$ , что имеет место в консервативных системах. Система укороченных уравнений (7) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \mu\phi(A). \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, будем иметь

$$A = A_0 = Const, \quad \varphi = \mu\phi(A_0)t + \varphi_0.$$

Подставляя эти выражения в решение (2), получаем

$$x = A_0 \text{Cos}[(1 + \mu\phi(A_0))t + \varphi_0]. \quad (10)$$

Отсюда видно, что исходная система в этом случае совершает незатухающие неизохронные колебания с амплитудой  $A_0$ , определяемой начальными условиями (начальной энергией системы) и частотой  $\omega = 1 + \mu\phi(A_0)$ , зависящей от амплитуды.

Фазовый портрет для этого случая на плоскости Ван-дер-Поля изображен на рис.3 (примем, что  $\phi(A) > 0$ ). На фазовой плоскости  $x, y$  он будет аналогичным.

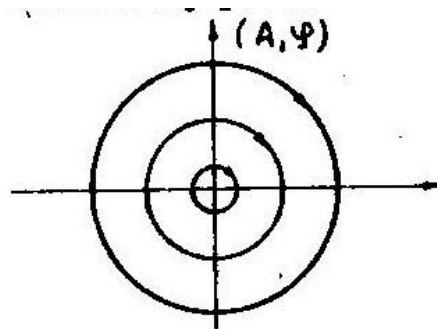


Рис.3

3. При исследовании динамики генераторов на транзисторах, туннельных диодах, лампах при учете сеточных токов, система укороченных уравнений будет иметь общий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \mu\Phi(A), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \mu\phi(A) \end{aligned} \tag{11}$$

Первое уравнение, не зависящее от  $\varphi$ , исследуется отдельно, и его состояния равновесия определяют радиусы предельных циклов или амплитуды автоколебаний.

Пусть  $A = A_0$  - устойчивая амплитуда колебаний, тогда, как и в предыдущем случае, решение исходной системы, соответствующее устойчивому периодическому режиму, запишется в виде (10)

$$x = A_0 \cos[(1 + \mu\phi(A_0))t + \varphi_0]$$

Отличие будет в том, что в данном случае величина амплитуды  $A_0$  определяется свойствами системы, а не начальными условиями. В отличии от первого случая здесь мы имеем определенную поправку на частоту  $\Delta\omega = \mu\phi(A_0)$ .

Построим фазовый портрет в плоскости переменных Ван-дер-Поля (рис.4). Как видно из системы (7), уравнение  $\Phi(A_0) = 0$  определяет радиусы предельных циклов, направление движения по которым определяется знаком функции  $\phi(A_0)$ . В точках, где функция  $\phi(A_0)$  обращается в нуль, направление движения меняется на обратное. Поэтому нанесем на плоскости переменных Ван-дер-Поля не только окружности радиуса  $A_0$  (предельные циклы), но и окружности с радиусами  $\bar{A}$ , определяемые уравнением  $\phi(\bar{A}) = 0$ . Примем, как и в первом случае, что уравнение  $\Phi(A_0) = 0$  имеет три корня и ни одно из ненулевых значений  $\bar{A}$  не совпадает со значением  $A_0$ .

Если вращать фазовый портрет рис. 4 со скоростью  $\omega = 1$  по часовой стрелке, то получим фазовый портрет на плоскости  $x, y$ .

Он будет совершенно аналогичен тому портрету, который получался в первом случае (рис.2), т.к. движения по фазовым траекториям рис.4 происходят со скоростью порядка  $\mu \ll 1$  [1 стр.486].

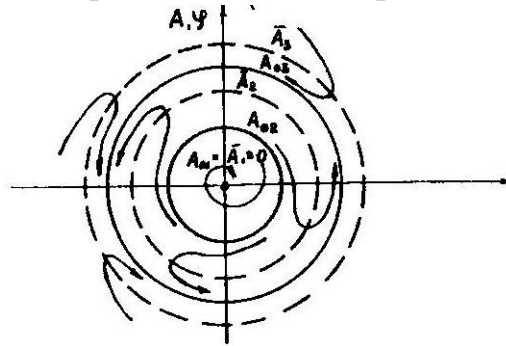


Рис.4

### Укороченные уравнения в комплексных амплитудах.

Изложенный выше метод Ван-дер-Поля позволяет решать задачи при различных аппроксимациях нелинейностей (полиномами, трансцендентными функциями, рядами, кусочно-линейными функциями). Однако, если нелинейность сложная, то усреднение представляет собой технически непростую задачу. В этом случае удобнее пользоваться методом усреднения, представляя решение в виде квазигармонических функций с медленно меняющимися комплексными амплитудами. Такое представление значительно упрощает процедуру усреднения.

Будем искать решение уравнения (1) в виде (3)

$$\begin{aligned} x &= z e^{jt} + z^* e^{-jt}, \\ \dot{x} &= j(z e^{jt} - z^* e^{-jt}), \end{aligned}$$

(12)

где  $z$  - комплексная амплитуда; будем считать ее функцией времени.

Для дальнейшего анализа удобно нелинейную функцию представить в виде двух слагаемых:

$$f(x, \dot{x}) = -\frac{d}{dt} f_1(x) - f_2(x).$$

(13)

Функция  $f_1(x)$  характеризует потери в системе; если  $f_1(x) \equiv 0$ , то система консервативна; если  $\frac{df}{dx} > 0$ , то потери в системе при данных значениях  $x$  положительны (и отрицательны при выполнении обратного неравенства). Как будет ясно из дальнейшего, именно функция  $f_1(x)$  определяет амплитуду автоколебаний.

Функция  $f_2(x)$  выполняет роль нелинейной составляющей восстанавливающей силы, и она определяет поправку к частоте линейной системы.



Таким образом, уравнение исходной системы запишем в виде:

$$\ddot{x} + x = -\mu \frac{d}{dt} f_1(x) - \mu f_2(x). \quad (14)$$

Решение его ищем в виде (12). Из принятой формы решения для (14) следует, что выполняется соотношение :

$$\dot{z}e^{jt} + \dot{z}^*e^{-jt} = 0. \quad (15)$$

Подставляя решение (12) в исходное уравнение (13), получим

$$j(\dot{z}e^{jt} - \dot{z}^*e^{-jt}) = -\mu \frac{d}{dt} f_1(x) - \mu f_2(x). \quad (16)$$

Исключим из системы (15), (16),  $\dot{z}^*$

$$2j\dot{z} = -\mu e^{-jt} \frac{df_1(x)}{dt} - \mu e^{-jt} f_2(x).$$

Так же как и раньше, перейдем к укороченным уравнениям.

Проведем усреднение по времени:

$$2j\dot{z} = -\frac{\mu}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jt} \frac{df_1(x)}{dt} dt + \int_{-\pi}^{\pi} f_2(x) e^{-jt} dt \right],$$

Взяв первый интеграл по частям, и учитывая то, что  $\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) e^{-jt} dt = 0$  т.к.  $f_1 e^{-jt}$  -

функция периодическая, получим

$$2j\dot{z} = -\frac{\mu}{2\pi} \left[ j \int_{-\pi}^{\pi} f_1 e^{-jt} dt + \int_{-\pi}^{\pi} f_2 e^{-jt} dt \right] \quad (17)$$

где  $f_1 = f_1(z e^{jt} + z^* e^{-jt})$ ,  $f_2 = f_2(z e^{jt} + z^* e^{-jt})$ .

Иначе уравнение (17) можно записать в виде

$$2j\dot{z} = -\mu \left[ j \overline{f_1 e^{-jt}} + \overline{f_2 e^{-jt}} \right] \quad (18)$$

где  $\overline{f_1 e^{-jt}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1 e^{-jt} dt$ ,  $\overline{f_2 e^{-jt}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2 e^{-jt} dt$

Очевидно, что при усреднении вклад дадут лишь гармонические составляющие вида  $e^{jt}$ , т.е. процедура усреднения свелась к выделению комплексных амплитуд функций  $f_1$  и  $f_2$  на собственной частоте линейного консервативного осциллятора, равной в нашем случае единице.

Полагая  $z = \rho e^{j\varphi}$ ,  $z^* = \rho e^{-j\varphi}$  и приравнивая к нулю действительную и мнимую части полученного уравнения, придем к укороченным уравнениям для амплитуды<sup>2</sup> и фазы:

$$\begin{aligned} 2\dot{\rho} &= -\mu \rho \tilde{f}_1, \\ 2\dot{\varphi} &= \mu \tilde{f}_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Величины  $\tilde{f}_1$  и  $\tilde{f}_2$  зависят от квадратов амплитуд ( $z z^* = \rho^2$ ) и носят название средней крутизны нелинейностей.

<sup>2</sup> В дальнейшем величину  $\rho$  будем называть амплитудой, хотя фактически она равна половине амплитуды, как это видно из соотношения (4).

Таким образом, мы пришли к уравнениям (19), аналогичным укороченным уравнениям (7): первое уравнение определяет значения амплитуд колебаний и их устойчивость, второе – дает зависимость поправки к частоте от квадрата амплитуды.

Из первого уравнения системы (19) следует, что исходная система имеет состояние равновесия  $\rho = 0$  устойчивое, если  $\tilde{f}'_1(0) > 0$  и неустойчивое в противном случае (учитывая, что правая часть уравнений (19) меньше нуля). Кроме нулевого состояния равновесия, система (19) может иметь предельные циклы, если при некоторых значениях  $\rho = \rho_0$   $\tilde{f}_1$  обращается в нуль. Предельный цикл будет устойчивым, если  $\tilde{f}'_1(\rho_0) > 0$ .

Пусть полином, определяющий среднюю крутизну как функцию  $\rho^2$ , задан в следующем виде

$$\tilde{f}_1 = a_1 + \frac{a_3}{2} \rho^2 \quad (20)$$

В этом случае существует один предельный цикл. На рис.5 представлена зависимость  $\tilde{f}_1$  от  $\rho^2$  для разных знаков коэффициентов  $a_1$  и  $a_3$ , а на рис.6 – соответствующие фазовые портреты.

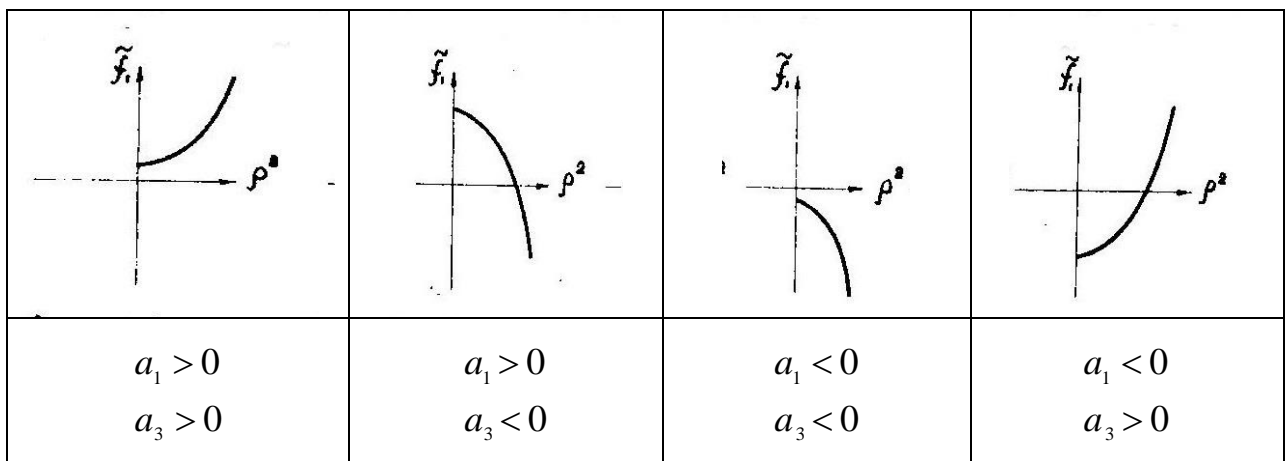


Рис.5

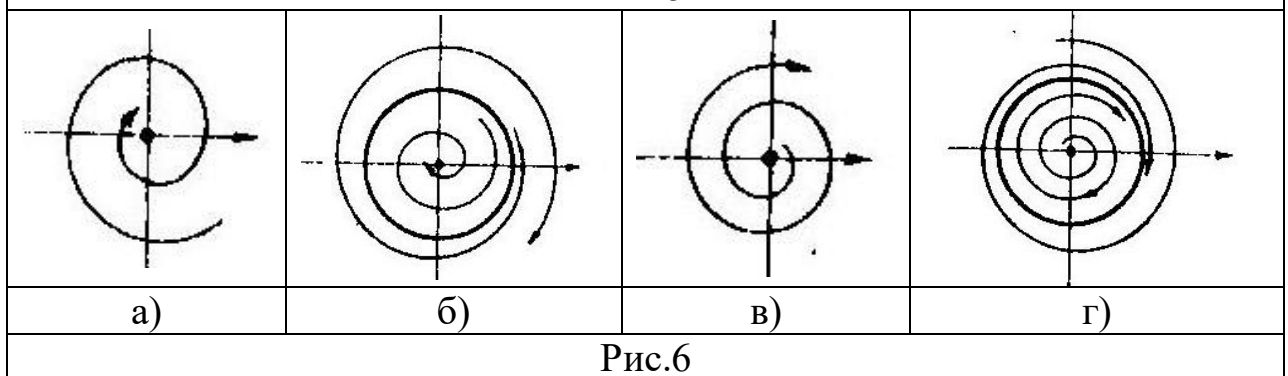


Рис.6

Как видно из рисунка 6, исходная система будет автоколебательной (будет иметь устойчивый предельный цикл) лишь в случае  $a_1 < 0$ ,  $a_3 > 0$ . Очевидно, что в такой системе (при таких знаках коэффициентов нелинейной функции) малые отклонения от состояния равновесия будут нарастать (за счет

линейного инкремента  $a_1$ ), но рост их не будет беспредельным – он ограничится нелинейным членом ( $a_3 > 0$ ).

Если аппроксимировать нелинейность полиномом более высокой степени, то вид зависимостей  $\tilde{f}_1(\rho^2)$  будет определяться не только знаками коэффициентов  $a_n$ , но и соотношением между ними. На рис.7 и 8 представлена зависимость средней крутизны нелинейности от квадрата амплитуды и соответствующие фазовые портреты при аппроксимации нелинейности полиномами 5-ой и 7-ой степени для значений коэффициентов  $\tilde{f}_1$ , соответствующих автоколебательным режимам.

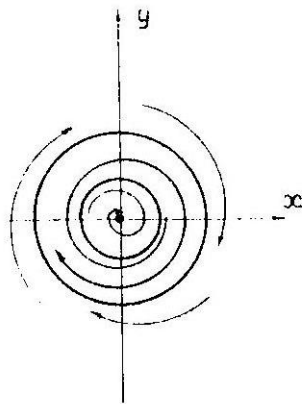
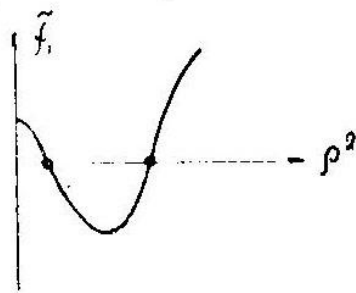


Рис.7

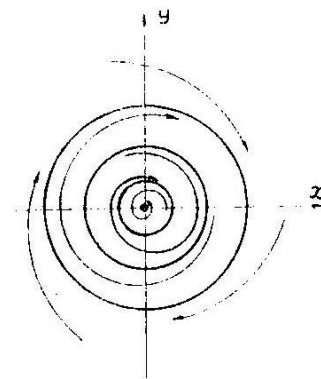
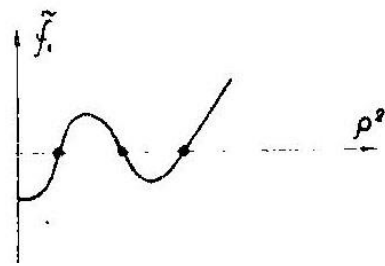


Рис.8

Рис.7 соответствует системе, в которой автоколебания возбуждаются лишь в том случае, когда начальные условия заданы вне неустойчивого предельного цикла. Этот режим возбуждения генератора называют «жестким» в отличие от «мягкого» режима, который устанавливается при любых начальных условиях (рис.6г). Рис.8 соответствует так называемому «сложно-жесткому» режиму возбуждения генератора. В этом случае система имеет два устойчивых предельных цикла и установление того или другого зависит от начальных условий.

Заметим, что укороченные уравнения зависят лишь от нечетной части нелинейности. Поэтому, если нелинейность задана графически, целесообразно графически же выделить нечетную ее часть с помощью приема, определяемого формулой:

$$f_{\text{неч}}(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)],$$

которая получается из соотношений

$$f(x) = f_{\text{чет}}(x) + f_{\text{неч}}(x), \quad f(-x) = f_{\text{чет}}(x) - f_{\text{неч}}(x),$$

а затем аппроксимировать нелинейность подходящей аналитической функцией.

### Литература

1. А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин. Теория колебаний, М., Наука, 1981.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Изд. 2-е, переработанное и дополненное Н. А. Железцовым. — М.: Физматгиз, 1959.
3. Сб. задач по теории колебаний под ред. Л.В. Постников, В.И.Королева, М., Наука, 1978 .

### Пример на применение метода

Рассмотрим колебания, возникающие в контуре с нелинейной индуктивностью. Будем считать, что потокосцепление и ток в катушке связаны соотношением.

$$Li = \Phi + L\Phi^3 \quad (21)$$

Потерями энергии пренебрегаем. Уравнение, описывающее такой контур, имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0.$$

Введем новое безразмерное время  $\tau = \frac{1}{\sqrt{LC}} t$  и, учитывая соотношение (21), получим

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \Phi = -\alpha\Phi^3$$

При условии, что  $\alpha \ll 1$ , т.е. нелинейность мала, мы получаем уравнение типа (1) и можем использовать метод Ван-дер-Поля. Введем  $Q = \dot{\Phi}$  и запишем исходное уравнение в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\dot{\Phi} = Q, \quad \dot{Q} = -\Phi - \alpha\Phi^2. \quad (22)$$

Будем искать решение этой системы в виде

$$\Phi = A \cos(t + \varphi) = A \cos \theta.$$

$$Q = -A \sin \theta$$

и, подставляя его в систему (22), получим

$$\dot{A} \cos \theta - \dot{\varphi} A \sin \theta = 0,$$

$$-A \sin \theta - A \dot{\varphi} \cos \theta = -\alpha (A \cos \theta)^3.$$

Разрешая эту систему относительно  $\dot{A}$  и  $\dot{\varphi}$ , приходим к уравнениям

$$\dot{A} = \alpha (A \cos \theta)^3 \sin \theta, \quad (23)$$

$$A \dot{\phi} = \alpha (A \cos \theta)^3 \cos \theta.$$

Согласно (6), укороченные уравнения системы (23) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\alpha A^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = 0 \\ A \dot{\phi} &= \frac{\alpha A^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\alpha}{8} A^3 \end{aligned} \quad (24)$$

или  $A = A_0$ ,  $\dot{\phi} = \frac{3\alpha}{8} A^2$ , следовательно, амплитуда колебаний остается постоянной и определяется начальными условиями. Фаза и частота колебаний зависят от амплитуды и эта зависимость определяется соотношением  $\omega = 1 + \frac{3\alpha}{8} A_0^2 = \omega_k + \Delta\omega$ , где  $\omega_k = 1$  есть безразмерная частота линейного контура. Фазовые траектории в этом случае представляют собой континуум окружностей, радиус которых зависит от начальных условий (рис.3), а время движения по каждой – от ее радиуса  $\left( T = \frac{1}{\omega} \sim \frac{1}{A_0^2} \right)$ .

Напомним, что метод Ван-дер-Поля является приближенным методом, и оценим погрешность решения в данном примере. Точное интегрирование системы (22) дает

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{d\Phi} &= -\frac{\Phi + \alpha\Phi}{Q}, \\ Q^2 + \Phi^2 &= -\frac{\alpha}{2}\Phi^4 + h. \end{aligned}$$

Т.е. интегральные кривые представляют собой семейство эллипсов, которые тем ближе к окружностям, чем меньше  $\alpha$  (т.е. нелинейность системы).

Таким образом, действительно наше асимптотическое решение, полученное методом Ван-дер-Поля, является тем более точным, чем меньше параметр  $\alpha = \mu$ .

Решим эту же задачу, представляя решение в комплексной форме (3):

$$\begin{aligned} \Phi &= Z e^{j\tau} + Z^* e^{-j\tau}, \\ Q &= jZ e^{j\tau} - jZ^* e^{-j\tau}. \end{aligned}$$

Тогда, подставляя это решение в систему (22), получим

$$\begin{aligned} \dot{Z} e^{j\tau} + \dot{Z}^* e^{-j\tau} &= 0 \\ j\dot{Z} e^{j\tau} - j\dot{Z}^* e^{-j\tau} &= -\alpha (Z^3 e^{3j\tau} + 3Z^2 Z^* e^{j\tau} + 3ZZ^{*2} e^{-j\tau} + Z^{*3} e^{-3j\tau}) \end{aligned}$$

Исключая из этой системы  $\dot{Z}^*$ , получим

$$2j\dot{Z} = -\alpha (Z^3 e^{3j\tau} + 3Z^2 Z^* e^{j\tau} + 3ZZ^{*2} e^{-j\tau} + Z^{*3} e^{-3j\tau}) e^{-j\tau}.$$

После усреднения укороченное уравнение принимает вид:

$$2j\dot{Z} = -3\alpha Z^2 Z^*.$$

Переходя к действительным амплитуде и фазе согласно соотношения  $Z = \rho e^{j\varphi}$ ,  $Z^* = \rho e^{-j\varphi}$ , будем иметь:

$$\dot{\rho} e^{j\varphi} + j\dot{\varphi} \rho e^{j\varphi} = j \frac{3\alpha \rho^3 e^{j\varphi}}{2}.$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим

$$\dot{\rho} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{3\alpha \rho^2}{2}$$

Уравнения получаются аналогичными (24), если учесть, что согласно соотношению (4)  $\rho = \frac{A}{2}$ .

### **Приложение - Электронная лампа**

В трехэлектродной лампе помимо анода существует еще один электрод – сетка, расположенная между анодом и катодом. В этом случае электрическое поле вблизи катода будет зависеть не только от напряжения на аноде  $V_a$ , но и от напряжения на сетке  $V_g$ , т.е. анодный ток будет являться функцией двух величин: сеточного и анодного напряжения  $I_a = \varphi(V_g + DV_a)$ . Однако, если напряжение на сетке хотя и положительны, но не велики, то сила тока в цепи сетки будет мала по сравнению с силой анодного тока, и наличием тока в цепи сетки при упрощенном рассмотрении можно пренебречь. Если выбирать различные значения анодного напряжения, но оставлять их постоянными, получим семейство характеристик, сдвинутых относительно друг друга.

Параметры лампы, характеризующие ее, это  $D = -\left(\frac{\partial V_g}{\partial V_a}\right)_{I_a=const}$  -

*проницаемость* лампы. Второй основной параметр – это *крутизна*

*характеристики* лампы  $S = \left(\frac{\partial I_a}{\partial V_g}\right)_{V_a=const}$ . Третий параметр – внутреннее

сопротивление лампы  $R_i = \left(\frac{\partial V_a}{\partial I_a}\right)_{V_g=const}$ .

Мы ограничимся рассмотрением только зависимости анодного тока от сеточного напряжения и только одним параметром – крутизной характеристики лампы. Для применения математического анализа к таким схемам, мы должны выразить аналитически характеристику лампы, т.е. аппроксимировать ее какой-то кривой. Обычный путь – это представить кривую в виде полинома, состоящего из нескольких членов. При этом интересующие нас участки характеристики могут быть удовлетворительно аппроксимированы небольшим числом членов, например третьей или пятой степенью  $V_g$ .

Если через  $V_g$  мы обозначим переменное напряжение на сетке лампы, отсчитываемое от постоянного сеточного смещения, то при  $V_g = 0$  напряжение на сетке соответствует «рабочей точке характеристики» и

$$I_a = \varphi(V_g) = I_0 + S_1 V_g + S_2 V_g^2 + S_3 V_g^3 + S_4 V_g^4 + S_5 V_g^5.$$

Здесь  $I_0$  - анодный ток в «рабочей точке», при отсутствии переменного напряжения на сетке. Соответствующим выбором координат мы можем избавиться от этого слагаемого.

Далее,  $S(V_g) = \frac{d\varphi}{dV_g} = S_1 + 2S_2 V_g + 3S_3 V_g^2 + \dots$  и  $S(0) = S_1$  - это крутизна

характеристики в «рабочей точке». При нормальных условиях работы лампы рабочую точку устанавливают на поднимающейся части характеристики, т.е.  $S_1 > 0$ . Наличие нечетных членов необходимо при учете несимметричности характеристики относительно рабочей точки.