МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

О.И. Канаков
М.И. Мотова

МЕТОДЫ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА В ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
03.03.03 «Радиофизика», 010300 «Фундаментальная информатика
и информационные технологии»

Нижний Новгород

2016

УДК 534.1
ББК 22.213
К-19

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **В.А. Яшнов**

К-19 Канаков О.И., Мотова М.И. МЕТОДЫ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА В ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. – 39 с., 13 рис.

В пособии рассматриваются методы теоретической физики, используемые для анализа динамики нелинейных колебательных систем. Приводится краткое изложение формализмов Лагранжа и Гамильтона. Описано применение методов к решению задач о движении частиц в центральном поле и о малых колебаниях.

Разработка рекомендуется для студентов радиофизического факультета ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 03.03.03 «Радиофизика», 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии
радиофизического факультета ННГУ,
д.ф.-м.н., проф. **Е.З. Грибова**

УДК 534.1
ББК В 236.352

© О.И. Канаков, М.И. Мотова, 2016
© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2016

Содержание

1. Вариационный принцип 4
2. Функции Лагранжа механических систем 5
3. Законы сохранения 6
4. Пример решения задачи 8
5. Движение частиц в полях 10
6. Малые колебания консервативных систем 20
7. Уравнения Гамильтона 26
8. Скобки Пуассона 29
9. Канонические преобразования 32
10. Критерий каноничности преобразований 34
11. Контрольные задания 36
Литература 38

1. Вариационный принцип

Обобщёнными координатами механической системы называют набор независимых величин $\{q_i\}$, $i = 1 \ldots s$, которым однозначно определяется положение системы в пространстве. Способ задания обобщённых координат для конкретной системы не является единственным, однако их количество определено однозначно и называется *количеством степеней свободы* системы. Радиус-векторы всех частиц (материальных точек), составляющих систему, могут быть выражены через обобщённые координаты: $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., t)$. Производные по времени от обобщённых координат называются *обобщёнными скоростями*. Заметим, что *состояние* системы (то есть описание, достаточное для предсказания последующего движения) включает, помимо обобщённых координат, также и обобщённые скорости.

Наиболее общая формулировка закона движения систем дается так называемым принципом наименьшего действия (или *принципом Гамильтона*), который формулируется следующим образом.

Каждая механическая система характеризуется скалярной действительнозначной функцией обобщённых координат, обобщённых скоростей и времени $L = L(q, \dot{q}, t)$, называемой *функцией Лагранжа*, которая полностью определяет законы движения системы. А именно, истинное движение системы на заданном отрезке времени $[t_1, t_2]$ при условии, что положения системы в начальный и конечный моменты этого отрезка заданы ($q(t_1)=q_1$, $q(t_2)=q_2$), является решением вариационной задачи

$$\delta S = 0 \text{ при } \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad \delta t = 0$$

(то есть, как сами граничные моменты $t_{1,2}$, так и положение системы в эти моменты не варьируются), где $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ – функционал, определённый на множестве всех движений системы и называемый «*действием*» [1], [5].

Из вариационного принципа могут быть получены дифференциальные уравнения движения, являющиеся необходимым условием экстремума для вариационной задачи. Найдём первую вариацию действия

$$\delta S = 0 = \sum \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i) dt = \sum \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i) - \delta q_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) dt =$$

$$= \sum \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i ({}^{t_1}\!/_{t_2}) = 0.$$

Потребуем тождественного обращения в нуль вариации δS для любых вариаций решения δq_i. Ввиду автоматического обращения в нуль второго слагаемого, остаётся потребовать также обращения в нуль подынтегрального выражения в первом слагаемом, что и даёт искомые уравнения движения, называемые *уравнениями Лагранжа*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0\,. \qquad (1.1)$$

Пусть для некоторой системы известна функция Лагранжа L. Рассмотрим другую функцию вида $L' = L + \frac{dF}{dt}$, где $F(q,t)$ – некоторая функция обобщённых координат и времени. Покажем, что функция L' тогда также является функцией Лагранжа той же системы. В самом деле, соответствующее действие S' записывается в виде

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'dt = \int_{t_1}^{t_2}(L + \frac{dF}{dt})dt = \int_{t_1}^{t_2} Ldt + \int_{t_1}^{t_2} dF = S + (F(q_1,t_1) - F(q_2,t_2))\,. \qquad (1.2)$$

Для вариаций имеем $\delta S' = \delta S$, поскольку граничные моменты времени $t_{1,2}$ и положения системы в эти моменты $q_{1,2}$ по условию вариационной задачи не варьируются. Следовательно, вариационные задачи δS=0 и $\delta S'$=0 имеют одинаковые экстремали, а значит, функции Лагранжа L и L' определяют одни и те же законы движения, то есть, в равной мере характеризуют одну и ту же систему.

2. Функции Лагранжа механических систем

Потенциальными системами называют механические системы, для которых функция Лагранжа имеет вид $L = T - U$, где T и U – соответственно, кинетическая и потенциальная энергия системы, выраженные через обобщённые координаты и скорости. Для ансамблей частиц (материальных точек) без кинематических связей (ограничений, накладываемых на пространственное положение системы), где в качестве обобщённых координат могут быть использованы радиус-векторы частиц, подстановка такой функции Лагранжа в уравнения (1.1) приводит к уравнениям движения, совпадающим с уравнениями Ньютона, что и является обоснованием вышеприведённого выражения для функции Лагранжа.

При наличии кинематических связей, уравнения Лагранжа, в отличие от уравнений Ньютона, не содержат неизвестных сил реакции связей, а количество обобщённых координат оказывается меньше полного количества трёхмерных координат частиц, составляющих систему. В этом состоит преимущество уравнений Лагранжа перед уравнениями Ньютона при решении задач механики.

С другой стороны, формализм, основанный на вариационном принципе, оказался применимым и успешно используется при формулировке других разделов теоретической физики, включая квантовую механику, а также классическую и квантовую теорию поля.

Кроме того, аппарат Лагранжа может быть применён для решения немеханических прикладных задач (в электротехнике, оптике) на основе формальной аналогии получаемых уравнений.

Запишем функцию Лагранжа для материальной точки в трехмерном пространстве в различных системах координат: декартовой, цилиндрической и сферической.

1. Декартова система координат (x,y,z):

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z).$$

2. Цилиндрическая система координат (ρ,φ,z):

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, \varphi, z).$$

3. Сферическая система координат (r,θ,φ):

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r,\theta,\varphi).$$

3. Законы сохранения

Введем понятие обобщенного импульса

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ . \tag{3.1}$$

Учитывая уравнение Лагранжа (1.1), получим $\frac{d}{dt}p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, а это означает, что если функция Лагранжа явно не зависит от некоторой координаты q_i, то соответствующий обобщённый импульс сохраняется: $\frac{d\,p_i}{dt} = 0 \quad \to \quad p_i = const$. Такая координата, которая явно не входит в функцию Лагранжа, называется *циклической*.

Обобщенной энергией системы называется функция

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\,. \tag{3.2}$$

Найдем, используя уравнение Лагранжа, полную производную по времени от функции Лагранжа

$$\frac{d\,L}{d\,t} = \sum \frac{\partial L}{\partial\,\dot{q}_i}\ddot{q}_i + \sum \frac{\partial\,L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Отсюда следует закон изменения обобщённой энергии

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\sum(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L) = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Если функция Лагранжа не зависит явно от времени, то есть $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то время называется *циклическим*, а обобщенная энергия сохраняется.

Покажем, что функция Лагранжа механических систем имеет структуру $L = L_2 + L_1 + L_0$, где индекс при слагаемых означает степень однородности по обобщённым скоростям (L_2 и L_1 – соответственно, квадратичная и линейная формы по обобщённым скоростям, L_0 не содержит обобщённых скоростей).

В самом деле, используя выражения радиус-векторов частиц через обобщённые координаты $\vec{r}_i(q,t)$, запишем выражение кинетической энергии

$$T=\sum\frac{m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2},\text{ где } \dot{\vec{r}}_i=\sum\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t},$$

откуда находим

$$T=\sum m_i\sum_{j,k}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k+2\sum_j\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}+(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t})^2=T_2+T_1+T_0. \quad (3.3)$$

Тогда $L=T_2+T_1+(T_0-U)=L_2+L_1+L_0$.

Покажем, что для функций Лагранжа такого вида функция обобщённой энергии (3.2) принимает вид $H=L_2-L_0$.

Докажем предварительно Теорему Эйлера об однородных функциях.

Пусть f является *однородной* функцией своих аргументов (x_1, …, x_s), то есть выполняется условие

$$f(\alpha x_1,\alpha x_2...\alpha x_s)=\alpha^k f(x_1,x_2,...x_s),$$

где параметр k называется степенью однородности.

Теорема Эйлера утверждает, что в этом случае имеет место тождество

$$\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i=k\,f. \quad (3.4)$$

Для доказательства найдём

$\dfrac{\partial f(\alpha x_i)}{\partial\alpha}=\dfrac{\partial f}{\partial(\alpha x_i)}x_i=\dfrac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha^k f(x))=k\alpha^{k-1}f$, положим в этом соотношении $\alpha=1$ и получим искомое выражение (3.4).

Вернемся к функции обобщенной энергии

$$H=\sum\frac{\partial T_2}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum\frac{\partial T_1}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L=2T_2+T_1-(T_2+T_1+T_0-U)=L_2-L_0,$$

так как T_2 имеет степень однородности 2, T_1 – степень однородности 1 (см. (3.3) и (3.4)). Итак,

$$H=L_2-L_0, \quad (3.5)$$

$H=H(q,\dot{q},t)$ – обобщенная энергия.

В частном случае $\dfrac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}=0$, то есть, если связи стационарные, то из (3.3) находим $T_0=0$, и обобщенная энергия представляет собой полную энергию

$$H=2T_2+T_1-T_1+U=T_2+U=T+U.$$

4. Пример решения задачи

Точка движется по стержню, который наклонен под углом α к вертикали и может вращаться вокруг нее (рис. 1).

Используем сферическую систему координат (r,θ,φ), причём $\theta=\alpha$, тогда число обобщенных координат составляет $S = 3\cdot 1 - 1 = 2$. При этом функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha\, \dot{\varphi}^2) - mgr\cos\alpha = L^{(2)} + L^{(0)}.$$

Координата φ и время t являются циклическими. Из цикличности φ (то есть $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$) следует сохранение обобщенного импульса по φ:

$$p_\varphi = mr^2 \sin\alpha\, \dot{\varphi} = const \tag{4.1}$$

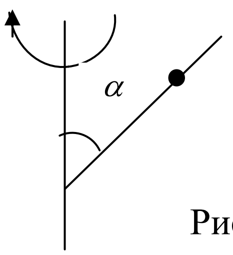


Рис. 1

Из цикличности времени ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) следует сохранение обобщенной энергии

$$H = L^{(2)} - L^{(0)} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha\, \dot{\varphi}^2) + mgr\cos\alpha = const = E. \tag{4.2}$$

В данном случае обобщённая энергия совпадает с полной энергией, то есть с суммой кинетической и потенциальной энергий. Используя (4.1) и (4.2), получим

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \alpha} \tag{4.3}$$

и

$$H = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr\cos\alpha = E. \tag{4.4}$$

Эти соотношения можно проинтегрировать, поскольку

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U_{eff}(r)}, \tag{4.5}$$

где $U_{eff} = \dfrac{p_\varphi^{\ 2}}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr\cos\alpha$,

и тогда $t = \pm\sqrt{\dfrac{m}{2}}\displaystyle\int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}} + c.$ $\quad$ (4.6)

Из (4.5) следует, что движение возможно (то есть $\dot{r}$ существует), если $E \geq U_{eff}(r)$. При этом сохраняющаяся величина энергии E может быть найдена из начальных условий и составляет

$$E = \frac{m\dot{r}_0}{2} + \frac{m}{2} r_0^2 \sin^2\alpha\,\dot{\varphi}_0^2 + mgr_0\cos\alpha,$$

где $\dot{r}_0$, r_0, $\dot{\varphi}_0$ - начальные условия.

Задав значение E, мы определим, какое движение возможно при данных начальных условиях. Для этого построим график $U_{eff}(r)$ и нанесем на него уровень заданной энергии – плоскость баланса энергии (рис. 2).

Так как при $p_\varphi^0 \succ 0$ имеем $\dot{\varphi} \succ 0$, то движение точки будет происходить так, как изображено на рис. 3.

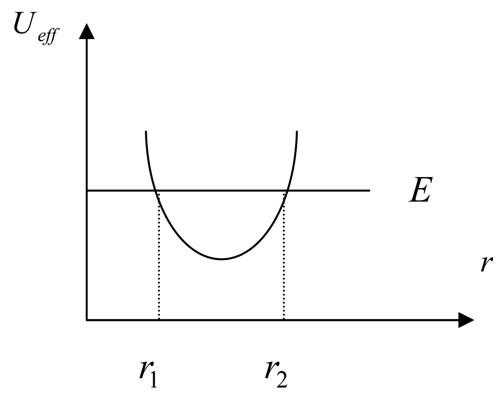


Рис. 2. Плоскость баланса энергии

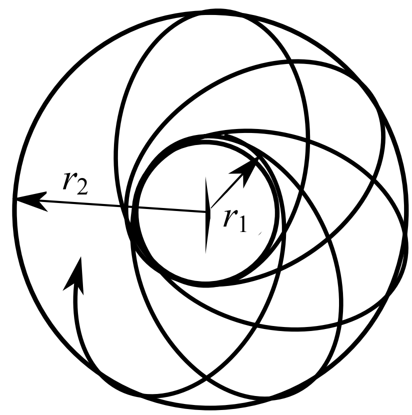


Рис. 3. Финитное движение без падения на центр

Заметим, что по координате r рассматриваемое движение ограничено, то есть является финитным**.**

Рассмотрим ту же задачу при условии, что стержень вращается с постоянной скоростью, то есть $\dot{\varphi} = \omega$ (кинематическая голономная связь). Тогда

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\,\omega^2) - mgr\cos\alpha = L_2 + L_0,$$

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + (\frac{mr^2}{2}\sin^2\alpha\,\omega^2 - mgr\cos\alpha).$$

Эта функция Лагранжа имеет циклическое время, т.е. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, из чего следует сохранение обобщенной энергии

$$H = L_2 - L_0 = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{m}{2} r^2 \sin^2\alpha\,\omega^2 + mgr\cos\alpha = const. \qquad (4.7)$$

В этом случае $U_{eff} = -\frac{m}{2} r^2 \sin^2 \alpha\, \omega^2 + mgr\cos\alpha$.

Из графика $U_{eff}(r)$ (рис. 4) следует, что данное движение отличается от предыдущего случая, и может происходить как финитно в интервале $0 \le r \le r_1$, так и инфинитно при $r_2 \le r \prec \infty$. В первом случае частица скачком меняет знак скорости при ударе о точку закрепления, во втором – уходит по стержню в «бесконечность». В области от r_1 до r_2 движение невозможно, так как здесь $E \prec U_{eff}(r)$ и $\dot{r}$ согласно (4.5) не существует.

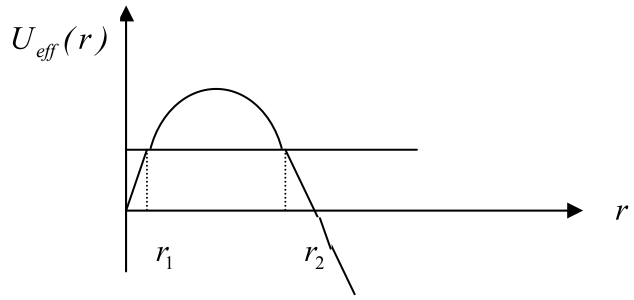


Рис. 4. Плоскость баланса энергии

Следует обратить внимание, что в отличие от первого варианта задачи, где сохраняется полная энергия (4.4), во втором варианте задачи полная энергия не сохраняется (поскольку внешние силы совершают работу), тогда как сохраняется обобщённая энергия (4.7), которая не совпадает с полной энергией.

5. Движение частиц в полях

Центрально-симметричным полем (полем со сферической симметрией) называют силовое потенциальное поле, энергия которого $U(\vec{r})$ зависит только от расстояния $r = |\vec{r}|$ до неподвижной точки, называемой центром поля:

$$U(\vec{r}) = U(r).$$

Чтобы определить направление вектора силы $\vec{F}_c$ центрально-симметричного поля, достаточно воспользоваться общим правилом отыскания силы потенциальных полей по заданному потенциалу:

$$\vec{F}_c = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = -\frac{dU}{dr}\nabla_r$$

и, поскольку $\nabla_r = \frac{\vec{r}}{r}$, то $\vec{F}_c = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$.

Иными словами, вектор силы, действующей на частицу в центрально-симметричном поле, коллинеарен радиус-вектору $\vec{r}$, направленному из центра поля в точку мгновенного положения частицы. При этом сила может быть сонаправлена с $\vec{r}$, т.е. $\frac{dU(r)}{dr} < 0$, тогда U – отталкивающее поле. В противоположном случае сила направлена против $\vec{r}$, т.е. $\frac{dU(r)}{dr} > 0$, такое поле называется притягивающим.

При движении в центрально-симметричном поле сохраняется кинетический момент системы $\vec{K} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ относительно центра поля, так как $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M} = [\vec{F} \times \vec{r}] = 0$, потому что $\vec{F} \parallel \vec{r}$, и $\vec{K} = const$. Векторы $\vec{K}$ и $\vec{r}$ взаимно перпендикулярны. Постоянство $\vec{K}$ означает, что при движении частицы ее радиус-вектор все время остается в плоскости, перпендикулярной $\vec{K}$. Таким образом, траектория движения частицы в центральном поле лежит целиком в одной плоскости.

Этот же результат можно получить другим путем, исходя из сферической симметрии поля, которая проявляется в том, что функция $U(r)$ зависит лишь от одной из трех сферических координат. Выберем сферическую систему координат, при этом функция Лагранжа частицы примет вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r). \tag{5.1}$$

Координата φ в функции Лагранжа (5.1) является циклической, следовательно, обобщенный импульс по этой координате является интегралом движения, то есть

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi} = const. \tag{5.2}$$

Величина p_φ определяется из начальных условий, и мы можем без ограничения общности положить её равной нулю. Физически это условие означает, что ось z, от которой мы отсчитываем угол $\theta = 0$, выбирается нами в направлении, перпендикулярном к вектору кинетического момента $\vec{K} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = const$, то есть $K_z = 0$. А поскольку $K_z = p_\varphi$, то и $p_\varphi = 0$, причем это остаётся справедливым в любой момент времени в силу сохранения p_φ. Тогда из (5.2) следует, в самом общем случае, что $\dot{\varphi} = 0$.

Теперь функцию Лагранжа (5.1) можно записать в полярной системе координат

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r). \tag{5.3}$$

Движение происходит в плоскости, фиксированной в пространстве под заданным углом $\varphi = \varphi_0 = const$.

Именно представление (5.3) обычно именуют функцией Лагранжа частицы в центрально-симметричном поле.

Аналитическое решение задачи

Интегралы движения данной системы позволяют полностью проинтегрировать задачу, то есть найти ее решение в квадратурах. Из (5.3), в силу цикличности переменных θ и t, следует существование двух интегралов движения – обобщенного импульса и энергии.

Так как $\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$, то есть θ – циклическая координата, то выполняется условие (из соотношения $\frac{d\,p_\theta}{d\,t}=\frac{\partial\,L}{\partial\,\theta}$):

$$p_\theta = mr^2\,\dot{\theta} = p = const\,. \tag{5.4}$$

Отсюда имеем

$$\dot{\theta}=\frac{p}{mr^2}\,. \tag{5.5}$$

При $\frac{\partial L}{\partial t}=0$ сохраняется энергия системы, что следует из соотношения $\frac{d\,H}{d\,t}=-\frac{\partial\,L}{\partial\,t}$. В нашем случае это полная энергия системы, то есть

$$H \equiv E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) + U(r) = const\,. \tag{5.6}$$

Из соотношений (5.5) и (5.6) найдем

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{p^2}{2mr^2} + U(r)\,. \tag{5.7}$$

Выражение (5.7) показывает, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с эффективной потенциальной энергией

$$U_{eff} = U(r) + \frac{p^2}{2mr^2}\,. \tag{5.8}$$

Отсюда следует

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\,\sqrt{E - U_{eff}(r)}\,. \tag{5.9}$$

Или, разделяя переменные и интегрируя, получим

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}} + const\,. \tag{5.10}$$

Учитывая (5.5), можно найти

$$\theta = \pm \frac{p}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{eff}(r)}} + const . \qquad (5.11)$$

Формулы (5.10) и (5.11) решают в общем виде поставленную задачу. Первая формула определяет зависимость расстояния r движущейся точки от центра как функции времени $r = r(t)$, то есть закон движения. Вторая дает связь между r и θ, то есть траекторию движения.

Качественное исследование движения частицы

В основе качественного исследования, как и при аналитическом подходе, лежат выражения (5.5) и (5.9). Из (5.5) следует, что $\dot{\theta}$ не может менять свой знак (отличительный признак движения в центральном поле), то есть угловая переменная θ всегда является монотонной функцией времени.

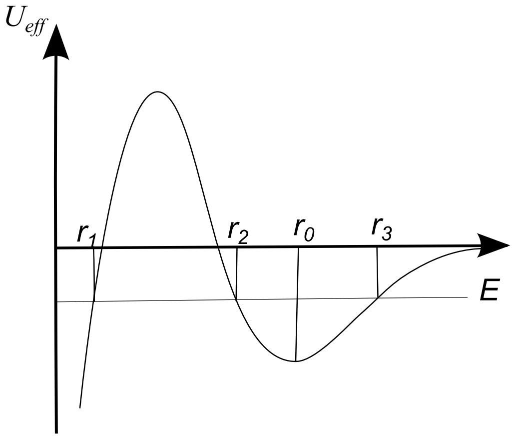
Из (5.9) вытекает второй качественный признак движения в центральном поле: разрешены лишь такие значения координаты r, для которых величина $U_{eff}(r)$ не превышает полной энергии системы E. Иными словами, закон сохранения энергии запрещает частице, двигаясь в центральном поле, попадать в те области пространства, где $U_{eff}(r) > E$. Этот запрет совместно с законом строго монотонного изменения переменной θ позволяет установить качественные особенности траектории частицы по виду функции $U_{eff}(r)$ и значению E. Используя (5.8), построим $U_{eff}(r)$, см. рис. 5. Эта плоскость называется плоскостью баланса энергии.

По заданным значениям E (эта величина задается начальными условиями как $E = \frac{mv_0^2}{2} + U(r_0)$, где v_0 – начальная скорость, а $U(r_0)$ – потенциал центрального поля в начальной точке) определяется область разрешенных значений r. В зависимости от того, попадает ли в эту область центр поля или бесконечность, различают четыре возможных режима движения:

- финитное движение с падением на центр $(0 \le r \le r_1)$, рис. 5а,б;
- финитное движение без падения на центр $(r_2 \le r \le r_3)$, рис. 5а;
- инфинитное движение без падения на центр $(r_2 < r < \infty)$, рис. 5б;
- инфинитное движение с падением на центр $(0 \le r < \infty)$, рис. 5в.

При этом во всех случаях граничные точки находятся из условия

$$U_{eff}(r) = E . \qquad (5.12)$$

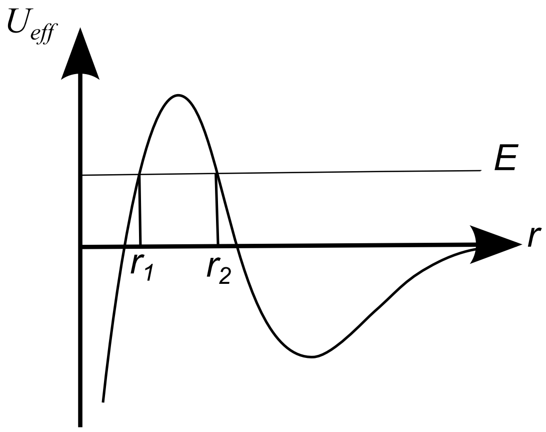


Финитное движение с падением на центр $0 < r \le r_1$

Финитное движение без падения на центр $r_2 \le r \le r_3$

Движение по окружности $r = r_0$

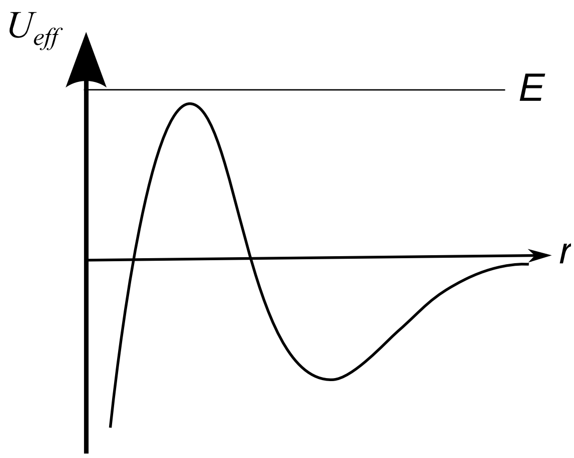
а)



Инфинитное движение без падения на центр $r_2 \le r < \infty$

Финитное движение с падением на центр $0 < r \le r_1$

б)



Инфинитное движение с падением на центр $0 < r < \infty$

в)

Рис. 5. Плоскость баланса энергии

Соответственно значениям E можно построить траектории на плоскости $(r,\dot{r})$ или (r,p_r), называемой фазовой плоскостью (рис. 6).

Траектории на фазовой плоскости определяются соотношением (5.9), а направление движения по фазовым траекториям определяется знаком $\dot{r}$, при $\dot{r}>0$ r растет. Задавая начальные условия, можно представить, как будет происходить движение.

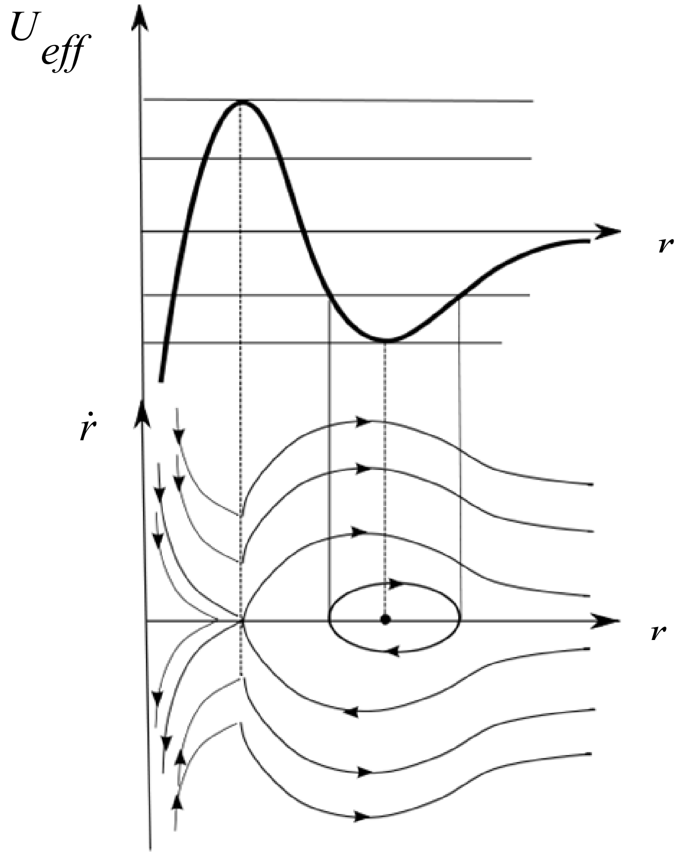


Рис. 6. Плоскость баланса энергии и фазовая плоскость

Начальные условия задаются (см. рис. 7) значениями начальной координаты r_0, начальной скорости v_0 и прицельного параметра h (расстояние от положения частицы до прямой, параллельной вектору скорости и проходящей через центр).

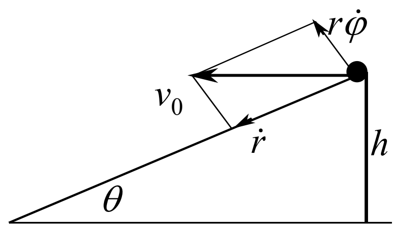


Рис. 7. Начальные условия

При этом значение обобщенного импульса будет иметь вид $p_\theta = p = mr^2\,\dot\theta = mv_0 h$, а значение энергии, соответственно,

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + U(r_0) = \frac{m\dot r^2}{2} + U_{eff}(r_0),$$

где r_0 – расстояние до центра в начальный момент.

Рассмотрим подробнее различные возможные режимы движения.

1. *Финитное движение с падением на центр*. Условие падения на центр следует из неравенства (3.1), в силу которого r может принимать стремящиеся к нулю значения лишь если

$$r^2 U(r)\Big|_{r\to 0} < -\frac{p^2}{2m}. \tag{5.13}$$

Согласно (5.13), при $r \to 0$ потенциальная энергия $U(r)$ должна стремиться к $-\infty$ пропорционально $-1/r^n$, где $n > 2$, либо по закону $-\alpha/r^2$, где $\alpha > p^2/2m$.

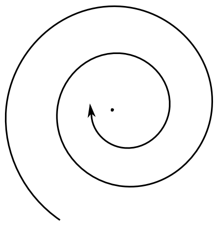


Рис. 8. Падение частицы в центр поля

Для построения траектории движения на плоскости (r,θ) учтем, что $r \to 0$, а $\dot\theta$ сохраняет знак, задаваемый начальными условиями, т.е. тот, который имеет величина $p_\theta(t=0)$. Сохранение знака означает, что направление вращения частицы вокруг центра поля неизменно.

Такая траектория представлена на рис. 8, где знак $\dot\theta$ соответствует вращению по часовой стрелке.

Число оборотов, которое сделает частица, падая в центр, зависит от величины

$$\theta = -\int_{r_{01}}^{0} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{eff}(r)}}. \tag{5.14}$$

Подробнее определение числа оборотов при падении в центр для различных видов полей представлено в [1], [2] и в задаче 2.8 [6].

2. *Финитное движение без падения на центр* происходит по траектории, лежащей внутри кольца, ограниченного окружностями с радиусами r_2 и r_3 (в обозначениях рисунка 5), как показано на рисунке 9.

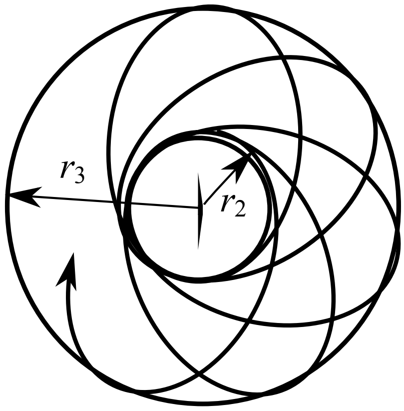


Рис. 9. Финитное движение без падения на центр

Оно является периодическим по переменной r, и его период, согласно (5.10), равен

$$T = 2\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{r_2}^{r_3} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}. \tag{5.15}$$

За время T частица повернётся на угол $\Delta\theta$, равный, как следует из (5.11),

$$\Delta\theta = \frac{2p}{\sqrt{2m}} \int_{r_2}^{r_3} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}. \tag{5.16}$$

Если угол, определяемый (5.16), составляет рациональную часть от 2π, то есть удовлетворяет условию $\Delta\theta = 2\pi m/n$, где m и n – целые числа, то траектория частицы замкнётся через n периодов, в ходе которых частица совершит m оборотов.

Как видно из рисунка 6, финитное движение без падения на центр можно рассматривать как движение в потенциальной яме. В частности, если значение E совпадает с минимумом эффективной потенциальной энергии $E=U_{min}=U(r_0)$, где r_0 – точка минимума (см. рис. 5а), то имеет место движение по окружности радиуса r_0.

3. *Инфинитное движение с падением на центр* аналогично показанному на рисунке 8.

4. *Инфинитное движение без падения на центр* называют рассеянием. Качественный вид возможных траекторий рассеяния в центральном поле показан на рисунке 11 (см. ниже): для притягивающего поля – кривая 3, для отталкивающего – кривая 1.

Движение частиц в магнитном поле

Существуют некоторые особенности в описании движения частиц в магнитном поле. В этом случае

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v},$$

где $\vec{A}$ – векторный потенциал магнитного поля.

Рассмотрим пример – движение частицы в поле магнитного диполя, для которого

$$\vec{A} = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3},$$

где $\vec{\mu}$ – дипольный момент.

Найдем составляющие вектора $\vec{A}$ в цилиндрической системе координат

$$A_\rho = 0,\ A_\varphi = \mu\, r,\ A_z = 0.$$

Согласно доказательству, приведенному в задаче 2.31 [6], движение в таком поле происходит в плоскости $z = const$, то есть

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2) + \frac{e}{c}\,\mu\, r \cdot r\,\dot{\varphi}.$$

В данной системе существует два интеграла движения:
сохраняется обобщенный импульс

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = const = mr^2\dot{\varphi} + \frac{e\mu}{cr}, \tag{5.17}$$

сохраняется обобщенная энергия

$$H = L_2 - L_1 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}) = const. \tag{5.18}$$

Подставляя $\dot{\varphi}$ из (5.17) в (5.18), получим движение, которое зависит от одной переменной, то есть

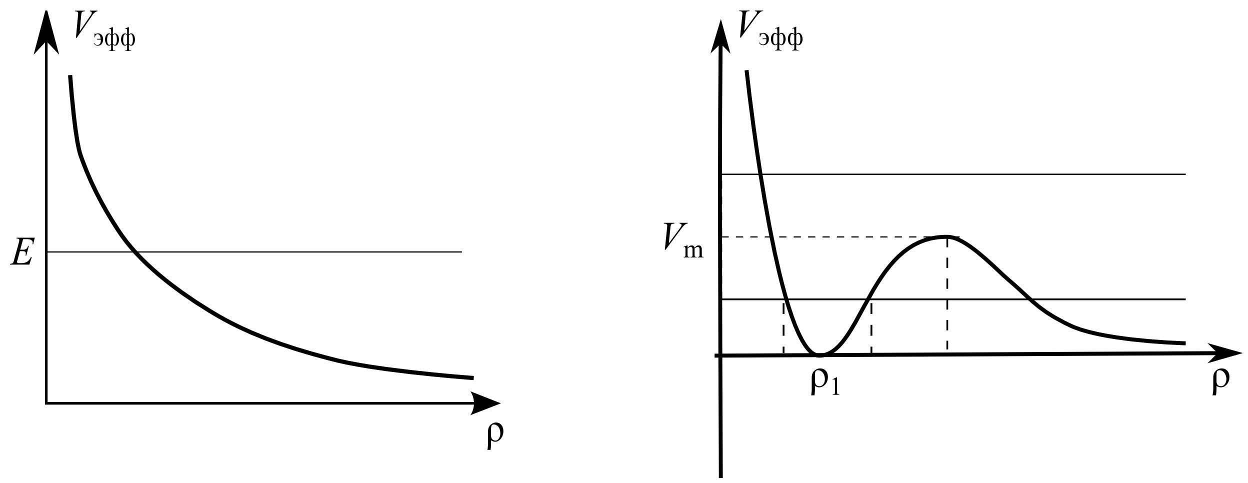
$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{(p_\varphi - \frac{e\mu}{cr})^2}{2mr^2} = H = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r).$$

Качественный вид профиля эффективной потенциальной энергии для случаев $p_\varphi<0$ и $p_\varphi>0$ представлен на рисунке 10. В случае $p_\varphi<0$ движение возможно при условии $E > 0$ и носит характер рассеяния, как изображено на рис. 11 (кривая 1). Подобно рассеянию в центрально симметричном поле, ему присуще монотонное изменение угла φ, обусловленное знакопостоянством угловой скорости

$$\dot{\varphi} = -\frac{|p_\varphi|}{m\rho^2} - \frac{e\mu}{mc\rho^3}.$$

В случае $p_\varphi>0$, наряду с рассеянием, возможно финитное движение (без падения на центр). При $E > V_m$, где $V_m = c^2 p_\varphi^4 / 32me^2\mu^2$, рассеяние происходит по траектории, изображённой на рис. 11 (кривая 2). При этом, согласно выражению для угловой скорости

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \frac{e\mu}{mc\rho^3},$$



а) б)

Рис. 10. Профиль эффективной потенциальной энергии:

а) $p_\varphi < 0$, б) $p_\varphi > 0$

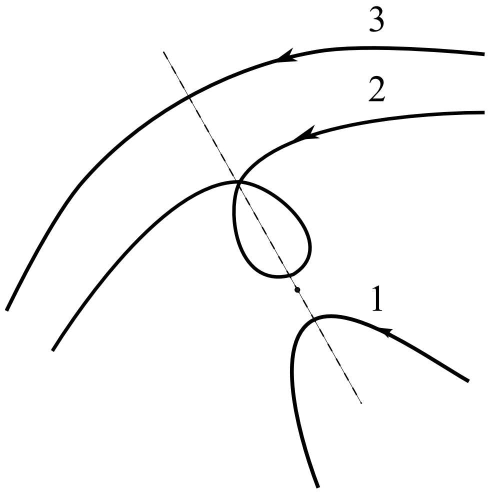


Рис. 11. Траектории рассеяния

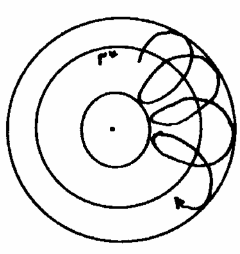


Рис. 12. Траектория финитного движения

её знак не остаётся постоянным – $\dot{\varphi} > 0$ при $\rho > \rho_1 = e\mu / cp_\varphi$ и $\dot{\varphi} < 0$ при $\rho < \rho_1$. Следовательно, направление вращения частицы в точках $\rho = \rho_1$ («точках остановки» по φ) меняется на обратное. Заметим, что $U_{eff}(\rho_1) = 0$.

Второй вариант рассеяния наблюдается при $0 < E < V_m$. Соответствующая ему траектория изображена на рис. 11 (кривая 3). Как и траектория «1», она характеризуется знакопостоянством угловой скорости, но, в отличие от траектории «1», эта скорость имеет положительный знак.

Траектория финитного движения при $0 < E < V_m$ изображена на рис. 12. Движение по ней, как и по траектории «2», сопровождается изменением направления вращения частица вокруг диполя в точках $\rho = \rho_1$. В этих точках вектор скорости коллинеарен радиус-вектору частицы.

6. Малые колебания консервативных систем

Распространенный тип движения физических систем представляет собой малые колебания вблизи устойчивого положения равновесия. *Положение равновесия* – это положение системы, в котором она может находиться бесконечно долго при нулевых обобщённых скоростях, т.е. $\dot{q} = 0 \quad \ddot{q} = 0$. Если система потенциальная, то обобщённые координаты положения равновесия q_{i0} определяются из условия $\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$. В общем виде положение равновесия определяется из условия $Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$, где $U(q, \dot{q}, t)$ – обобщенный потенциал, при этом $\dot{q}_i = 0$. Под *состоянием равновесия* понимают совокупность обобщённых координат положения равновесия и обобщённых скоростей, равных нулю.

Определение устойчивости по Ляпунову – состояние устойчиво, если для каждого $\varepsilon \succ 0$ всегда можно найти такое $\delta \succ 0$, что если при $t = t_0$ $\left| q_i(t_0) - q_{i0} \right| \le \delta_q$ $\left| \dot{q}_i(t_0) \right| \le \delta_{\dot{q}}$, то при $t \succ t_0$ $\left| q_i(t) - q_{i0} \right| \le \varepsilon_q$, а $\left| \dot{q}_i(t) \right| \le \varepsilon_{\dot{q}}$. Это означает, что состояние равновесия устойчиво, если система, находясь вблизи состояния равновесия (в области δ) в $t = t_o$, не выходит из ε-окрестности этого состояния равновесия в дальнейшем.

Линеаризация лагранжевой системы

Будем рассматривать консервативные системы с голономными стационарными связями, то есть такие, в которых сохраняется полная энергия. Поскольку нас интересуют малые колебания относительно состояния равновесия, то будем считать, что $q_i = q_i^o + \zeta_i$ и, соответственно, $\dot{q}_i = \dot{\zeta}_i$. Разложим в ряд по малой величине ζ_i все нелинейные функции, пренебрегая членами высшего порядка:

$$V = V(q_i^o) + \sum_i (\frac{\partial V}{\partial q_i})_{cp} \zeta_i + \frac{1}{2}\sum_{ij} (\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j})_{cp} \zeta_i \zeta_j + \ldots ,$$

где $q_i^o - cp$ (состояние равновесия).

Учитывая, что $(\frac{\partial V}{\partial q_i})_{cp} = 0$ (так определяется состояние равновесия), и полагая без нарушения общности $V(q_i^o) = 0$ (поскольку потенциальная энергия определена с точностью до константы), получим

$$V = \frac{1}{2}\sum_{ij} (\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j})_{cp} \zeta_i \zeta_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} k_{ij}(q_i^0) \zeta_i \zeta_j .$$

Кинетическую энергию, в силу стационарности связей, можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \qquad m_{ij} = m_{ji} .$$

Теперь $m_{ij}(q) = m_{ij}(q_i^0) + \sum_i (\frac{\partial m_{ij}}{\partial q})_{cp} \zeta_i + \ldots$, а $T = \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}(q_i^0) \dot{\zeta}_i \dot{\zeta}_j$.

Таким образом, старшим членом в разложении функции Лагранжа по степеням малых величин ζ_i является квадратичная часть, которая называется функцией Лагранжа малых колебаний и имеет следующий вид:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ij}^{s} m_{ij}(q_i^0) \dot{\zeta}_i \dot{\zeta}_j - \frac{1}{2}\sum_{ij}^{s} k_{ij}(q_i^0) \zeta_i \zeta_j . \tag{6.1}$$

Соответствующие уравнения Лагранжа линейны и записываются в виде

$$\sum_j (m_{ij} \ddot{\zeta}_j + k_{ij} \zeta_j) = 0 \qquad i = 1,\ldots,s . \tag{6.2}$$

<u>Свободные одномерные колебания</u>

Для систем с одной степенью свободы функция Лагранжа будет иметь вид: $L = T - V = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2 - V(q)$,

а функция Лагранжа малых колебаний

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2} k \zeta^2, \quad \text{где} \qquad k = \frac{\partial^2 V}{\partial q^2}(q_0), \qquad m = m(q_0) .$$

Соответственно, уравнение движения для малых колебаний имеет вид

$$m\ddot{\zeta} + k\zeta = 0 ,$$

а его общее решение $\zeta = A\cos(\omega_{мк} t + \varphi)$, где $\omega^2_{мк} = \frac{k}{m}$ – частота малых колебаний.

<u>Пример</u>: Грузик массы m на пружинке длины l и жесткости k .

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{k(x-l)^2}{2}+mgl\,,\quad V=\frac{k(x-l)^2}{2}-mgl\,,$$

тогда $V'=k(x-l)-mg=0$, откуда находим положение равновесия $x_0=\frac{mg}{k}+l$.

Далее найдём вторую производную $V''=k$ и частоту малых колебаний $\omega^2{}_{мк}=\frac{k}{m}$. Тогда решение имеет вид $x=\frac{mg}{k}+l+A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi)$.

<u>Малые колебания систем с несколькими степенями свободы</u>

Функция Лагранжа малых колебаний для систем с несколькими степенями свободы имеет вид (6.1):

$$L=\frac{1}{2}\sum_{ij}^{s}m_{ij}(q_i^0)\dot{\zeta}_i\dot{\zeta}_j-\frac{1}{2}\sum_{ij}^{s}k_{ij}(q_i^0)\zeta_i\zeta_j\,.$$

Запишем уравнения Лагранжа:

$$\sum_j(m_{ij}\ddot{\zeta}_j+k_{ij}\zeta_j)=0\qquad i=1,...,s\,. \tag{6.3}$$

Эти уравнения описывают движение системы с s степенями свободы, они линейные и однородные и представляют собой систему взаимосвязанных гармонических осцилляторов.

Если зафиксировать в нуле все координаты, кроме одной (то есть, в сумме в (6.3) обнулить все слагаемые, кроме одного $j=i$), то получим так называемую *парциальную подсистему*, для которой кинетическая и потенциальная энергии составляют $T_i=\frac{1}{2}m_{ii}\dot{\zeta}_i^2$, $\quad V_i=\frac{1}{2}k_{ii}\zeta_i^2$, а величина $n_i^2=\frac{k_{ii}}{m_{ii}}$ называется парциальной частотой подсистемы. Остальные слагаемые ($j\neq i$), входящие в сумму в (6.3), отвечают взаимодействию парциальных подсистем.

При этом величина $R_{ij}=\frac{T_{ij}}{\sqrt{T_{ii}T_{jj}}}=\frac{m_{ij}}{\sqrt{m_{ii}m_{jj}}}$ называется коэффициентом инерциальной связи, а $r_{ij}=\frac{V_{ij}}{\sqrt{V_{ii}V_{jj}}}$ представляет собой силовую связь. Легко убедится, что парциальные подсистемы зависят от выбора обобщённых координат.

Так как (6.3) – система линейных дифференциальных уравнений, то мы ищем решение в виде $\zeta_j=A_j\cos(\omega t+\varphi)$ или $\zeta_j=a_je^{pt}$.

Подставляя этот вид решения в систему уравнений (6.3), получим систему алгебраических уравнений с нулевой правой частью относительно неизвестных амплитуд A_j:

$$\sum_j(-\omega^2m_{ij}+k_{ij})A_j=0\qquad i-\text{ номер уравнения.} \tag{6.4}$$

Система (6.4) имеет нетривиальные (ненулевые) решения при условии, что определитель этой системы равен нулю:

$$\Delta = \det\left\| -\omega^2 m_{ij} + k_{ij} \right\| = 0. \qquad (6.5)$$

Это соотношение, позволяющее найти значения собственных частот ω_n (спектр собственных частот), называется *характеристическим уравнением*.

Количество собственных частот (с учётом кратности корней) равно числу степеней свободы s.

Решение системы (6.4) $A_j=A^n{}_j$, получаемое при подстановке соответствующей собственной частоты $\omega=\omega_n$, называется собственным вектором. Так как, согласно (6.5), определитель системы (6.4) равен нулю, то ранг системы (количество независимых уравнений) по крайней мере на единицу меньше, чем количество неизвестных (одно уравнение является следствием остальных), поэтому собственные векторы определены неоднозначно. Для невырожденных собственных частот (некратных корней уравнения (6.5), где в качестве неизвестной выступает ω^2) собственный вектор определён с точностью до постоянного множителя. В случае вырожденной собственной частоты (кратного корня) общее решение системы (6.4) представляет собой векторное подпространство с размерностью, равной кратности корня. Это означает, что количество линейно независимых собственных векторов – решений системы (6.4) для вырожденной собственной частоты равно кратности вырождения.

Общее решение уравнений движения (6.3) может быть тогда представлено в виде суперпозиции гармонических колебаний на собственных частотах

$$\zeta_j = \sum_{n=1}^{s} A_j^n C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), \qquad (6.6)$$

где ω_n и $A^n{}_j$ – собственные частоты и соответствующие собственные векторы (определяемые самой колебательной системой), а C_n и φ_n – константы интегрирования (определяемые из начальных условий).

Собственные частоты характеризуют движение системы в целом. В общем случае движение по каждой обобщённой координате $\zeta_j(t)$ является суперпозицией колебаний на всех собственных частотах. Можно, однако, задать начальные условия так, чтобы все координаты совершали колебания на одной из собственных частот.

Рассмотрим замену обобщённых координат

$$\zeta_j = \sum_{n=1}^{s} A_j^n \eta_n, \qquad (6.7)$$

где $A^n{}_j$ имеют прежний смысл компонент собственных векторов, а η_n – новые обобщённые координаты. Сравнивая (6.7) с общим решением (6.6), нетрудно видеть, что каждая из координат η_n совершает гармоническое колебание на *одной* соответствующей частоте ω_n.

Если наложить на собственные векторы дополнительное условие

$$\sum_{ij} m_{ij} A_i^k A_j^l = \delta_{kl}, \qquad (6.8)$$

где δ_{kl} – символ Кронекера, то в координатах η_n функция Лагранжа принимает специальный вид

$$L = \frac{1}{2}\sum_n (\dot{\eta}_n^2 - \omega_n^2 \eta_n^2)\,, \tag{6.9}$$

называемый *функцией Лагранжа нормальных колебаний*, а сами координаты η_n называются *нормальными координатами* малых колебаний. Функция Лагранжа (6.9) представляет собой сумму слагаемых, каждое из которых описывает движение по отдельной координате η_n. Это означает, что движение по каждой из нормальных координат не зависит от других нормальных координат, а колебательная система в целом представляется в виде совокупности невзаимодействующих одномерных гармонических осцилляторов, каждый из которых описывается соответствующей нормальной координатой η_n, удовлетворяющей уравнениям движения

$$\ddot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = 0 \qquad n = 1,\ldots, s\,.$$

Эти невзаимодействующие осцилляторы называются *нормальными колебаниями* или *модами* колебательной системы.

Заметим, что условия (6.8) с точки зрения линейной алгебры могут быть истолкованы как ортогональность (при $k \neq l$) и нормировка (при $k = l$) системы собственных векторов в терминах специального скалярного произведения, определяемого как левая часть равенства (6.8). Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным частотам, имеет место автоматически. В случае же вырожденных (кратных) собственных частот, ортогональность соответствующих линейно-независимых собственных векторов всегда может быть обеспечена с помощью стандартной процедуры ортогонализации Грама-Шмидта [7]. Нормировка собственных векторов обеспечивается стандартным образом, путём умножения каждого вектора на обратную величину его нормы (рассчитанной в терминах вышеупомянутого специального скалярного произведения).

Пример

Две частицы одинаковой массы m соединены пружинками жесткости k и двигаются по горизонтальной прямой (см. рисунок 13). Найти собственные частоты и записать колебания системы как суперпозицию нормальных (собственных) колебаний.

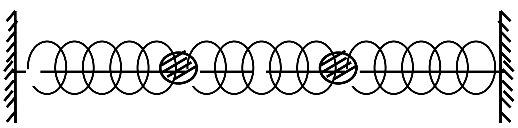


Рис. 13

Функция Лагранжа будет иметь следующий вид (за координаты возьмем отклонения точек от положения равновесия):

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_1^2 + (x_1 - x_2{}^2) + x_2^2)\,, \tag{6.10}$$

тогда уравнения движения:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + n_1^2 x_1 - \alpha x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2^2 + n_2^2 x_2 - \alpha x_1 = 0, \end{cases} \tag{6.11}$$

здесь $n_1^2 = n_2^2 = \dfrac{2k}{m} = 2\alpha$ – парциальные частоты первой и второй подсистем, а $\alpha = \dfrac{k}{m}$ – коэффициент связи. Будем искать решение системы уравнений в виде $x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi)$. Подставляя это решение в систему (6.11), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 + 2\alpha A_1 - \alpha A_2 = 0 \\ -\omega^2 A_2 + 2\alpha A_2 - \alpha A_1 = 0. \end{cases} \tag{6.12}$$

Определитель этой системы даст нам характеристическое уравнение для определения собственных частот

$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 + 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\omega^2 + 2\alpha \end{vmatrix} = 0$ или $\omega^4 - 4\alpha\,\omega^2 + 4\alpha^2 - \alpha^2 = 0$, отсюда $\omega_1^2 = 3\alpha, \quad \omega_2^2 = \alpha$ – собственные частоты системы.

Запишем искомое решение в виде (6.6):

$$x_1 = C_1 A_1^1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 A_1^2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2 = C_1 A_2^1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 A_2^2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Так как определитель системы (6.12) равен нулю $(\Delta = 0)$, то одно из уравнений в (6.12) является следствием другого, то есть собственные векторы могут быть найдены, например, из первого уравнения:

$$-3\alpha A_1^1 + 2\alpha A_1^1 - \alpha A_2^1 = 0 \qquad A_1^1 = -A_2^1$$
$$-\alpha A_1^2 + 2\alpha A_1^2 - \alpha A_2^2 = 0 \qquad A_1^2 = A_2^2.$$

Как и ожидалось, собственные векторы определяются с точностью до постоянного множителя. Например, можно положить

$$A^1{}_1=1,\ A^1{}_2=-1, \qquad A^2{}_1=1,\ A^2{}_2=1, \tag{6.13}$$

тогда общее решение окончательно записывается в виде

$$x_1 = \quad C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 (\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2 = -C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 (\omega_2 t + \varphi_2).$$

Для отыскания нормальных координат необходимо рассмотреть вопросы ортогональности и нормировки собственных векторов. Сравнивая общий вид функции Лагранжа малых колебаний (6.1) с функцией Лагранжа данной задачи (6.10), заключаем, что матрица m_{ij} имеет диагональный вид $m_{ij}=m\delta_{ij}$ (где δ_{ij} – символ Кронекера, а индексы i и j пробегают значения 1 и 2). Условие ортонормировки (6.8) тогда принимает вид

$$m\,(A^k{}_1 A^l{}_1 + A^k{}_2 A^l{}_2) = \delta_{ij}. \tag{6.14}$$

Согласно общей теории, в силу различающихся собственных частот, собственные векторы в данной задаче ортогональны автоматически. В этом нетрудно убедиться, подставляя (6.13) в (6.14) для k=1, l=2. Норма векторов выражается квадратным корнем из левой части (6.14) при k=l=1, k=l=2, и для обоих векторов составляет $m^{1/2}$. Деля оба вектора на норму и подставляя в (6.7), получим преобразование к нормальным координатам

$$x_1 = m^{-1/2}\,(\ \eta_1 + \eta_2)$$
$$x_2 = m^{-1/2}\,(-\eta_1 + \eta_2).$$

Согласно общей теории, в этих координатах функция Лагранжа принимает вид (6.9):

$$L = \frac{1}{2}(\dot\eta_1^2 - \omega_1^2\eta_1^2) + \frac{1}{2}(\dot\eta_2^2 - \omega_2^2\eta_2^2)\,.$$

7. Уравнения Гамильтона

Формулировка законов механики с помощью функции Лагранжа предполагает описание состояния системы путем задания её обобщённых координат и скоростей. Такое описание не является единственно возможным. Формализм Гамильтона опирается на описание состояния в виде совокупности координат и импульсов (называемых *каноническими переменными*). Как будет показано ниже, такой подход обеспечивает ряд дополнительных преимуществ при решении конкретных задач в сравнении с формализмом Лагранжа.

Запишем полный дифференциал функции Лагранжа L=T–U:

$$dL = \sum\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}d\dot q_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}dt\,.$$

Учитывая уравнение Лагранжа и определение обобщенного импульса, получим

$$dL = \sum(\dot p_i dq\ + p_i d\dot q_i) + \frac{\partial L}{\partial t}dt = \sum(\dot p_i dq_i + dp_i\dot q_i - \dot q_i dp_i) + \frac{\partial L}{\partial t}dt\,.$$

Отсюда

$$\sum d(p_i\dot q_i - L) = dH = \sum(\dot q_i dp_i - \dot p_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t}dt\,, \qquad (7.1)$$

где H – значение обобщенной энергии. Если теперь в функции обобщенной энергии $H = H(q,\dot q,t)$ выразить все обобщённые скорости через импульсы, то получим функцию $H = H(q,p,t)$, называемую *функцией Гамильтона*. Запишем её полный дифференциал

$$dH = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt\,. \qquad (7.2)$$

Сравнивая (7.1) и (7.2), получим уравнения движения, называемые *уравнениями Гамильтона*, вместе с законом изменения обобщённой энергии:

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad\qquad \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H(q,\,p,\,t)}{\partial t}\,. \qquad (7.3)$$

Уравнения Гамильтона имеют более симметричный вид, чем уравнения Лагранжа, удобнее для получения интегралов движения и инвариантны к более широкому классу преобразований переменных.

Вариационный способ получения уравнений Гамильтона

Уравнения Гамильтона могут быть также получены непосредственно из вариационного принципа (см. главу 1). Для этого запишем функционал действия в виде

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (\sum p_i \dot{q}_i - H) dt$$

и найдём его первую вариацию

$$\delta S = 0 = \sum \int_{t_1}^{t_2} (p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i) dt =$$

$$= \sum \int_{t_1}^{t_2} (\frac{d}{dt}(p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i) dt.$$

Легко видеть, что $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} p_i \delta q_i dt = 0$, т.к. $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.

Отсюда, сравнивая коэффициенты при соответствующих вариациях координат и импульсов, получим уравнения Гамильтона, а именно

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Интегралы движения

Аналогично тому, как это было сделано в формализме Лагранжа, будем называть обобщённую координату q_i (импульс p_i) *циклической* (*-им*), если, соответственно, $\partial H/\partial q_i=0$ или $\partial H/\partial p_i=0$.

Из уравнений Гамильтона непосредственно следует, что в случае цикличности обобщённой координаты сохраняется соответствующий импульс, а в случае цикличности импульса – соответствующая обобщённая координата. Заметим, что обобщённые координата и импульс, относящиеся к одной степени свободы, называются *канонически сопряжёнными* переменными. Таким образом, если какая-либо каноническая переменная является циклической, то канонически сопряжённая к ней является интегралом движения (сохраняется).

Если время является циклическим, то сохраняется обобщенная энергия, то есть значение функции Гамильтона:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \to \quad H = const.$$

Примеры построения функций Гамильтона

1. Функция Гамильтона материальной точки в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

Для цилиндрической системы координат имеем функцию Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho,\varphi,z,t).$$

Найдем $p_\rho = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}, \quad p_z = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{z}} = m\dot{z}$.

Запишем обобщённую энергию, в которой выразим обобщённые скорости через импульсы. Тогда функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m}(p_\rho{}^2 + \frac{p_\varphi{}^2}{\rho^2} + p_z^2) + V(\rho,\varphi,z).$$

Аналогично, в декартовой системе $H = \dfrac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x,y,z)$,

в сферической системе $H = \dfrac{1}{2m}(p_r^2 + \dfrac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta} + \dfrac{p_\theta^2}{r^2}) + V(r,\varphi,\theta)$.

2. Рассмотрим движение частицы в магнитном поле, где векторный потенциал задан как $A = (A_x = 0, A_y = \mathrm{H}x,\ A_z = 0)$, где H – напряженность магнитного поля (см. раздел «Движение частиц в магнитном поле» главы 5). Найдем обобщённую энергию $H = L_2 - L_0$, используя запись (3.5). Переходя к обобщённым импульсам, получим $H = \dfrac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + \dfrac{1}{2m}(p_y - \dfrac{e\mathrm{H}}{c}x)^2$.

Координаты y и z являются циклическими, следовательно, сопряжённые с ними импульсы p_y и p_z сохраняются. Запишем сначала уравнения Гамильтона для (нециклической) координаты x и сопряжённого импульса p_x:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m} \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{e\mathrm{H}}{mc}(p_y^0 - \dfrac{e\mathrm{H}}{c}x) = \omega^2 m(x_0 - x) \end{cases}, \qquad (7.4)$$

где $\omega^2 = \dfrac{e\mathrm{H}}{mc}, \quad x_0 = \dfrac{cp_y^0}{e\mathrm{H}}$.

Важно, что эти уравнения не содержат координат y и z (это напрямую следует из факта, что функция Гамильтона не зависит от этих координат, то есть, из их цикличности).

Теперь запишем уравнения Гамильтона для циклических координат y и z:

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} = \dfrac{1}{m}(p_y^0 - \dfrac{e\mathrm{H}}{c}x) = \dfrac{p_y^0}{m} - \omega^2\ x \\ \dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} = \dfrac{p_z^0}{m} \end{cases}, \qquad (7.5)$$

при этом уравнения для соответствующих импульсов p_y и p_z сводятся к законам сохранения $p_y=const=p_y^0$, $p_z=const=p_z^0$, в силу цикличности y и z. Сохраняющиеся величины импульсов p_y^0, p_z^0, входящие в правые части уравнений Гамильтона, могут трактоваться как параметры.

Заметим, что уравнения движения (7.4) для нециклической координаты x и сопряжённого импульса p_x могут быть решены независимо от остальных уравнений:

$$x(t) = x_0 + a\cos(\omega t + \varphi),$$

где a, φ – константы интегрирования.

После того, как решение $x(t)$ найдено, при необходимости могут быть проинтегрированы уравнения для циклических переменных (7.5), куда подставляется готовое решение $x(t)$:

$$\dot{y} = \omega(x_0 - x) = -\omega\, a\cos(\omega t + \varphi), \text{ т.е. } \; y = y_0 - a\sin(\omega t + \varphi), \text{ и } \; z = \frac{p_z^0}{m}t + z_0,$$

где y_0, z_0 – константы интегрирования.

Описанное свойство уравнений Гамильтона при наличии циклических переменных называют *отщеплением* уравнений для циклических переменных от полной системы уравнений Гамильтона. Оно существенно упрощает интегрирование уравнений, поскольку *совместно* решаются только уравнения для степеней свободы, *не содержащих* циклических переменных; движение же по *циклическим* переменным может быть найдено затем *отдельно*. Такое отщепление уравнений становится возможным благодаря использованию гамильтоновского формализма и является одним из его преимуществ в сравнении с формализмом Лагранжа.

8. Скобки Пуассона

Найдем полную производную по времени (скорость изменения) на траектории движения для некоторой функции состояния $f(q_1,...,q_s,p_1,...,p_s,t)$, где q и p – канонические переменные:

$$\frac{df(q,p,t)}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{8.1}$$

Будем считать, что q и p изменяются согласно уравнениям Гамильтона, то есть $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$. Это означает, что мы рассматриваем изменение $f(q,p,t)$ на решении, удовлетворяющем уравнениям Гамильтона. Тогда получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \tag{8.2}$$

где обозначение $\{f,H\}$ называется скобкой Пуассона от функций f ,H и в общем виде определяется для произвольной пары функций состояния f,g:

$$\{f,g\}=\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right). \tag{8.3}$$

Теперь с помощью (8.2) можно записать изменение во времени любой функции, что делает скобки Пуассона ключевым инструментом механики Гамильтона. Условие интеграла движения, т.е. постоянства функции f во времени на траектории движения, может быть записано в виде

$$\frac{df}{dt}=0=\frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H\}. \tag{8.4}$$

<u>Свойства скобок Пуассона</u>

Все свойства скобок следуют из их определения и доказываются простой подстановкой.

1. $\{f,f\}=0$
2. $\{f,g\}=-\{g,f\}$
3. $\{cf,g\}=c\{f,g\}$
4. $\{f_1+f_2,g\}=\{f_1,g\}+\{f_2,g\}$
5. $\{f_1f_2,g\}=f_1\{f_2,g\}+f_2\{f_1\ ,g\}$.
6. $\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}$
7. $\{q_i,f\}=\frac{\partial f}{\partial p_i}$
8. $\{p_i,f\}=\frac{\partial f}{\partial q_i}$
9. $\{q_i,p_j\}=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$
10. $\{q_i,q_j\}=0,\ \{p_i,p_j\}=0$.

Левые части равенств в свойствах 9 и 10 называют *фундаментальными скобками Пуассона*.

Перепишем уравнения Гамильтона, используя скобки Пуассона. Воспользуемся тем, что переменные q и p независимы, т.е. $\frac{\partial q_i}{\partial p_j}=\frac{\partial p_i}{\partial q_j}=0$, а

$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij}$, запишем соотношение (8.2) для переменных q и p, тогда получим:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} \quad . \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Эта запись является симметричным представлением уравнений Гамильтона через скобки Пуассона.

Тождество Якоби

Это тождество может быть доказано прямым вычислением (см. [1]). Для трех произвольных функций f_1, f_2, f_3 справедливо следующее соотношение:

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0 . \tag{8.6}$$

Теорема Пуассона

Скобки Пуассона дают возможность из двух известных интегралов движения найти третий как скобку из этих функций, то есть, если f_1 и f_2 – интегралы движения, то и $f_3 = \{f_1, f_2\}$ – интеграл движения.

Действительно,

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \{f_1, H\} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{df_2}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial t} + \{f_2, H\} = 0 , \tag{8.7}$$

докажем, что $\frac{d\{f_1, f_2\}}{dt} = \frac{df_3}{dt} = \frac{\partial f_3}{\partial t} + \{f_3, H\} = 0$.

Из (8.6), используя (8.7), получим

$$-\{f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\} + \{f_2, \frac{\partial f_1}{\partial t}\} + \{H \{f_1, f_2\}\} = 0 .$$

Применив свойство 6 (см. выше), мы получим условие того, что скобка Пуассона тоже является интегралом движения

$$\{f_1, \frac{\partial f_{2\}}}{\partial t}\} + \{\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\} + \{\{f_1, f_2\}, H\} = \frac{\partial \{f_1, f_2\}}{\partial t} + \{\{f_1, f_2\} H\} = \frac{d\{f_1, f_2\}}{dt} = 0 .$$

Таким образом, теорема Пуассона является инструментом для отыскания интегралов движения. В то же время, поскольку количество независимых интегралов движения не может быть больше, чем количество степеней свободы системы, интегралы, найденные с помощью теоремы Пуассона, могут совпадать с уже известными или являться тождественными константами (например, быть тождественно равными нулю).

Пример

Известны два интеграла движения для системы, описываемой функцией Гамильтона $H = p_1 p_2 + q_1 q_2$, $f_1 = p_1^2 + q_2^2$, $f_2 = p_2^2 + q_1^2$.

Обозначим $f_3 = \{f_1, f_2\} = 4(q_2 p_2 - q_1 p_1)$. Проверим, является ли f_3 интегралом движения. Для этого вычислим полную производную по времени $\frac{df_3}{dt} = \{f_3, H\} = -4 p_1 p_2 + 4 q_1 q_2 + 4 p_2 p_1 - 4 q_2 q_1 = 0$, то есть $f_3 = const$ – интеграл движения.

9. Канонические преобразования

Как известно, лагранжев аппарат инвариантен по отношению к точечным преобразованиям (преобразованиям обобщённых координат). Гамильтонов аппарат, в свою очередь, обладает инвариантностью по отношению к более широкому классу преобразований – каноническим преобразованиям, в которых участвуют как обобщённые координаты, так и импульсы. Благодаря этому, гамильтонов аппарат обладает большей гибкостью при решении конкретных задач, чем лагранжев.

Рассмотрим преобразование координат и импульсов $q_i \to Q_i(q, p, t), \quad p_i \to P_i(q, p, t)$, где q и p – старые координаты и импульсы, а Q и P – новые. Такое преобразование называется *каноническим*, если оно сохраняет форму уравнений движения, аналогичную уравнениям Гамильтона. При этом сама функция Гамильтона, которой порождаются уравнения, вообще говоря, может различаться в новых и в старых переменных.

Выясним возможный вид канонического преобразования. Потребуем, чтобы в новых переменных уравнения движения имели форму уравнений Гамильтона:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \quad \frac{dH'}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial t}, \tag{9.1}$$

где H' – функция Гамильтона в новых переменных.

Уравнения Гамильтона могут быть получены из вариационного принципа (см. главу 7), поэтому в новых переменных также должен быть справедлив вариационный принцип

$$\delta S' = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum_i \dot{Q}_i P_i - H') dt = 0. \tag{9.2}$$

Поскольку уравнения движения и в новых, и в старых переменных описывают одну и ту же систему, подынтегральные функции в интеграле действия, записанном в новых и старых переменных, должны различаться на полную производную от некоторой произвольной функции координат и времени:

$$\sum_i \dot{q}_i p_i - H = \sum_i \dot{Q}_i P_i - H' + \frac{dF_1}{dt}, \tag{9.3}$$

при этом $\delta S' = \delta S = 0, \quad \delta t = 0, \quad \delta q(t_1) = \delta q(t_2)$, так как не варьируются граничные значения координат и время.

Из (9.3) имеем $dF_1 = \sum_i p_i dq_i - Hdt - \sum_i P_i\, dQ_i - H'dt$. Отсюда видно, что F_1 зависит от q, Q и t, причём

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{9.4}$$

Полученные соотношения представляют собой неявную запись канонического преобразования вместе с выражением для функции Гамильтона в новых переменных. Преобразование может быть записано в явном виде, если разрешить (9.4) как систему уравнений относительно новых или старых переменных. Функция $F_1(q,Q,t)$, которая определяет конкретный вид преобразования, называется *производящей функцией* канонического преобразования.

Существуют другие типы производящих функций, например, $F_2 = F_2(q,P,t)$, где функция F_2 связана с F_1 преобразованием Лежандра $F_2 = F_1 + \sum_i P_i Q_i$. Запишем полный дифференциал dF_2 :

$$dF_2 = \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial F_2}{\partial P_i} + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt = d(F_1 + \sum_i P_i Q_i) = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i +$$

$$+ \frac{\partial F_1}{\partial t} dt + \sum_i Q_i dP_i + \sum_i P_i dQ_i = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i - \sum_i P_i dQ_i + \frac{\partial F_i}{\partial t} dt + \sum_i Q_i dP_i + \sum_i P_i dQ_i.$$

Отсюда получим запись канонического преобразования через производящую функцию F_2 в виде

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{\partial F_2}{\partial t} = H' - H. \tag{9.5}$$

Также вводятся в рассмотрение производящие функции, определяемые следующим образом:

$$F_3 = F_1 - \sum_i p_i q_i, \quad F_4 = F_1 + \sum_i (Q_i P_i - p_i q_i). \tag{9.6}$$

Запишем вид канонических преобразований для всех четырёх рассмотренных типов производящих функций F_1, F_2, F_3, F_4:

$$\begin{aligned}
&F_1(q,Q,t) \to p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \\
&F_2(q,P,t) \to p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\
&F_3(p,Q,t) \to q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_3}, \quad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \\
&F_4(p,P,t) \to q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{9.7}$$

Итак, произвольное преобразование координат и импульсов, вообще говоря, не является каноническим, то есть, не сохраняет гамильтоновскую форму уравнений движения. Так, например, простое взаимное переименование координат в импульсы (и наоборот) не является каноническим преобразованием, поскольку в уравнениях Гамильтона (7.3) правые части для координат и импульсов не одинаковы по форме (имеют разные знаки).

В то же время, класс преобразований, представимых в форме (9.7) (чем обеспечивается каноничность преобразования), достаточно широк. Каноническое преобразование общего вида «перемешивает» координаты и импульсы (в выражения как для новых координат, так и для новых импульсов могут входить одновременно и старые координаты, и старые импульсы), в результате чего понятия координат и импульсов в гамильтоновском формализме утрачивают свой первоначальный смысл. Так, взаимное переименование координат в импульсы и наоборот, сопровождаемое сменой знака координат, оказывается каноническим преобразованием. Производящей функцией такого преобразования является функция $F_1 = \sum_i q_i Q_i$. В самом деле, подставляя это выражение в (9.4), получим:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i .$$

В каноничности этого преобразования можно также убедиться непосредственной подстановкой в уравнения Гамильтона, которые сохраняют свой вид в новых переменных. Этот пример служит иллюстрацией равноправного положения обобщенных координат и импульсов в гамильтоновском аппарате. Различие между ними носит формальный характер и состоит лишь в знаке перед правой частью в соответствующем уравнении Гамильтона.

Точечные преобразования, где новые координаты выражаются только через старые координаты (и время, если преобразование нестационарное) $Q_i = f_i(q,t)$, являются частным случаем канонического преобразования. Найдем производящую функцию $F_2(q,P,t)$, которой порождается точечное преобразование, и получим соответствующее выражение для преобразования импульсов. Воспользуемся формулами (9.7):

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \to F_2 = \sum_i f_i(q,t)\, P_i ,$$

$$\begin{cases} p_j = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_i \dfrac{\partial f(q,t)_i}{\partial q_j} P_i \\ Q_j = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_j} = f_j(q,t). \end{cases} \qquad (9.8)$$

10. Критерий каноничности преобразований

Если известно преобразование, заданное с помощью производящей функции, то оно автоматически является каноническим. Если производящая функция неизвестна, то каноничность преобразования может быть установлена с помощью необходимого и достаточного условия каноничности:

$$\{Q_i,P_j\}_{q,p}=\delta_{ij}\quad \{Q_i,Q_j\}_{q,p}=\{P_i,P_j\}_{q,p}=0\,, \tag{10.1}$$

где индексы q,p при скобке Пуассона означают, что частные производные в выражении для скобки Пуассона (8.3) берутся по *старым* каноническим переменным q, p, а не по *новым* Q, P (в последнем случае выражение (10.1) было бы тождеством, см. свойства 9,10 в главе 8). Докажем это утверждение, используя производящие функции.

По определению скобки Пуассона (8.3), имеем

$$\{Q_i,P_j\}_{q,p}=\sum_k\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k}-\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right). \tag{10.2}$$

Преобразуем это выражение, используя производящие функции типа $F_3(p,Q)$ и $F_1(q,Q)$.

Найдем

$$\frac{\partial P_j}{\partial p_k}=\frac{\partial}{\partial p_k}\left(-\frac{\partial F_3}{\partial Q_j}\right)=-\frac{\partial}{\partial Q_j}\frac{\partial F_3}{\partial p_k}=+\frac{\partial q_k}{\partial Q_j}\,,$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial p_k}\left(-\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}\right)=-\frac{\partial p_k}{\partial Q_j}\,.$$

Подставляя эти выражения в (10.2), получим

$$\{Q_i,P_j\}_{q,p}=\sum_k\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial Q_j}+\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial Q_j}=\frac{\partial Q_i}{\partial Q_j}=\delta_{ij}\,.$$

Аналогично доказываются и остальные равенства в (10.1).

Примеры

1. Убедимся в каноничности точечного преобразования от декартовых координат к полярным (для простоты возьмем только две координаты) и найдём производящую функцию этого преобразования. Удобно считать, что x и y являются «новыми» координатами, а r и φ «старыми». Преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} x&=r\cos\varphi,\quad P_x=p_r\cos\varphi-\frac{p_\varphi}{r}\sin\varphi\\ y&=r\sin\varphi,\quad P_y=p_r\sin\varphi+\frac{p_\varphi}{r}\cos\varphi, \end{aligned} \tag{10.3}$$

где $P_x=m\dot{x},\quad P_y=m\dot{y},\quad p_r=m\dot{r},\quad p_\varphi=mr^2\varphi$.

Каноничность преобразования обеспечивается выполнением следующих условий

$$\begin{gathered} \{x,y\}=0,\quad \{P_x,P_y\}=0\\ \{x,P_x\}=1,\quad \{y,P_y\}=1\\ \{x,P_y\}=0,\quad \{y,P_x\}=0\,, \end{gathered}$$

где скобки вычисляются по старым переменным $r, \varphi, p_r, p_\varphi$ для выражений (10.3). Проверим некоторые из них:

$$\{x, y\} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial P_r} - \frac{\partial x}{\partial P_r}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial P_\varphi} - \frac{\partial x}{\partial P_\varphi}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\{x, P_x\} = \cos\varphi\cos\varphi + (-r\sin\varphi(-\frac{1}{r}\sin\varphi)) = 1.$$

Остальные условия проверяются аналогично. Следовательно, преобразование каноническое.

Построим производящую функцию типа $F_2(r, \varphi, P_x, P_y)$ для этого преобразования. Из (10.3) имеем

$$x = \frac{\partial F_2}{\partial P_x} = r\cos\varphi, \quad y = \frac{F_2}{\partial P_y} = r\sin\varphi,$$

откуда получаем $F_2 = rP_x\cos\varphi + rP_y\sin\varphi + f(r,\varphi)$, где функция $f(r,\varphi)$ пока не определена. Найдём её, используя соответствующие формулы из (9.7). Известно, что $p_r = \frac{\partial F_2}{\partial r} = P_x\cos\varphi + P_y\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial r} = p_r + \frac{\partial f}{\partial r}$. Следовательно, f не зависит от r. Аналогично показывается, что f не зависит от φ. А это значит, что $f = const$. Итак, $F_2 = rP_x\cos\varphi + rP_y\sin\varphi$.

11. Контрольные задания

1. Вывод уравнений Лагранжа из вариационного принципа.
2. Инвариантность уравнений Лагранжа относительно точечных преобразований обобщенных координат.
3. Функция Лагранжа материальной точки в различных системах координат.
4. Функция Лагранжа для гармонического осциллятора, точки в поле силы тяжести, сферического маятника, частицы в электромагнитном поле.
5. Определение обобщенного импульса и обобщенной энергии.
6. Законы сохранения и изменения обобщенного импульса и энергии для потенциальных систем.
7. Циклические переменные и обобщённые интегралы движения.
8. Структура функции Лагранжа механических систем в обобщенных координатах.
9. Функция Лагранжа частицы в поле центральной силы.
10. Эффективный потенциал частицы в поле центральной силы.

11. Основные интегралы движения частицы в поле центральной силы.
12. Четыре режима движения в поле центральной силы.
13. Отыскание и устойчивость состояний равновесия консервативных потенциальных систем.
14. Функция Лагранжа малых колебаний консервативных потенциальных систем.
15. Характеристическое уравнение для собственных частот малых колебаний.
16. Линеаризация консервативных систем в малой окрестности устойчивых состояний равновесия. Функция Лагранжа малых колебаний.
17. Отыскание нормальных координат. Условие ортонормированности собственных векторов линеаризованной задачи, включая случай вырожденных собственных частот.
18. Интегралы движения в уравнениях Гамильтона.
19. Определение скобки Пуассона. Выражение полной производной по времени для произвольной функции импульсов и координат на траектории движения заданной гамильтоновой системы через скобки Пуассона.
20. Свойства скобок Пуассона (с доказательствами).
21. Теорема Пуассона.
22. Запись уравнений Гамильтона через скобки Пуассона.
23. Фундаментальные скобки Пуассона.
24. Для заданной функции Гамильтона $H = q_1 p_1^2 + q_2 p_2^2 - aq_1^2 + bq_2^2$ показать, что $I = q_1 p_1^2 - aq_1^2$ является интегралом движения.
25. Дано преобразование координат

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1^2 + q_2^2 \\ Q_2 &= q_1 q_2 \end{aligned}.$$

Найти соответствующее преобразование импульсов.

26. Найти производящую функцию $F_2(q, P, t)$ для преобразования

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{r} + \vec{v}t \\ \vec{P} = \vec{p} + m\vec{v} \end{cases}$$

и записать функцию Гамильтона в новых координатах для точки в свободном пространстве.

27. Найти условия каноничности преобразования

$$\begin{cases} q = P + aQ^2 \\ p = bQ + (P - cQ^2) \end{cases}$$

и производящую функцию типа $F_1(q, Q, t)$.

28. Дана производящая функция $F_2 = qP^2$. Найти производящую функцию типа $F_1(q, Q, t)$, которая даёт то же преобразование координат.

29. Определение канонических преобразований. Производящая функция (4 вида) и формулы преобразований канонических переменных и функции Гамильтона.

30. Примеры канонических преобразований. Производящие функции тождественного и точечного преобразований.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1965.
2. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.
3. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975.
4. Мотова М.И., Постников Л.В. Методы Лагранжа и Гамильтона в динамике дискретных и распределенных систем. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1991.
5. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965.
6. Коткин Г.Я., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике. М.: Наука, 1977.
7. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов. М.: Физматлит, 2002. 376 с.

Олег Игоревич **Канаков**
Марина Ильинична **Мотова**

МЕТОДЫ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА В ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. . Уч-изд. л.

Заказ № . Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37