

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского**

**А.В. Половинкин  
К.Г. Мишагин**

# **ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОГО ШУМА НА СРЕДНЮЮ ЧАСТОТУ СПИНОВОГО ГЕНЕРАТОРА**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов  
ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 03.04.03 «Радиофизика»

Нижний Новгород  
2016

УДК 537.86  
ББК В.236.352+236.355  
П-52

Рецензент: д.ф.-м.н. **Г.В. Осипов**

П-52 Половинкин А.В., Мишагин К.Г. ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОГО ШУМА НА СРЕДНЮЮ ЧАСТОТУ СПИНОВОГО ГЕНЕРАТОРА: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 20 с.

В пособии на примере модели спинового генератора с шумом описан вывод и проведен анализ уравнения Фоккера-Планка. В результате исследования показано, что тепловой шум приводит к сдвигу средней частоты генерации спиновых колебаний.

Пособие предназначено для студентов радиофизического факультета Нижегородского госуниверситета, специализирующихся в области теории нелинейных колебаний и статистической радиофизики.

Ответственный за выпуск:  
заместитель председателя методической комиссии  
радиофизического факультета ННГУ,  
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 537.86  
ББК В.236.352+236.355

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2016

## Содержание

1. Введение.....	4
2. Структура спинового генератора и математическая модель без шума.....	4
3. Динамика модели в случае аксиальной симметрии без учета влияния шума	8
4. Учет теплового шума в модели спинового генератора.....	9
5. Уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности распределения угловых координат .....	11
6. Стационарные плотности распределения фазовых переменных в случае аксиальной симметрии.....	12
7. Зависимость средней частоты спинового генератора от параметра спин-поляризованного тока $J$ .....	16
8. Заключение .....	18
9. Вопросы для контроля.....	18
10. Список литературы .....	19

## 1. Введение

С момента теоретического предсказания возможности генерации колебаний в спиновых вентелях, сделанных в работах Слончевского [1] и Берже [2] в 1996 году, и последующего экспериментального подтверждения, спиновые генераторы продолжают привлекать исследователей. Данный интерес во многом связан с перспективами их практического использования. Отметим, что спиновые генераторы имеют как преимущества (малые размеры, возможность перестройки частоты с помощью управления протекающим через структуру током, генерация в СВЧ диапазоне), так и недостатки (малая мощность, относительно высокий уровень шума). Кроме практического интереса спиновые генераторы привлекательны для исследований благодаря разнообразию динамических явлений: многомодовая динамика, образование вихрей, эффект гистерезиса при синхронизации внешним сигналом и др.. В предыдущем учебно-методическом пособии [3] приводится пример возможных динамических режимов спиновых генераторов. Одной из главных особенностей таких генераторов является наличие нелинейной зависимости частоты колебаний от их амплитуды. Данная особенность приводит к эффекту гистерезиса при синхронизации, а также к увеличению уровня фазового шума по сравнению предсказанием линейной теории [4]. В данном учебно-методическом пособии объясняется еще одно явление, заключающееся в сдвиге частоты генерации, обусловленном тепловым шумом. На примере решения актуальной научной задачи приводится пример вывода и аналитического анализа уравнения Фоккера-Планка.

## 2. Структура спинового генератора и математическая модель без шума

Спиновые генераторы реализуются на основе тонкой структуры (рис. 1), состоящей из двух слоев ферромагнетика, разделенных немагнитным проводящим материалом или диэлектрической прослойкой, через которую осуществляется туннелирование электронов. К структуре прикладывается внешнее напряжение, вызывающее ток электронов перпендикулярно плоскости слоев. При протекании через ферромагнитный слой происходит спиновая поляризация электронов тока вдоль направления намагниченности слоя (предполагается, что толщина слоя больше длины поперечной спиновой релаксации для электронов тока). Толщина неферромагнитной прослойки достаточно мала (меньше длины спиновой диффузии), можно считать, что при прохождении через прослойку электроны тока сохраняют свою поляризацию. В

неферромагнитном слое в результате отражений на границе с ферромагнетиком происходит накопление неравновесных спинов, за счет которых осуществляется взаимодействие между магнитными моментами ферромагнитных слоев. Управление намагниченностью и возбуждение колебаний реализуется в одном из слоев, который называется свободным. Второй слой – фиксированный является более толстым по сравнению со свободным слоем ( $d_s \gg d$ ), за счет этого его намагниченность можно приближенно считать постоянной. Намагниченность фиксированного слоя можно также закрепить с помощью дополнительного антиферромагнитного слоя, что возможно в случае, если намагниченность фиксированного слоя параллельна плоскости контактов (на рис. 1 представлена отличная конфигурация, при которой намагниченность фиксированного слоя перпендикулярна плоскости контактов и параллельна оси  $z$ ).

Для управления намагниченностью свободного слоя необходима высокая плотность тока (порядка  $10^7$  А/см<sup>2</sup>), которую можно получить при достаточно малых поперечных размерах структуры  $< 250$  нм. В экспериментах используются структуры двух типов: структуры с наноразмерным контактом и наностолбики.

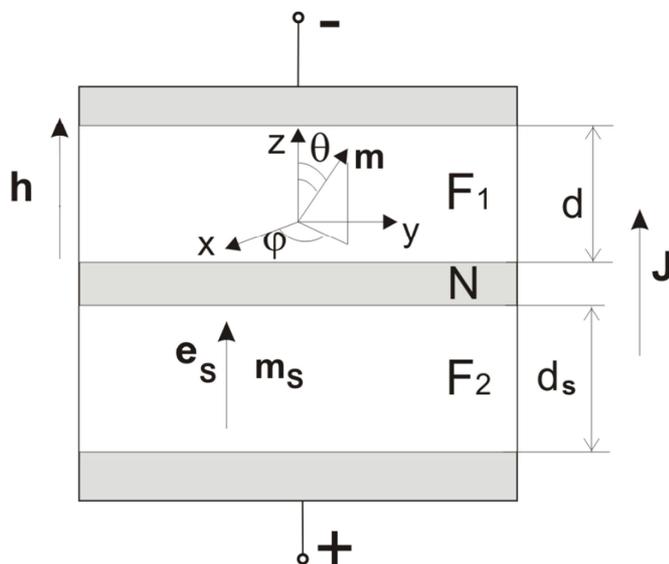


Рис. 1. Структура спинового вентиля в виде наностолбика

Рассмотрим структуру типа наностолбика (рис. 1), которая позволяет применить для описания динамики намагниченности свободного слоя  $\mathbf{M}$  макроскопическую монодоменную модель Ландау-Лифшица (1) с дополнительным слагаемым  $\mathbf{T}_s$ , введенным Слончевским, имеющим размерность момента силы и описывающим передачу вращательного момента, вызванную протеканием через структуру спин-поляризованного тока (spin-

transfer torque) [1]. Полученное в рамках монодоменной модели уравнение для магнитного момента  $\mathbf{M}$  имеет вид (в отличие от пособия [3] здесь мы будем предполагать запись в системе СГС):

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma(\mathbf{H}_{\text{eff}} \times \mathbf{M}) + \mathbf{T}_L + \mathbf{T}_S, \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Рис. 2 иллюстрирует действие моментов сил, входящих в уравнение (1), на намагниченность свободного слоя.

В системе (1)  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  – эффективное магнитное поле, обусловленное внешним магнитным полем  $\mathbf{H}$ , и учитывающее магнитную анизотропию среды ( $\mathbf{n}$  – направление оси легкой намагниченности),  $\gamma$  – абсолютное значение гиромагнитного отношения для электрона. Первое слагаемое в уравнении (1) отвечает за прецессию магнитного момента в магнитном поле. В отсутствие слагаемых  $\mathbf{T}_L$  и  $\mathbf{T}_S$  система (1) была бы консервативной, магнитный момент прецессировал бы с частотой  $\gamma\mathbf{H}_{\text{eff}}$ .

Слагаемое  $\mathbf{T}_L$  описывает действие диссипативных сил на намагниченность в ферромагнетике, оно может быть записано в двух различных формах: в форме Ландау-Лифшица (2) и в форме Гильберта (3).

$$\mathbf{T}_L = -\lambda^* (\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}})), \quad (2)$$

$$\mathbf{T}_L = \alpha (\mathbf{M} \times \dot{\mathbf{M}}). \quad (3)$$

В (2), (3)  $\lambda^*$ ,  $\alpha$  – коэффициенты, характеризующие релаксацию намагниченности. Если  $\mathbf{T}_S = 0$ , то уравнение (1) со слагаемым  $\mathbf{T}_L$  в форме (2) эквивалентно уравнению (1) со слагаемым в форме (3), при следующей замене параметров:

$$\gamma = \gamma' / (1 + \alpha^2), \quad \lambda^* = \gamma' \alpha / (1 + \alpha^2). \quad (4)$$

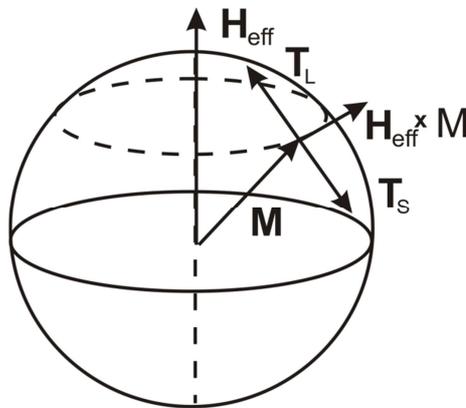


Рис. 2. Моменты сил, действующие на намагниченность свободного слоя

Несмотря на математическую эквивалентность на данный момент времени нет устоявшегося мнения, какая из форм является более корректной. В данном пособии будет использоваться модель со слагаемым в форме Ландау-Лифшица (2).

Благодаря действию диссипативного слагаемого  $\mathbf{T}_L$  прецессия намагниченности в модели (1) при  $\mathbf{T}_S = 0$  всегда является затухающей. В стационарном состоянии вектор намагниченности направлен вдоль вектора эффективного магнитного поля.

Третье слагаемое в (1) –  $\mathbf{T}_S$ , полученное Слончевским, описывает влияние спинов электронов, отраженных от фиксированного слоя, на намагниченность свободного слоя.

$$\mathbf{T}_S \propto j_e (\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{e}_s)) . \quad (5)$$

В (5)  $j_e$  – плотность электрического тока, протекающего через структуру,  $\mathbf{e}_s$  – направление намагниченности фиксированного слоя (рис. 1). Как показано на рис. 2, вектор  $\mathbf{T}_S$  противоположно направлен вектору  $\mathbf{T}_L$ , что может привести при достаточно высоком значении плотности электрического тока к неустойчивости режима стационарной намагниченности свободного слоя.

Рассмотрим модель (1) в безразмерном виде для контакта, представленного на рис. 1:

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \mathbf{h}_{\text{eff}} \times \mathbf{m} - \lambda (\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}})) + J (\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_s)) . \quad (6)$$

В уравнении (6) время измеряется в единицах  $(4\pi\gamma M_s)^{-1}$ ,  $\gamma$  – абсолютное значение гиромагнитного отношения для электрона,  $M_s$  – величина намагниченности насыщения, вектор намагниченности свободного слоя  $\mathbf{m}$  нормирован на величину  $M_s$ ,  $\lambda$  – нормированный параметр магнитной релаксации Ландау-Лифшица, параметр  $J$  характеризует величину эффектов, связанных с переносом спинов током, протекающим через рассматриваемую структуру.

В системах (1), (6) имеет место закон сохранения величины намагниченности  $|\mathbf{m}|^2 = 1$ , так как магнитные силы всегда действуют перпендикулярно на вектор магнитного момента:  $\mathbf{m} \cdot (d\mathbf{m}/dt) = 0$ . Таким образом, динамика системы происходит на сферическом многообразии фазового пространства. В силу того, что многообразие является двумерным, динамика системы исключает сложное хаотическое поведение и поддается достаточно простому анализу.

### 3. Динамика модели в случае аксиальной симметрии без учета влияния шума

Рассмотрим случай полной аксиальной симметрии модели, когда внешнее магнитное поле, намагниченность фиксированного слоя и главная ось кристалла свободного магнитного слоя направлены параллельно оси  $\mathbf{z}$ . В этом случае эффективное магнитное поле в уравнении (6) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{h}_{\text{eff}} = h \cdot \mathbf{e}_z + k_{\text{eff}} m_z \mathbf{e}_z. \quad (7)$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$\mathbf{m} = \cos \varphi \sin \theta \cdot \mathbf{e}_x + \sin \varphi \sin \theta \cdot \mathbf{e}_y + \cos \theta \cdot \mathbf{e}_z. \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в уравнение (6) получим динамические уравнения для угловых координат вектора намагниченности свободного слоя:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -\lambda \sin \theta (h_z + k_{\text{eff}} \cos \theta - J/\lambda), \\ \dot{\varphi} = h_z + k_{\text{eff}} \cos \theta. \end{cases} \quad (9)$$

В (9) уравнения не связаны между собой, при этом для анализа динамических режимов достаточно ограничиться рассмотрением первого уравнения.

При  $J/\lambda < h_z - |k_{\text{eff}}|$  существует два состояния равновесия: устойчивое  $O_1$  с координатой  $\theta = 0$  и неустойчивое  $O_2$  с координатой  $\theta = \pi$ . Таким образом, если ток недостаточно велик, то устойчивый режим соответствует стационарной намагниченности вдоль направления эффективного магнитного поля.

В области параметров  $-|k_{\text{eff}}| < J/\lambda - h_z < |k_{\text{eff}}|$  состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  неустойчивы, а устойчивым является состояние равновесия  $O_3$ :

$$\theta^* = \arccos \left( \frac{J/\lambda - h_z}{k_{\text{eff}}} \right), \quad (10)$$

которое соответствует устойчивому предельному циклу системы (9) и режиму прецессии магнитного момента вокруг оси  $\mathbf{z}$ . Координата  $\theta^*$  есть угол прецессии.

При  $J/\lambda > h_z + |k_{\text{eff}}|$  устойчивым является состояние равновесия  $O_2$ , соответствующее режиму стационарной намагниченности свободного слоя, противоположного направлению эффективного магнитного поля.

Таким образом, изменять намагниченность свободного слоя возможно без изменения внешнего магнитного поля. Для этого достаточно управлять током, протекающим через контакт. Управление током позволяет выбрать либо режим колебаний, либо один из режимов стационарной намагниченности.

Рассмотрим свойства спиновых колебаний, которые возникают в области параметров  $-|k_{\text{eff}}| < J/\lambda - h_z < |k_{\text{eff}}|$ . Подставляя (10) во второе уравнение (9) находим, что частота прецессии намагниченности есть (рис. 3):

$$\omega_{st} = J/\lambda. \quad (11)$$

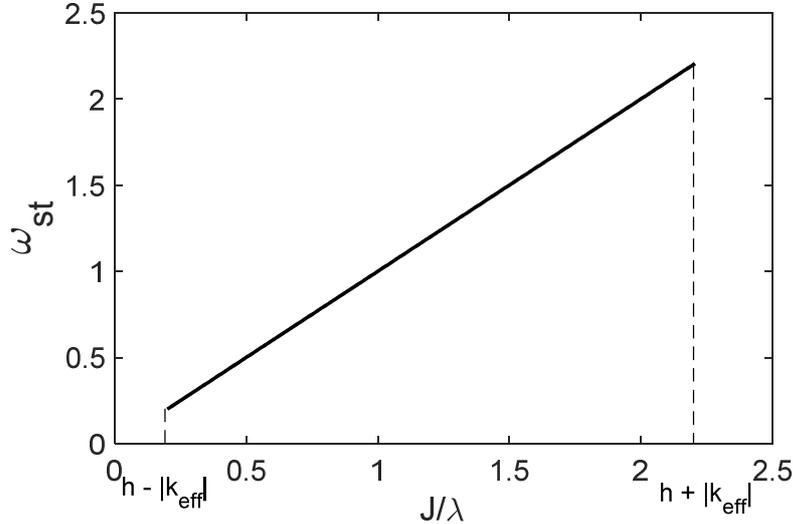


Рис. 3. Иллюстрация линейной зависимости частоты спинового генератора от тока в модели (9) при  $h_z = 1.2$ ,  $k_{\text{eff}} = -1$

Частота колебаний пропорциональна току, можно сказать, что спиновый генератор является генератором, управляемым током [5]. Такое свойство спиновых генераторов является крайне привлекательным для их практического использования.

Амплитуда спиновых колебаний также зависит от тока. В данном частном случае под амплитудой колебаний понимается величина:

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \sin \theta^* = \sqrt{1 - \left( \frac{J/\lambda - h_z}{k_{\text{eff}}} \right)^2}. \quad (12)$$

Из (11) и (12) можно сделать вывод о том, что частота спинового генератора нелинейно зависит от амплитуды колебаний, или говорят, что имеет место нелинейный сдвиг частоты [4].

#### 4. Учет теплового шума в модели спинового генератора

Вследствие возможности при отличной от нуля абсолютной температуре стохастической переориентации микроскопических магнитных моментов ферромагнетика (из-за наличия спиновых волн (магнонов), их взаимодействия с фононами и т.д.), не все нескомпенсированные микроскопические магнитные моменты ферромагнетика находятся в одинаковом энергетическом состоянии,

обеспечивающем минимальное значение термодинамических потенциалов [6]. С макроскопической точки зрения наличие такого стохастического разброса в ориентациях магнитных моментов как раз и приводит к диссипации энергии, которая может быть описана добавлением слагаемого  $\mathbf{T}_L$  в уравнение (1). С другой стороны, поскольку указанное изменение микроскопических магнитных моментов происходит постоянно и носит непредсказуемый характер, оно может быть описано введением дополнительного шумового слагаемого в уравнение (1). Так как при макроскопическом описании причиной изменения магнитного момента свободного слоя  $\mathbf{M}$  может быть только внешнее магнитное поле (в отсутствие спин-поляризованного тока), W.F. Brown [7] предложил вводить это *дополнительное* слагаемое путём замены:

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} \rightarrow \mathbf{H}_{\text{eff}} + \tilde{\mathbf{H}}(t), \quad (13)$$

где  $\tilde{\mathbf{H}}(t)$  – флуктуации магнитного поля. С использованием флуктуационно-диссипативной теоремы им было показано, что для изотропной модели трения (когда величина  $\mathbf{T}_L$  задаётся равенством (3), в котором параметр  $\alpha$  является скалярной величиной), флуктуации  $\tilde{\mathbf{H}}(t) = \{H_x, H_y, H_z\}$  должны быть изотропным белым гауссовым шумом с функцией корреляции

$$\langle H_i(t_1)H_j(t_2) \rangle = \mathfrak{D}_H \delta_{ij} \delta(t_2 - t_1), \quad (14)$$

и интенсивностью белого шума  $\mathfrak{D}_H$ , равной:

$$\mathfrak{D}_H = 2k_B T \alpha / V. \quad (15)$$

В (14) и (15)  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака,  $k_B$  – константа Больцмана,  $T$  – абсолютная температура,  $\alpha$  – безразмерный коэффициент затухания в слагаемом Гильберта,  $V$  – объем магнитного домена, образующего свободный слой.

Следуя работе [7], но также учитывая добавочное слагаемое Слончевского, описывающее перенос магнитного момента спин-поляризованным током [1], запишем уравнения Ланжевена стохастической динамики наногенератора в системе СГС в присутствии флуктуаций магнитного поля в виде:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \left[ \mathbf{H}_{\text{eff}} + \tilde{\mathbf{H}}(t) + (\alpha / \gamma) \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right] + \beta \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{e}_S). \quad (16)$$

Вследствие того, что  $d\mathbf{M}/dt \perp \mathbf{M}$ , равенство (16) легко может быть разрешено относительно  $d\mathbf{M}/dt$ . После введения единичного вектора намагниченности:  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_S$  и безразмерного времени  $\tau = 4\pi\gamma M_S t$ , полученное уравнение может быть переписано уже в безразмерных переменных

и параметрах. В полученном уравнении будут присутствовать малые (порядка  $10^{-2}$ ) параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , описывающие диссипацию энергии ( $\alpha$ ) при уменьшении перпендикулярной оси вращения компоненты вектора  $\mathbf{m}$  и противоположное влияние переноса магнитного момента благодаря спин-поляризованному току ( $\beta$ ). После отбрасывания слагаемых второго порядка малости это уравнение будет совпадать с уравнением, в котором диссипативное слагаемое записано в форме Ландау-Лифшица (6), дополненным флуктуационным слагаемым:

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = (\mathbf{h}_{\text{eff}} + \tilde{\mathbf{h}}(\tau)) \times \mathbf{m} - \lambda(\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}})) + J(\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_s)), \quad (17)$$

где

$$\mathbf{h}_{\text{eff}} = \frac{\mathbf{H}_{\text{ext}}}{4\pi M_S}, \quad \tilde{\mathbf{h}}(\tau) = \frac{\tilde{\mathbf{H}}(\tau)}{4\pi M_S} = \{\tilde{h}_x, \tilde{h}_y, \tilde{h}_z\}, \quad (18a)$$

$$\lambda = \alpha(1 + O(\alpha)) \approx \alpha, \quad J = \beta(1 + O(\alpha)) \approx \beta, \quad (18b)$$

$$\langle \tilde{h}_i(\tau_1) \tilde{h}_j(\tau_2) \rangle = \mathfrak{D}_h \delta_{ij} \delta(\tau_2 - \tau_1). \quad (19)$$

Сопоставляя (19) и (14), учитывая замену переменных (18), а также замену времени, которая приводит к тому, что  $\delta(t) = \delta(\tau/4\pi\gamma M_S) = 4\pi\gamma M_S \delta(\tau)$ , в результате получим:

$$\mathfrak{D}_{h(\tau)} = 4\pi\gamma M_S \mathfrak{D}_{h(t)} = 4\pi\gamma M_S \mathfrak{D}_H / (4\pi M_S)^2 = \gamma \mathfrak{D}_H / (4\pi M_S). \quad (20)$$

## 5. Уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности распределения угловых координат

Поскольку частота вращения вектора  $\mathbf{m}(t)$  в рассматриваемом нами симметричном случае совпадает со скоростью изменения сферической координаты  $\varphi$ , перейдём от векторного уравнения (17) к уравнениям Ланжевена стохастической динамики на единичной сфере для точки, указывающей направление вектора  $\mathbf{m}(t)$ :

$$\dot{\theta} = f_1(\theta, \varphi) + G_{1j} \tilde{h}_j, \quad (21a)$$

$$\dot{\varphi} = f_2(\theta, \varphi) + G_{2j} \tilde{h}_j. \quad (21b)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается суммирование по повторяющимся индексам,  $\theta$  – полярный,  $\varphi$  – азимутальный угол,  $\tilde{h}_j$  при  $j = 1, 2$  и  $3$  – соответственно  $x$ ,  $y$  и  $z$ -проекции вектора  $\tilde{\mathbf{h}}$ , а компоненты матрицы  $G_{ij}$  равны:

$$\begin{aligned}
G_{11} = G_{\theta x} &= -\sin \varphi, & G_{21} = G_{\varphi x} &= -\cos \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\
G_{12} = G_{\theta y} &= \cos \varphi, & G_{22} = G_{\varphi y} &= -\sin \varphi \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\
G_{13} = G_{\theta z} &= 0, & G_{23} = G_{\varphi z} &= 1.
\end{aligned} \tag{22}$$

Найдём кинетические коэффициенты  $K_i^{(1)}$  и  $K_{ij}^{(2)}$  уравнения Фоккера-Планка

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x^i} \left( K_i^{(1)} \cdot W \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left( K_{ij}^{(2)} \cdot W \right). \tag{23}$$

для двумерной плотности вероятности  $W(\theta, \varphi)$  распределения сферических координат  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \varphi$ , используя выражения (21а), (21б) и (22), а также известные соотношения, связывающие (при условии взаимной независимости источников белого шума  $\tilde{h}_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ) кинетические коэффициенты  $K_i^{(1)}$  и  $K_{ij}^{(2)}$  с коэффициентами стохастических уравнений Ланжевена (7), (см., например, [7, 8]):

$$K_i^{(1)} = f_i(\theta, \varphi) + \frac{\mathfrak{D}_{h(\tau)}}{2} \frac{\partial G_{is}}{\partial x^j} G_{js}, \quad K_{ij}^{(2)} = \mathfrak{D}_{h(\tau)} G_{is} G_{js}. \tag{24}$$

Заменяя в найденных выражениях для  $K_i^{(1)}$  и  $K_{ij}^{(2)}$ ,  $i, j = 1, 2$ , индексы 1, 2 соответственно на  $\theta$  и  $\varphi$ , получим:

$$K_{\theta}^{(1)} = f_1(\theta, \varphi) + \frac{\mathfrak{D}_{h(\tau)}}{2} \cot(\theta), \quad K_{\varphi}^{(1)} = f_2(\theta, \varphi), \tag{25}$$

$$K_{\theta\theta}^{(2)} = \mathfrak{D}_{h(\tau)}, \quad K_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{\mathfrak{D}_{h(\tau)}}{\sin^2 \theta}, \quad K_{\theta\varphi}^{(2)} = K_{\varphi\theta}^{(2)} = 0. \tag{26}$$

## 6. Стационарные плотности распределения фазовых переменных в случае аксиальной симметрии

Отметим, что в наиболее простом для аналитического исследования симметричном случае, когда внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}_{\text{eff}}$  параллельно вектору намагниченности свободного слоя  $\mathbf{m}$ , функции  $f_{1,2}$  зависят только от полярного угла  $\theta$  (см. уравнения (21)):

$$f_1(\theta, \varphi) = f_{\theta}(\theta) = \lambda \sin \theta \left( \frac{J}{\lambda} - (h + k_{\text{eff}} \cos \theta) \right), \tag{27}$$

$$f_2(\theta, \varphi) = f_{\varphi}(\theta) = (h + k_{\text{eff}} \cos \theta). \tag{28}$$

В этом случае согласно (25) и (26) все кинетические коэффициенты в уравнении Фоккера-Планка (23) не будут зависеть от переменной  $\varphi$ , поэтому стационарная плотность распределения переменной  $\varphi$  равна  $W_{\varphi st}(\varphi) = const = 1/2\pi$ , а для определения стационарного распределения  $W_{\theta st}(\theta)$  переменной  $\theta$  будем использовать очевидное для симметричного случая равенство:

$$W_{st}(\theta, \varphi) dS = W_{\theta st}(\theta) \cdot W_{\varphi st}(\varphi) d\theta d\varphi, \quad (29)$$

где  $W_{st}(\theta, \varphi)$  – стационарное решение уравнения (23) с кинетическими коэффициентами (25), (26), а  $dS = \sin \theta d\theta d\varphi$  – площадь участка на единичной сфере, ограниченной меридианами  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$  и параллелями  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ .

Далее вспомним, что уравнение Фоккера-Планка (23) может быть также переписано в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -div(\vec{G}),$$

где

$$\vec{G} = \left[ K_i^{(1)} \cdot W + \frac{\partial}{\partial x^j} (K_{ij}^{(2)} \cdot W) \right] \vec{e}_i -$$

– есть вектор плотности потока вероятности, компоненты которого имеют смысл вероятности (обнаружить систему в некоторой области фазового пространства), проходящей в единицу времени через единичную площадку, являющуюся частью границы данной области и перпендикулярную орту  $\vec{e}_i$ .

Отметим, что вследствие очевидной инвариантности задачи относительно поворотов на произвольный угол  $\varphi$ , компонента стационарной плотности потока вероятности в направлении, задаваемом ортом  $\vec{e}_\theta$ , не должна зависеть от переменной  $\varphi$ :  $G_{\theta st}(\theta, \varphi) = G_{\theta st}(\theta)$ , поэтому интегральный стационарный поток вероятности  $Q_{st}(\theta)$  через окружность, совпадающую с параллелью  $\theta = const$  на единичной сфере, равен

$$Q_{st}(\theta) = G_{\theta st} 2\pi \sin \theta, \quad (30)$$

где

$$G_{\theta st} = f_\theta(\theta) W_{st}(\theta, \varphi) - \frac{\mathcal{D}_{h(\varphi)}}{2} \frac{\partial W_{st}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} - \quad (31)$$

есть  $\theta$ -компонента вектора плотности потока вероятности. Вследствие отсутствия источников и стоков вероятности, очевидно:

$$Q_{st}(\theta) = const. \quad (32)$$

Вместе с тем, согласно (30):

$$Q_{st}(\theta)|_{\theta=0} = Q_{st}(\theta)|_{\theta=\pi} = 0. \quad (33)$$

Равенства (17), (18) и (15) одновременно могут выполняться лишь в том случае, если

$$G_{\theta st} = 0. \quad (34)$$

Решая уравнение (34) с учётом равенств (31) и (29), найдём:

$$W_{\theta st}(\theta) = C \exp \left\{ \frac{\lambda}{k_{\text{eff}} \mathfrak{D}_{h(\tau)}} \left[ \frac{J}{\lambda} - h - k_{\text{eff}} \cos(\theta) \right]^2 \right\} \sin(\theta), \quad (35)$$

где  $C$  – константа нормировки.

Как видно из выражения (35), при фиксированных отношении  $\mathfrak{D}_{h(\tau)}/\lambda$  и коэффициенте анизотропии  $k_{\text{eff}}$ , вид стационарной плотности вероятности  $W_{\theta st}(\theta)$  определяется параметром  $J/\lambda - h$ .

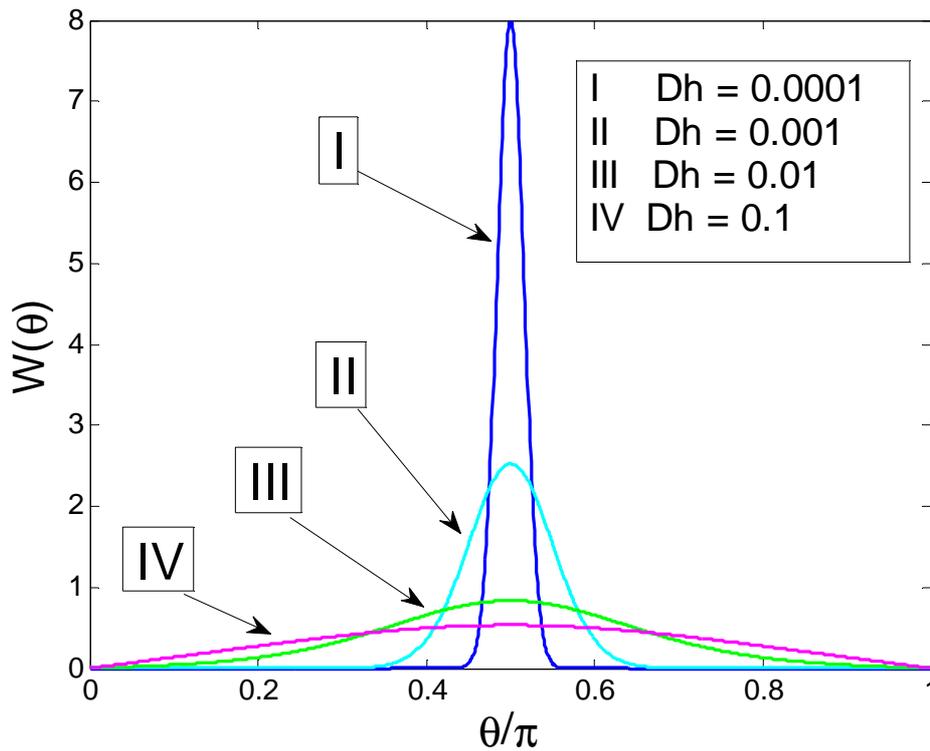


Рис. 5. Стационарная плотность вероятности переменной  $\theta$  при  $J/\lambda = h = 1,2$

На рис. 5 приведены графики стационарной плотности вероятности  $W_{\theta st}(\theta)$  для различных значений интенсивности шума внешнего магнитного

поля и значения параметра  $J/\lambda - h$ , соответствующего середине области генерации:  $J/\lambda - h = 0$

Очевидно, в случае, когда  $J/\lambda - h = 0$ , максимумы плотности вероятности не смещаются при увеличении интенсивности шума.

На рис. 6 представлены графики стационарной плотности вероятности при значении параметра  $J/\lambda - h = k_{\text{eff}}$ , соответствующего границе области генерации.

Как видно из рисунка, максимум плотности вероятности при увеличении интенсивности шума смещается по направлению к середине интервала  $(0, \pi)$  относительно значения, соответствующего полярному углу в отсутствие флуктуаций.

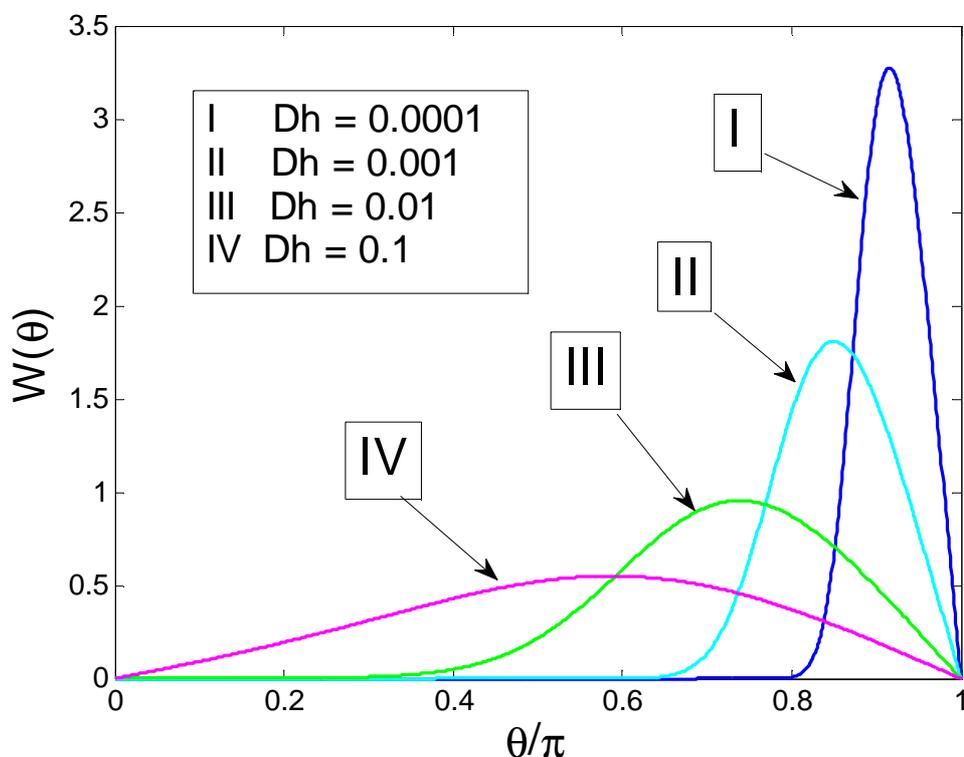


Рис. 6. Стационарная плотность вероятности переменной  $\theta$  при соотношении параметров  $J/\lambda = h + |k_{\text{eff}}| = 2,2$

В случае выхода параметра  $J/\lambda$  за верхнюю границу  $h + |k_{\text{eff}}|$  области генерации в отсутствие шума (см. рис. 7), видно, что плотность вероятности распределения угла  $\theta$  по-прежнему целиком сосредоточена в интервале  $(0, \pi)$ , при этом смещение максимума по направлению к середине интервала сохраняется. Однако при достаточно малой дисперсии флуктуаций магнитного поля  $\mathcal{D}_{h(\tau)}$  угол  $\theta$  с наибольшей вероятностью будет принимать значения, близкие к граничным (в нашем случае к  $\pi$ ).

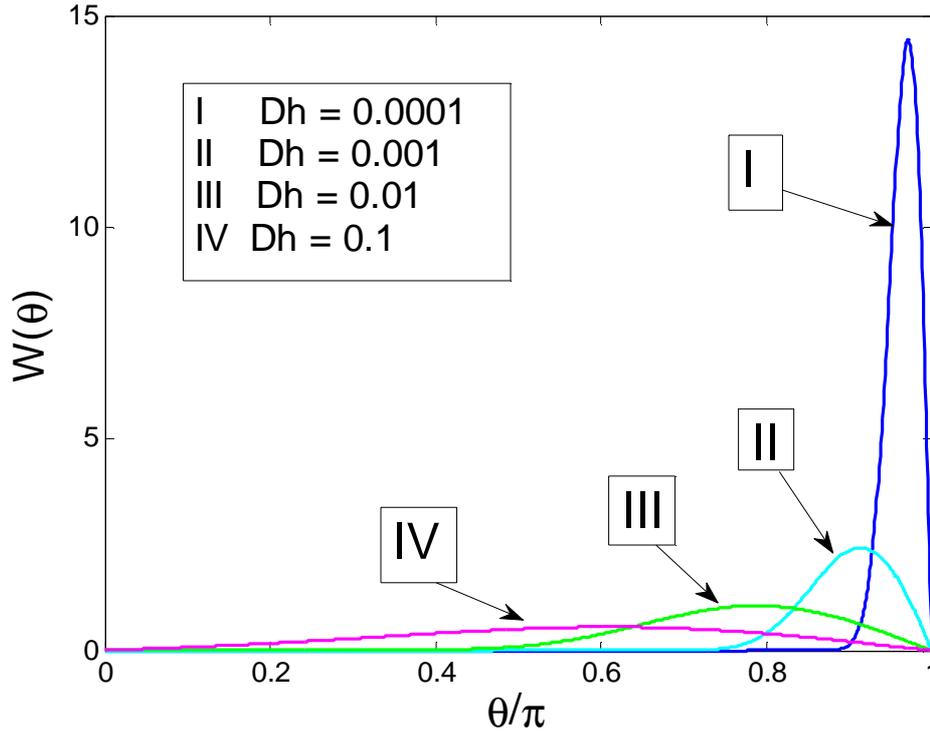


Рис. 7. Стационарная плотность вероятности переменной  $\theta$  при соотношении параметров  $J/\lambda = 2.5 > h + |k_{\text{eff}}|$

Отметим, что в случае малой и умеренной интенсивности флуктуаций магнитного поля  $\mathfrak{D}_{h(\tau)} \leq 0.001$  наибольший разброс значений полярного угла  $\theta$  соответствует значениям параметров на границе области генерации:

$$J/\lambda - h = \pm k_{\text{eff}}. \quad (36)$$

## 7. Зависимость средней частоты спинового генератора от параметра спин-поляризованного тока $J$

Усредняя уравнение (21б) для средней частоты вращения магнитного момента в симметричном случае с учётом (28б) получим:

$$\omega = \langle \dot{\varphi} \rangle = \langle f_2(\theta, \varphi) \rangle = h + k_{\text{eff}} \cdot \langle \cos(\theta) \rangle, \quad (37)$$

где для вычисления  $\langle \cos(\theta) \rangle$  используется равенство  $\langle \cos(\theta) \rangle = \int_0^\pi \cos(\theta) W_{\theta st}(\theta) d\theta$  и выражение (35). Известно, что при отсутствии флуктуаций в симметричном случае частота спинового генератора линейно зависит от величины спин-поляризованного тока:  $\omega = J/\lambda$ , изменяясь в

пределах от  $h - k_{\text{eff}}$  до  $h + k_{\text{eff}}$  (см., например, [5], а также рис. 3 данного методического пособия).

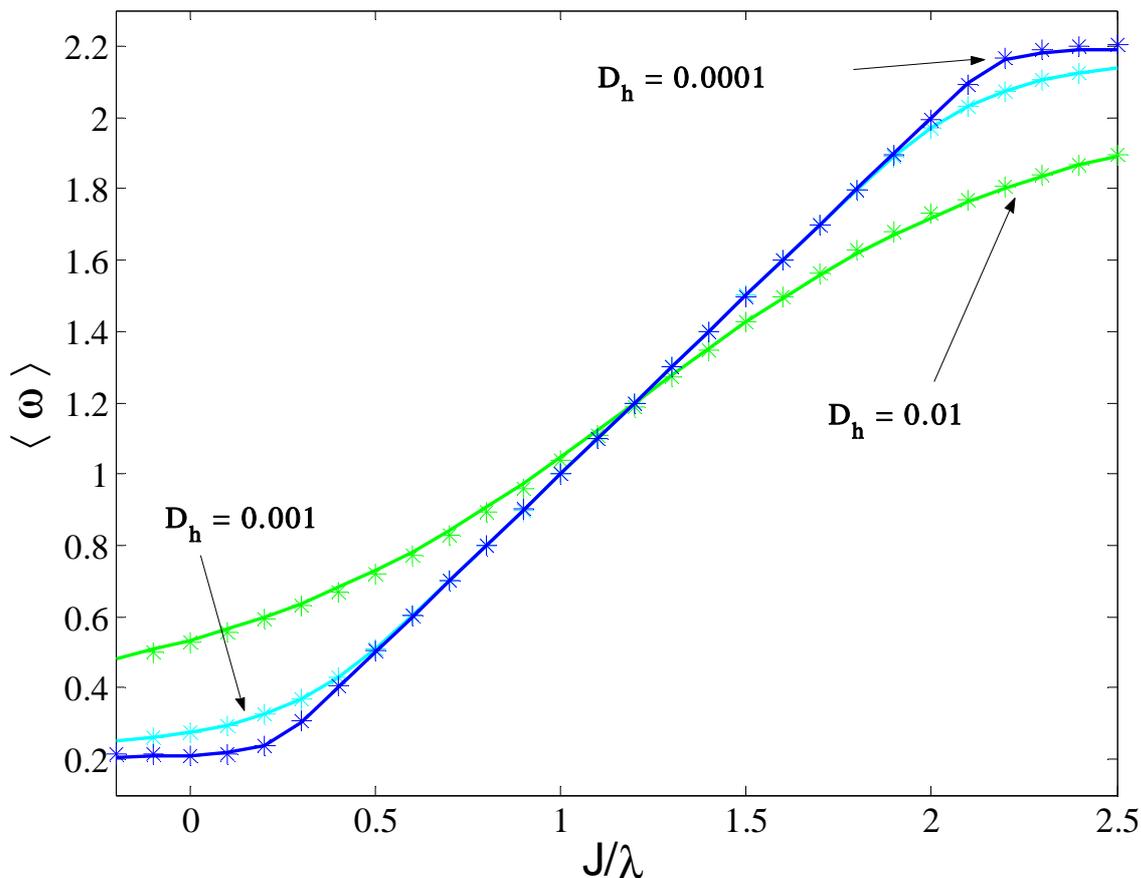


Рис. 8. Зависимость средней частоты спинового генератора от параметра  $J/\lambda$ : \* - результаты численного моделирования стохастической системы (21), — - результаты расчёта с использованием формулы (37)

На рис. 8 приведены зависимости сдвига средней частоты спинового генератора от параметра  $J/\lambda$ , полученные как путём усреднения решений стохастической системы (21) на временном интервале  $T = 2 \cdot 10^7$ , так и путём расчётов с использованием аналитических выражений (35) и (37). Видно прекрасное соответствие результатов, полученных с использованием принципиально разных подходов.

Согласно рисунку, смещение частоты относительно значения в отсутствие шума может быть весьма значительным и всегда возрастает при приближении к границе области генерации.

## 8. Заключение

В данном методическом пособии представлен пример аналитического исследования стохастической модели спинового генератора, включающего в себя вывод уравнения Фоккера-Планка для модели, а также анализ стационарной плотности вероятности. В результате исследования обнаружен эффект сдвига средней частоты генерации спиновых колебаний, вызванный действием шума. Данный эффект связан с принципиально нелинейной динамикой рассматриваемой системы.

## 9. Вопросы для контроля

1. Почему можно сказать, что спиновый генератор управляем током? К каким характеристикам генерируемых колебаний это относится?
2. Какими особенностями обладает спиновый генератор, как автоколебательная система?
3. Что описывает уравнение Фоккера-Планка? Означает ли стационарность распределения фазовых координат системы равенство нулю потока вероятности: а) через любую малую площадку на секущей гиперплоскости или б) через всю секущую гиперплоскость? Приведите примеры.
4. Запишите уравнение Фоккера-Планка для фазовых координат спинового генератора в предположении, что интенсивность флуктуаций магнитного поля в направлении, перпендикулярном ферромагнитным слоям отличается в  $\eta$  раз от интенсивности флуктуаций вдоль слоёв. Как это повлияло бы на величину шумоиндуцированного сдвига средней частоты генерации?
5. Как аналитически доказать, что смещение средней частоты спинового генератора относительно значения в отсутствие шума возрастает с приближением к границе области генерации? (Указание: при доказательстве надо использовать возрастание константы нормировки в равенстве (35) при удалении параметра  $J/\lambda - h$  от центра области генерации.)

## 10. Список литературы

- [1] Slonczewski J. Current-driven excitation of magnetic multilayers //J. Magn. Magn. Mater. – 1996. – Т. 46. – С. L1.
- [2] Berger L. Emission of spin waves by a magnetic multilayer traversed by a current //Phys. Rev. B. – 1996. – Т. 54. С. 9353.
- [3] Мишагин К.Г., Половинкин А.В., Алешин К.Н. Динамика спинового генератора: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 19 с.
- [4] Kim J.-V. Generation Linewidth of an Auto-Oscillator with a Nonlinear Frequency Shift: Spin-Torque Nano-Oscillator //Phys. Rev. Lett. – 2008. – Т. 100. – С. 017207.
- [5] R. Bonin et al. Analytical treatment of synchronization of spin-torque oscillators by microwave magnetic fields//The Eur. Phys. J. B. – 2009. – Т. 68. – С. 221.
- [6] Л.Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. IX / Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. В 2 ч. Ч. 2. Теория конденсированного состояния. М. – ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 496 с.
- [7] W.F. Brown. Thermal Fluctuations of a Single-Domain Particle //Phys. Rev. – 1963. – Т. 130, №. 5. – С. 1677.
- [8] Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1961. – 558 с.

Андрей Владимирович **Половинкин**  
Константин Геннадьевич **Мишагин**

**ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООВОГО ШУМА НА СРЕДНЮЮ ЧАСТОТУ  
СПИНОВОГО ГЕНЕРАТОРА**

*Учебно-методическое пособие*

Компьютерная верстка – К.Г. Мишагин

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского»  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. . Уч-изд. л.  
Заказ № . Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета  
им. Н.И. Лобачевского  
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37