

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет**

**М.И. Мотова
В.В. Петров**

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 010800 «Радиофизика», и специальностям 010801 «Радиофизика и электроника», 010802 «Фундаментальная радиофизика и физическая электроника».

Нижний Новгород
2012

УДК 534.1
ББК 22.213
М85

М85 ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ: Авторы: Мотова М.И., Петров В.В.
Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский
государственный университет, 2012. – 24с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Попова Л.Л.

В пособии рассматривается движение частиц в обобщенно-потенциальных полях, приведены примеры решения типичных задач и задачи для самостоятельной работы.

Разработка рекомендуется для студентов радиофизического факультета дневного и вечернего обучения, а так же для студентов физико-математических факультетов.

Ответственный за выпуск:
зам. председателя методической комиссии радиофизического факультета
ННГУ, д.ф.-м.н., проф. Е.З. Грибова

УДК 534.1
ББК В 236.352

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2012

Содержание

1. Цель работы	4
2. Определение и свойства центрально-симметричного поля	4
3. Аналитическое решение задачи о движении в центрально-симметричном поле.....	6
4. Качественное исследование движения частицы в центральном поле.....	7
5. Задача двух тел	14
6. Движение заряженной частицы в магнитном поле	16
7. Задачи для самостоятельной работы	19
8. Литература.....	23

1. Цель работы

Целью работы является изучение движения частиц в полях применительно к случаям центрально-симметричного и магнитного полей. В пособии приведены необходимые сведения из теории и рассмотрены примеры, демонстрирующие приёмы решения задач и характерные особенности движения частиц для конкретных случаев полей. Пособие призвано помочь в изучении соответствующего раздела классической механики.

2. Определение и свойства центрально-симметричного поля

Центрально-симметричным полем называют силовое потенциальное поле, энергия которого $U(\vec{r})$ зависит только от расстояния $r = |\vec{r}|$ между местоположением частицы и неподвижной точкой, называемой центром поля:

$$U(\vec{r}) = V(r). \quad (1.1)$$

О таком поле говорят еще, как о поле со сферической симметрией. С полем (1.1) связано поле вектора силы \vec{F} , определяемое известным соотношением

$$\vec{F} = -\frac{\partial V(r)}{\partial \vec{r}}, \quad (1.2)$$

откуда, с учётом того, что $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$, будем иметь

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.3)$$

Здесь \vec{r} – радиус-вектор, направленный из центра поля в точку мгновенного положения частицы.

Из (1.3) следует, что вектор силы, действующий на частицу в центрально-симметричном поле коллинеарен \vec{r} . При этом, согласно (1.3), если $\frac{\partial V(r)}{\partial r} < 0$, то вектор силы будет сонаправлен вектору \vec{r} . Соответствующее

такой силе поле называется отталкивающим. В случае $\frac{\partial V(r)}{\partial r} > 0$ вектор \vec{F}

направлен в сторону, противоположную \vec{r} , и соответствующее этому случаю поле называется притягивающим.

В силу коллинеарности векторов \vec{F} и \vec{r} , вектор момента $\vec{M} = (\vec{r} \times \vec{F})$ силы \vec{F} равен нулю. Отсюда следует закон сохранения кинетического момента частицы $\vec{K} = m(\vec{r} \times \vec{v})$. А поскольку векторы \vec{K} и \vec{r} взаимно перпендикулярны, то постоянство \vec{K} означает, что при движении частицы ее радиус-вектор остается в одной плоскости, перпендикулярной \vec{K} , т. е. частица движется по плоской траектории.

Этот же результат можно получить с помощью лагранжева формализма, если исходить из сферической симметрии поля, которая проявляется в том, что функция $V(r)$ зависит явно лишь от одной из трех сферических координат. Выбирая их в качестве обобщенных координат, будем иметь для функции Лагранжа выражение вида

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r). \quad (1.4)$$

Лагранжиан (1.4) не зависит явно от азимутального угла ϕ , т. е. $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ (такая координата называется *циклической*), вследствие чего обобщенный импульс $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$ по этой координате сохраняется:

$$p_\phi = mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi} = \text{const}. \quad (1.5)$$

Величина p_ϕ определяется из начальных условий, и мы можем без ограничения общности положить её равной нулю. В самом деле, поскольку $p_\phi = K_z$, где K_z – проекция вектора кинетического момента \vec{K} на ось z , от которой отсчитывается полярный угол θ , то условие $p_\phi = 0$ означает, что ось z , выбирается в направлении, перпендикулярном к вектору кинетического момента. При этом из (1.5) следует, что

$$\dot{\phi} = 0. \quad (1.6)$$

С учетом (1.6) лагранжиан (1.4) принимает вид

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r). \quad (1.7)$$

Как следует из вышесказанного, лагранжиану (1.7) отвечает движение, происходящее в координатной плоскости $\varphi = \varphi_0$, где $\varphi_0 = \text{const}$ – заданный азимутальный угол. При этом переменные r и θ приобретают смысл полярных координат.

Лагранжиан (1.7) исчерпывающе описывает движение частицы в центрально-симметричном поле. Именно его обычно именуют лагранжианом данной задачи.

3. Аналитическое решение задачи о движении в центрально-симметричном поле

Система, описываемая лагранжианом (1.7) относится к разряду полностью интегрируемых систем, т. е. позволяет найти решение в квадратурах. Это возможно, благодаря наличию двух интегралов движения – обобщенного импульса

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = p \quad (p = \text{const}) \quad (2.1)$$

и обобщенной энергии

$$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E \quad (E = \text{const}). \quad (2.2)$$

Интеграл (2.1) является следствием цикличности координаты θ , интеграл (2.2) – следствием цикличности времени t .

Из (2.1) найдём

$$\dot{\theta} = \frac{p}{mr^2}. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), приведём интеграл энергии к виду

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{\text{эфф}}(r). \quad (2.4)$$

Здесь

$$V_{\text{эфф}} = \frac{p^2}{2mr^2} + V(r). \quad (2.5)$$

Из (2.4) следует, что изменение радиальной переменной не зависит от угла (переменные разделились) и происходит по закону одномерного движения в поле с *эффективным потенциалом* (2.5). Этот закон находится простым интегрированием уравнения

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - V_{\text{эфф}}(r)}, \quad (2.6)$$

получаемого из (2.4), и сводится к квадратуре

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - V_{\text{эфф}}(r)}} + C_1. \quad (2.7)$$

Дифференциальное уравнение для угловой переменной выводится из (2.3) и (2.6) делением $\dot{\theta}$ на \dot{r} и имеет вид

$$\frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{p}{\sqrt{2m}} \frac{1}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{эфф}}(r)}}. \quad (2.8)$$

Интегрированием (2.8) находится вторая квадратура задачи:

$$\theta = \pm \frac{p}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{эфф}}(r)}} + C_2. \quad (2.9)$$

Решения (2.7) и (2.9) дают полное описание поведения системы (1.7). При этом выражение (2.9) определяет связь между r и θ , т. е. – *траекторию движения*. А путём совместного использования (2.7) и (2.9) отыскиваются функции $r(t)$ и $\theta(t)$, т. е. устанавливается *закон движения*.

4. Качественное исследование движения частицы в центральном поле

В основе качественного исследования, так же, как и при аналитическом подходе, лежат выражения (2.3) и (2.4). Из (2.3) следует **знакопостоянство** производной $\dot{\theta}$, означающее, что угловая переменная θ всегда является **монотонной функцией времени**. Монотонный характер временной зависимости переменной θ составляет отличительный признак движения в центральном поле.

Второй качественный признак движения в центральном поле вытекает из (2.4), в силу которого имеет место неравенство

$$E - V_{\text{эфф}}(r) \geq 0. \quad (3.1)$$

Согласно (3.1), разрешены лишь такие значения координаты r , для которых величина $V_{\text{эфф}}(r)$ не превышает полной энергии системы E . Иными словами, закон сохранения энергии **запрещает** частице находиться в тех областях пространства, в которых $V_{\text{эфф}} > E$. И в зависимости от того, попадает ли в разрешённые области пространства нулевое значение r (*падение на центр*), или его бесконечное значение (*инфинитное движение*), различают четыре режима движения:

- а) финитное движение с падением на центр,
- б) инфинитное движение с падением на центр,
- в) финитное движение без падения на центр,
- г) инфинитное движение без падения на центр.

Графическим средством описания указанных режимов движения является *плоскость баланса энергии* (см. рис. 3.1). На ней строится зависимость $V_{\text{эфф}}(r)$ и наносится уровень заданного значения полной энергии E . Абсциссы точек пересечения графиков $V_{\text{эфф}}(r)$ и $E = \text{const}$ являются корнями уравнения $V_{\text{эфф}}(r_i) = E$ и задают границы разрешённых интервалов движения, удовлетворяющих условию (3.1). Как видно из рисунка 3.1, эти интервалы соответствуют участкам кривой $V_{\text{эфф}}(r)$, лежащим под заданным уровнем энергии $E = \text{const}$.

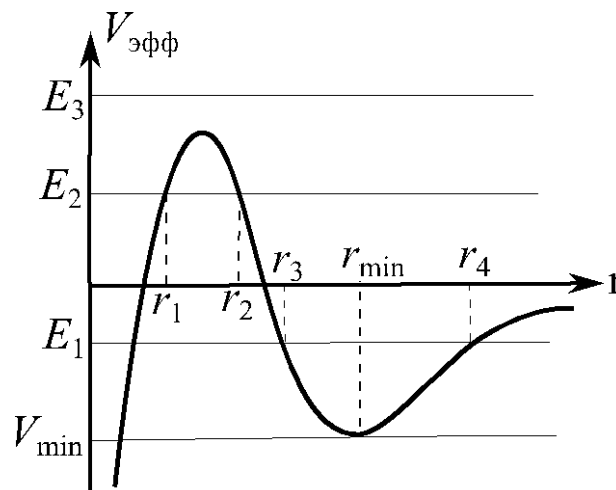


Рис. 3.1. Четыре режима движения частицы:
 а) $E = E_2$, $0 \leq r < r_1$; б) $E = E_3$, $0 \leq r < \infty$;
 в) $E = E_1$, $r_3 \leq r \leq r_4$; г) $E = E_2$, $r_2 \leq r < \infty$

Другим инструментом качественного исследования движения по координате r служит *фазовая плоскость*. На ней с помощью (2.6) строится

семейство траекторий $\dot{r}(r)$ по параметру E . В отличие от плоскости баланса энергии, фазовая плоскость характеризует изменение *состояния* частицы. Связывая значение переменной r с радиальной скоростью \dot{r} , она даёт представление о радиальной картине движения в зависимости от начальных значений r и \dot{r} . На рис. 3.2 приведён пример такого фазового портрета частицы для заданного профиля $V_{эфф}(r)$. Для наглядности он помещён под соответствующей плоскостью баланса энергии.

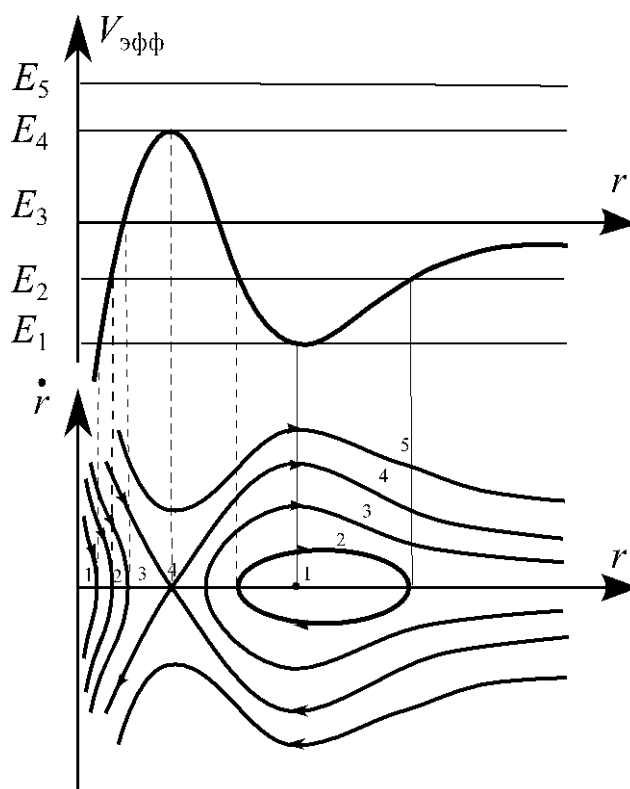


Рис. 3.2. Фазовая плоскость

При исследовании движения частицы удобно характеризовать её начальное состояние с помощью такой величины, как *прицельный параметр h* . По определению он представляет собой расстояние от точки начального положения частицы \vec{r}_0 до прямой, проведённой через центр поля параллельно вектору \vec{v}_0 начальной скорости этой частицы (см. рис. 3.3). С помощью параметра h выражению (2.1) для обобщенного импульса p можно придать особенно простой вид: $p = mv_0 h$, где $v_0 = |\vec{v}_0|$.

В заключение этого раздела охарактеризуем основные типы реальных траекторий частицы и проиллюстрируем их рисунками. Эти траектории подразделяются на три разновидности, отвечающие трём вариантам движения: движению с падением на центр (режимы «а» и «б»), финитному движению без падения на центр (режим «в») и *рассеянию* (режим «г»).

Падение частицы в центр поля, как при финитном, так и при

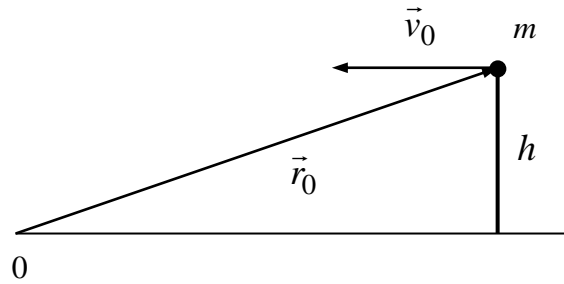


Рис. 3.3

инфинитном режиме движения, происходит по спиралевидной траектории и качественно изображено на рис. 3.4.

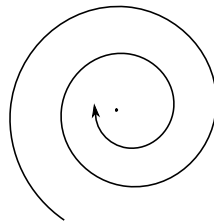


Рис. 3.4. Падение частицы в центр поля

Такой характер траектории обусловлен монотонным убыванием расстояния r в сочетании с монотонным изменением (убыванием, или ростом в зависимости от знака $\dot{\theta}$) угла θ . Условие падения на центр следует из неравенства (3.1), в силу которого r может принимать стремящиеся к нулю значения лишь, если

$$r^2 V(r) \Big|_{r \rightarrow 0} < -\frac{p^2}{2m}. \quad (3.2)$$

Согласно (3.2), при $r \rightarrow 0$ потенциальная энергия $V(r)$ должна стремиться к $-\infty$ пропорционально $-1/r^n$, где $n > 2$, либо по закону $-\alpha/r^2$, где $\alpha > p^2/2m$.

Падая на центр с некоторого расстояния r_0 , частица совершает определённое число оборотов, которое можно оценить с помощью интеграла

$$\theta = \frac{p}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^0 \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{эфф}}(r)}},$$

получаемого из выражения (2.9).

Финитное движение без падения на центр происходит по траектории, лежащей внутри кольца, ограниченного окружностями с радиусами r_3 и r_4 , как изображено на рис. 3.5.

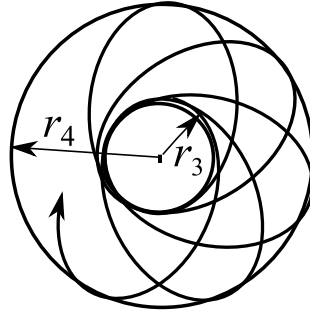


Рис. 3.5. Финитное движение без падения на центр

Оно является периодическим по переменной r , и его период, согласно (2.7), равен

$$T = 2\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{r_3}^{r_4} \frac{dr}{\sqrt{E - V_{\text{эфф}}(r)}}. \quad (3.3)$$

За время T частица повернётся на угол $\Delta\theta$, равный, как следует из (2.9),

$$\Delta\theta = \frac{2p}{\sqrt{2m}} \int_{r_3}^{r_4} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{эфф}}(r)}}. \quad (3.4)$$

И если угол, определяемый (3.4), будет равен рациональной части от 2π , т. е. будет удовлетворять условию $\Delta\theta = 2\pi m/n$, где m и n – целые числа, то траектория частицы замкнётся через n периодов, в ходе которых частица совершит m оборотов.

Как видно из рисунка 3.1, финитное движение без падения на центр происходит в потенциальной яме. При условии $E = V_{\text{min}}$ оно вырождается в движение по окружности радиуса r_{min} , где r_{min} – координата минимума эффективной потенциальной энергии: $V_{\text{эфф}}(r_{\text{min}}) = V_{\text{min}}$. При движении

вблизи дна потенциальной ямы $V_{\text{эфф}}$, где $|(E - V_{\text{эфф}})/E| \ll 1$, описание траектории и динамики частицы можно существенно упростить, заменив точный профиль $V_{\text{эфф}}(r)$ его квадратичной аппроксимацией, т. е. положив

$$V_{\text{эфф}}(r) \approx V_{\text{эфф}}(r_{\min}) + V_{\text{эфф}}''(r_{\min})\xi^2/2. \quad (3.5)$$

Здесь $\xi = r - r_{\min}$. Подставляя эту аппроксимацию в уравнение радиальных колебаний

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{эфф}}(r)}{\partial r},$$

получим для переменной ξ уравнение гармонического осциллятора с частотой

$$\omega = \sqrt{V_{\text{эфф}}''(r_{\min})/m}. \quad (3.6)$$

Следовательно, r будет меняться по гармоническому закону

$$r = r_{\min} + A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3.7)$$

где A и φ_0 – амплитуда и фаза радиальных колебаний. Заметим, что выражение (3.6) может быть найдено из (3.3) подстановкой в него аппроксимации (3.5).

С помощью (3.7) путём подстановки его в (2.3) легко находится закон изменения угла θ . С точностью до слагаемых, линейных по амплитуде A , он имеет вид

$$\theta = \frac{p}{mr_{\min}^2} \left(t - \frac{A}{r_{\min}\omega} \sin(\omega t + \varphi_0) \right) + \text{const}. \quad (3.8)$$

Траектория движения по закону (3.7), (3.8) изображена на рис. 3.6.

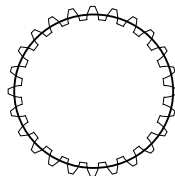


Рис. 3.6. Траектория движения вблизи состояния равновесия

Перейдём к траекториям последнего из названных вариантов движения – рассеяния. Различают две разновидности рассеяния – рассеяние в

отталкивающем поле и рассеяние в притягивающем поле. В первом случае движение происходит так, как изображено на рис. 3.7. При этом *минимальное расстояние подлёта* r_2 (расстояние до точки «поворота») определяется из условия

$$V_{\text{эфф}}(r_2) = E, \quad (3.9)$$

а *угол рассеяния* χ даётся выражением $\chi = \pi - 2\theta_0$, где

$$\theta_0 = \frac{p}{\sqrt{2m}} \int_{r_2}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{эфф}}(r)}}. \quad (3.10)$$

При расчётах интеграл (3.10) удобно выразить через прицельный параметр h и скорость частицы на бесконечности v_{∞} в виде

$$\theta_0 = h \int_{r_2}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2} - \frac{2V(r)}{mv_{\infty}^2}}}, \quad (3.11)$$

воспользовавшись условием $E = mv_{\infty}^2 / 2$.

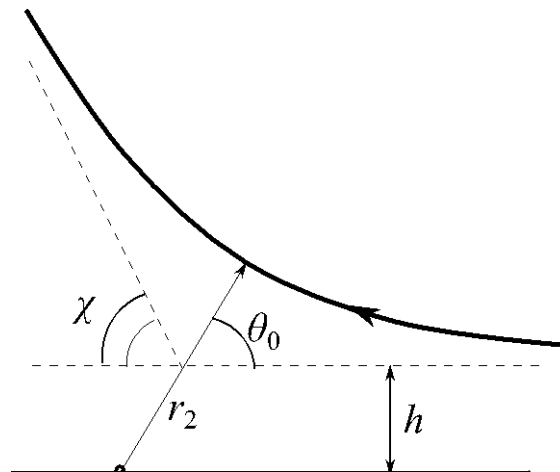


Рис. 3.7. Рассеяние в отталкивающем поле

Траектории рассеяния в притягивающем поле изображены на рис. 3.8. Для них остаются в силе равенства (3.9) - (3.11).

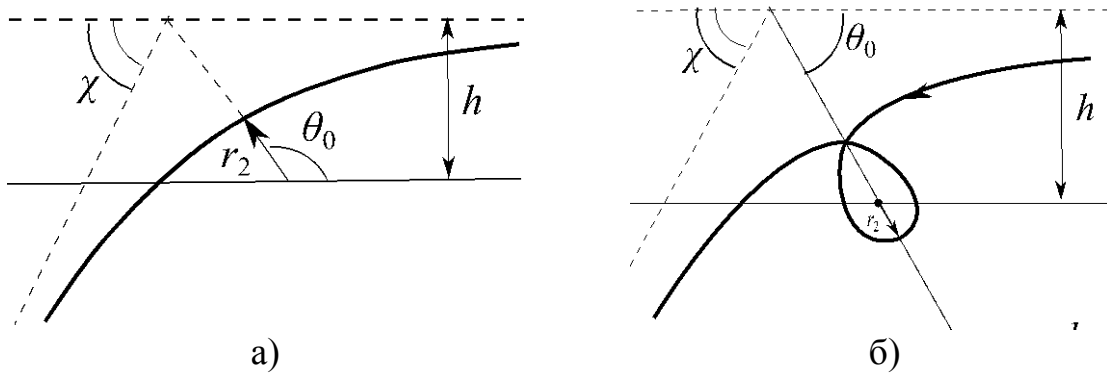


Рис. 3.8. Варианты рассеяния в притягивающем поле

При этом, вследствие обратимости движения по r , траектории в обоих случаях симметричны относительно направления на точку минимального расстояния подлёта и происходят по одинаковому «сценарию». В первой половине движения расстояние от частицы до центра поля монотонно убывает до минимального r_2 . Затем, по тому же закону, но – с обратным знаком, монотонно нарастает от r_2 до бесконечности. При этом обе фазы движения сопровождаются монотонным изменением угла – нарастанием, если частица вращается вокруг центра против часовой стрелки, что отвечает случаю $p_\theta > 0$, и убыванием – в противоположном случае.

5. Задача двух тел

К задаче о движении частицы в центральном поле приводит так называемая *задача двух тел*, т. е. задача о движении двух материальных точек с массами m_1 и m_2 , описываемых лагранжианом вида

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 - V(r), \quad (4.1)$$

в котором потенциальная энергия V взаимодействия частиц зависит лишь от расстояния $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ между ними. Описание движения такой системы можно упростить, разделив его на **независимые друг от друга** движение центра масс с радиус-вектором

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.2)$$

и относительное движение с радиус-вектором

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (4.3)$$

Для этого достаточно в системе (4.1) произвести преобразование переменных, перейдя от \vec{r}_1, \vec{r}_2 к \vec{R}, \vec{r} по закону

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad (4.4)$$

получаемому из (4.2), (4.3). При этом лагранжиан (4.1) преобразуется к виду

$$L = L_{\text{ц.м.}} + L_{\text{отн}}, \quad (4.5)$$

где

$$L_{\text{ц.м.}} = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2,$$

а

$$L_{\text{отн}} = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r). \quad (4.5a)$$

Здесь $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведённая масса.

Согласно (4.5), $\partial L / \partial \vec{R} = \partial L_{\text{ц.м.}} / \partial \vec{R} = 0$, т. е. координаты центра масс являются циклическими. Следовательно, скорость центра масс сохраняется ($\dot{\vec{R}} = \text{const}$) и задача о движении двух тел сводится к задаче о движении одной частицы массы μ в центрально-симметричном поле $V(r)$ с лагранжианом (4.5a). Из её решения с помощью (4.4) находится закон движения $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$.

В ряде задач скорость $\dot{\vec{R}}$ удобно положить равной нулю, что равнозначно переходу в инерциальную систему отсчёта, движущуюся со скоростью центра масс. Помещая начало этой системы отсчёта в центр масс, т. е. полагая $\vec{R} = 0$, будем иметь:

$$L = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r).$$

При этом связь абсолютного и относительного движений принимает вид

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

6. Движение заряженной частицы в магнитном поле

Движение заряженной частицы в магнитном поле представляет собой движение под действие гироскопических сил и обладает рядом особенностей, отличающих его от движения в центральном поле. Рассмотрим эти особенности на примере заряженной частицы в поле магнитного диполя (задача № 32 [5]). Такая система описывается лагранжианом

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{e}{c}(\vec{A}\dot{\vec{r}}), \quad (5.1)$$

где $\vec{A} = (\vec{\mu} \times \vec{r})/r^3$, а $\vec{\mu}$ – вектор магнитного момента. Рассматриваемая система обладает азимутальной симметрией, что делает целесообразным использование для её описания цилиндрической системы координат. В цилиндрических координатах лагранжиан (5.1) запишется в виде

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho} + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e\mu\rho^2\dot{\phi}}{c(\rho^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (5.2)$$

В (5.2) учтено, что $A_\rho = 0$, $A_\phi = \mu\rho/(\rho^2 + z^2)^{3/2}$, $A_z = 0$.

Поскольку (5.2) не зависит от времени явно ($\partial L/\partial t = 0$), то в рассматриваемой системе сохраняется обобщённая энергия, т. е.

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) = \text{const}. \quad (5.3)$$

Ещё один интеграл движения следует из условия цикличности ϕ :

$$p_\phi = m\rho^2\dot{\phi} + \frac{e\mu\rho^2}{c(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \text{const}. \quad (5.4)$$

Исключая $\dot{\phi}$ из (5.3) с помощью (5.4), получим следующее выражение для интеграла энергии:

$$E = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{1}{2m\rho^2} \left(p_\phi - \frac{e\mu\rho^2}{c(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2. \quad (5.5)$$

Воспользуемся интегралом (5.5) для качественного исследования движения рассматриваемой заряженной частицы с начальными условиями $z(0) = \dot{z}(0) = 0$. При этих условиях, как следует из уравнения Лагранжа для переменной z

$$m\ddot{z} + \frac{3e}{2c} \frac{\mu\rho z\dot{\varphi}}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} = 0,$$

траектория частицы будет лежать в плоскости $z = 0$ и интеграл энергии (5.5) сведётся к одномерному выражению

$$E = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + V_{\text{эфф}}(\rho), \quad (5.6)$$

где

$$V_{\text{эфф}}(\rho) = \frac{1}{2m\rho^2} \left(p_{\varphi} - \frac{e\mu}{c\rho} \right)^2. \quad (5.7)$$

Профиль $V_{\text{эфф}}(\rho)$ изображён на рис. 5.1а для случая $p_{\varphi} < 0$ и на рис. 5.1б для случая $p_{\varphi} > 0$.

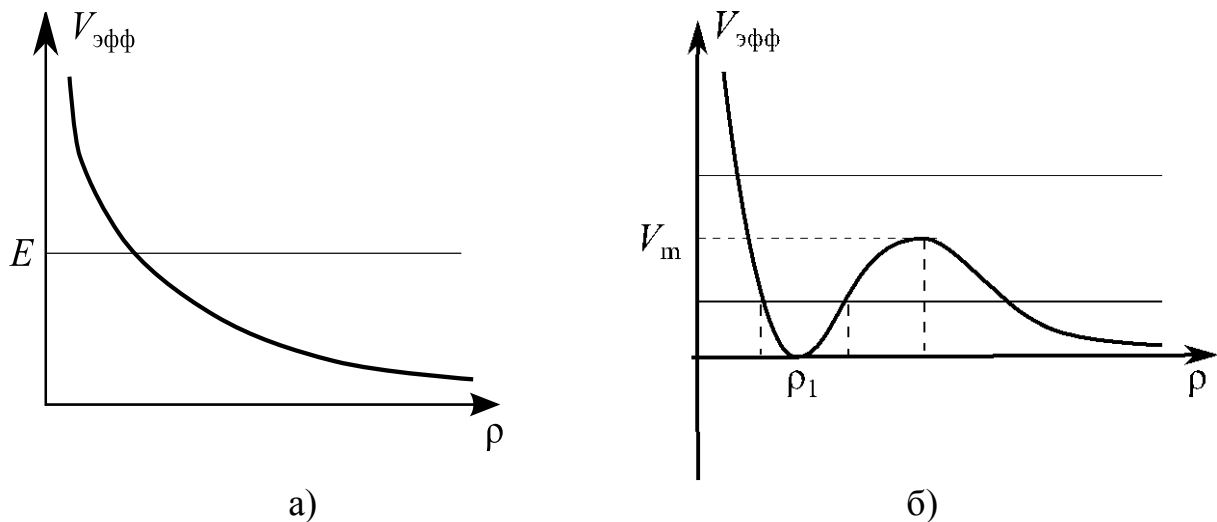


Рис. 5.1. Профиль эффективной потенциальной энергии:
а) $p_{\varphi} < 0$, б) $p_{\varphi} > 0$.

В случае $p_{\varphi} < 0$ движение возможно при условии $E > 0$ и носит характер рассеяния, как изображено на рис. 5.2 (кривая 1). Подобно рассеянию в центрально симметричном поле, ему присуще монотонное изменение угла φ , обусловленное знакопостоянством угловой скорости

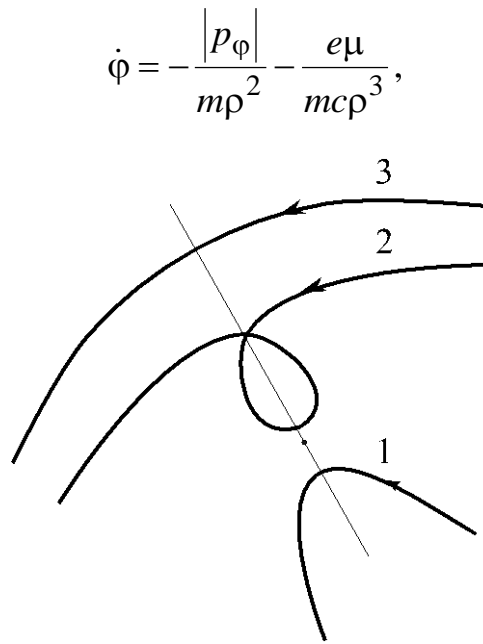


Рис. 5.2. Траектории рассеяния

выражение для которой находится из (5.4) при условии $z = 0$.

В случае $p_{\phi} > 0$, наряду с рассеянием, возможно финитное движение (без падения на центр).

При $E > V_m$, где $V_m = c^2 p_{\phi}^4 / 32me^2\mu^2$, рассеяние происходит по траектории, изображённой на рис. 5.2 (кривая 2). При этом, согласно выражению для угловой скорости

$$\dot{\phi} = \frac{p_{\phi}}{m\rho^2} - \frac{e\mu}{mcr^3}, \quad (5.8)$$

её знак не остаётся постоянным – $\dot{\phi} > 0$ при $\rho > \rho_1 = e\mu / cp_{\phi}$ и $\dot{\phi} < 0$ при $\rho < \rho_1$. Следовательно, направление вращения частицы в точках $\rho = \rho_1$ («точках остановки» по ϕ) меняется на обратное. Заметим, что $V_{\text{эфф}}(\rho_1) = 0$. Второй вариант рассеяния наблюдается при $0 < E < V_m$. Соответствующая ему траектория изображена на рис. 5.2 (кривая 3). Как и траектория «1», она характеризуется знакопостоянством угловой скорости, но, в отличие от траектории «1», эта скорость имеет положительный знак.

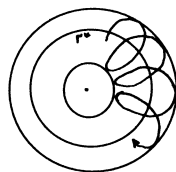


Рис. 5.3. Траектория финитного движения

Траектория финитного движения при $0 < E < V_m$ изображена на рис. 5.3. Движение по ней, как и по траектории «2», сопровождается изменением направления вращения частица вокруг диполя в точках $\rho = \rho_1$. В этих точках вектор скорости параллелен радиус-вектору частицы.

7. Задачи для самостоятельной работы

1. Частица движется в поле $V = -\frac{\alpha}{r}$, при заданных начальных значениях v_0, h, r_0 . Найти условие движения по окружности, ее радиус и угловую скорость вращения.

2. Найти условие рассеяния частицы в бесконечность и минимальное расстояние подлета к центру для частицы, двигающейся из бесконечности с начальной скоростью v_0 и прицельным параметром h в поле $V = -\frac{\alpha}{r^2}$.

3. Описать качественно характер движения частицы в поле $V = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^3}$ при различных значениях обобщенного импульса и энергии [5].

4. Точке массы m , находящейся на некотором расстоянии от центра поля $V = \frac{\epsilon r^3}{3}$, сообщена скорость \vec{v} , составляющая прямой угол с направлением на центр поля. При каком значении скорости \vec{v} точка будет двигаться по окружности?

5. Найти траектории и законы движения частицы в поле $U = \begin{cases} -V & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$ (сферическая прямоугольная потенциальная яма) при различных значениях начальной энергии и обобщенного момента [5].

6. Частица в поле $V = \frac{\alpha}{r^n}$ уходит на бесконечность с расстояния $r \neq 0$. Будет ли число оборотов, сделанных вокруг центра, конечным [5]?
7. Частица падает в центр поля $U = -\frac{\alpha}{r^n}$ с расстояния $r \neq 0$. Будет ли число оборотов, сделанных вокруг центра, конечным [5]?
8. Частица движется из бесконечности с начальной скоростью v_0 и прицельным параметром h в потенциальном поле $V = -\frac{\alpha}{r}$. Найти минимальное расстояние подлета частицы к центру.
9. Найти траекторию движения частицы при $E = 0$ в поле $U = -\frac{\alpha}{r^2}$.
10. Определить траекторию частицы в поле $V = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$. Найти время падения частицы в центр поля с расстояния r_0 . Сколько оборотов вокруг центра сделает при этом частица [5]?
11. Найти условие, при котором частица в поле $V = -\frac{\alpha}{r}$ упадет в центр поля. Найти траекторию такого падения.
12. Описать качественно движение заряженной частицы в поле $V = \frac{1}{2}\lambda r^2$, где r — расстояние от оси z (поле равномерно заряженного цилиндра), при наличии однородного магнитного поля h , параллельного оси z [5].
13. Частица движется в поле силы тяжести и магнитном поле, заданном векторным потенциалом $\vec{A}(0, hx, 0)$. Найти закон движения из уравнений Лагранжа.
14. Заряд e движется в однородном постоянном магнитном поле и поле неподвижного заряда Q . Найти условие, при котором заряд будет двигаться по окружности и радиус этой окружности.
15. Заряженная частица движется в однородном постоянном магнитном поле. Найти решение уравнений движения в цилиндрических координатах.

16. Найти интегралы движения заряженной частицы в поле $\vec{h} = \frac{g\vec{r}}{r^3}$ магнитного монополя, если компоненты его векторного потенциала в сферической системе координат имеют вид: $A_r = 0, A_\varphi = -\frac{h \operatorname{ctg} \theta}{r}, A_\theta = 0$ [5].

17. Заряженная частица движется в магнитном поле, заданном векторным потенциалом $\vec{A} = (0, \frac{1}{2} h\rho, 0)$ в цилиндрической системе координат

- а) по сфере;
- б) по параболоиду вращения
- в) по эллипсоиду вращения.

Найти интегралы движения уравнений Лагранжа.

18. Частица движется в поле силы тяжести и магнитном поле, заданном векторным потенциалом $\vec{A} (0, hx^2, 0)$. Провести качественное исследование движения.

19. Точка движется в однородном постоянном магнитном поле $\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{h} \times \vec{r}]$. по плоскости, составляющей угол α с вектором магнитного поля \vec{h} . Найти интегралы движения уравнений Лагранжа.

20. Заряженная частица движется по окружности радиуса R в поле, заданном векторным потенциалом $\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{h} \times \vec{r}]$, в плоскости перпендикулярной вектору \vec{h} . Найти закон движения частицы.

21. Электрон $-e_0$ движется в поле квадрупольной линзы, потенциал которого $\varphi = \frac{U_0}{d^2} (x^2 - z^2)$, и в однородном постоянном магнитном поле $\vec{h} = h_0 \vec{n}_z$. Определить закон движения электрона.

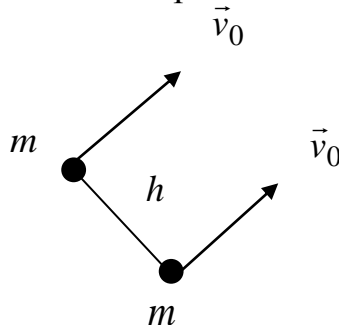
22. С внутренней обкладки цилиндрического конденсатора вылетает электрон с начальной скоростью, перпендикулярной оси конденсатора. Найти критическое значение угла вылета электрона, при котором его траектория не будет касаться наружной пластины конденсатора.

23. Показать, что задача о движении двух заряженных частиц в однородном электрическом поле \vec{E} сводится к задачам о движении центра масс и о движении частицы в заданном поле [5].

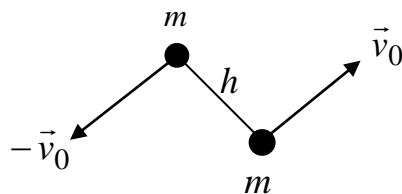
24. При каком условии разделяются задачи о движении центра масс и об относительном движении для двух заряженных частиц в однородном магнитном поле? Векторный потенциал выбрать в виде $\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{h} \times \vec{r}]$.

25. На покоящуюся частицу массы m_1 из бесконечности налетает частица массы m_2 с начальной скоростью v_0 и прицельным параметром h , взаимодействующая с ней по закону $U(r) = -\frac{\alpha}{r^4}$. Найти наименьшее расстояние, на которое сблизятся частицы.

26. Две частицы начинают двигаться в одном направлении с одинаковыми начальными скоростями v_0 на расстоянии h друг от друга в поле $U = -\frac{\alpha}{r}$, как изображено на рисунке. Найти время до их столкновения.

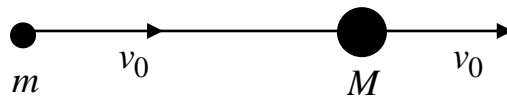


27. Две частицы массы m начинают двигаться в противоположном направлении с одинаковыми начальными скоростями v_0 на расстоянии h друг от друга в поле $U = -\frac{\alpha}{r}$. На какое расстояние частицы приблизятся друг к другу.



28. Частицы с массами m и M и с зарядами e и $-e$, соответственно, находятся на расстоянии r_0 друг от друга. Найти время столкновения

частиц, если они имеют одинаковые начальные скорости v_0 , и движутся по прямой, как изображено на рисунке.



8. Литература

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика. М.: Наука, 1965.
2. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.
3. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975.
4. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965.
5. Коткин Г. Я., Сербо В. Г. Сборник задач по классической механике. М.: Наука, 1977.

Марина Ильинична **Мотова**
Валерий Владимирович **Петров**

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. . Уч-изд. л.
Заказ № . Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01