

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

О.И. Канаков

## МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ДИСКРЕТНЫЕ БРИЗЕРЫ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета  
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки  
010800 «Радиофизика» и специальности 010801 «Радиофизика  
и электроника»

Нижний Новгород  
2012

УДК 537.86, 530.182  
ББК 22.311  
К-19

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент **И.Ю. Дёмин**

К-19 Канаков О.И. Модуляционная неустойчивость и дискретные бризеры: Учебно-методическое пособие. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. — 19 с.

В пособии приводятся основы теории дискретных бризеров и модуляционной неустойчивости, а также предлагается лабораторная работа, посвященная исследованию механизма генерации дискретных бризеров вследствие модуляционной неустойчивости. Работа выполняется на ЭВМ с помощью готовой программы, разработанной автором пособия, и бесплатного ПО *Scilab*, распространяемого на условиях открытого исходного кода.

Пособие предназначено для студентов радиофизического факультета Нижегородского госуниверситета, специализирующихся в области теории нелинейных колебаний и волн. Рекомендуется при изучении дисциплин «Введение в теорию дискретных бризеров», «Дискретные бризеры».

Ответственный за выпуск:  
заместитель председателя методической комиссии  
радиофизического факультета ННГУ  
д.ф.-м.н., профессор **Е.З. Грибова**

УДК 537.86, 530.182  
ББК 22.311

© О.И. Канаков, 2012  
© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2012

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1. Основы теории</b>	<b>5</b>
1.1. Дискретные бризеры . . . . .	5
1.2. Модуляционная неустойчивость и формирование бризеров . .	7
<b>2. Лабораторная работа</b>	<b>10</b>
2.1. Описание программы для численного моделирования . . . . .	10
2.2. Указания по работе в пакете Scilab . . . . .	12
2.3. Задания . . . . .	15
2.4. Контрольные вопросы . . . . .	17
<b>Список литературы</b>	<b>18</b>

# Введение

Дискретные бризеры — это локализованные, не распространяющиеся в пространстве колебательные возбуждения в консервативных решеточных системах [1, 2, 3] (см. тж. ссылки в этих работах). В зависимости от постановки задачи, говорят о дискретных бризерах либо с бесконечным временем жизни (в этом случае решение всегда периодически во времени, а соответствующее семейство траекторий имеет нулевую меру в фазовом пространстве, что означает нулевую вероятность наблюдения), либо с конечным временем жизни (такие решения имеют ненулевую вероятностную меру и могут быть реализованы в физических системах или статистическом численном эксперименте).

Существуют экспериментальные свидетельства возникновения таких локализованных возбуждений в различных физических системах, включая решетки спинов в антиферромагнетиках, решетки связанных нелинейных оптических волноводов («фотонные кристаллы»), ансамбли микромеханических осцилляторов.

Применение подобных систем в качестве элементной базы перспективных радиочастотных фильтров, магнетометров и других устройств обуславливает не только фундаментальный, но и прикладной интерес к бризерным структурам.

Одним из возможных механизмов генерации дискретных бризеров с большим, но конечным временем жизни в физических процессах является разрушение гармонической волны вследствие модуляционной неустойчивости.

В данном пособии приводятся основы теории дискретных бризеров и модуляционной неустойчивости, а также предлагается лабораторная работа, посвященная исследованию механизма генерации дискретных бризеров за счет модуляционной неустойчивости. Работа выполняется на ЭВМ с помощью готовой программы, разработанной автором пособия, и бесплатного ПО *Scilab*, распространяемого на условиях открытого исходного кода.

# Глава 1. Основы теории

## 1.1. Дискретные бризеры

Решения, локализованные в пространстве и периодические во времени, называемые бризерами, известны в некоторых пространственно непрерывных моделях. Типичным примером непрерывной системы, допускающей бризерные решения, является нелинейное уравнение синус-Гордона.

Бризеры в непрерывных моделях структурно неустойчивы в том смысле, что малое изменение уравнений движения приводит к делокализации решения. Таким образом, бризеры в непрерывных системах можно отнести к «редким» математическим объектам, что снижает интерес к ним с точки зрения физики.

Возможность долгоживущих локализованных колебательных решений в пространственно дискретных системах была первоначально показана на модели двух связанных осцилляторов для классического и квантового случаев А.А. Овчинниковым в 1969 году [5]. Впоследствии такие решения многократно обнаруживались в численных экспериментах и, по аналогии с бризерами в непрерывных системах, были названы дискретными бризерами. Известны также другие наименования: *внутренне-локализованные моды* (intrinsic localized modes) — в физике твердого тела и *дискретные солитоны* — в нелинейной оптике.

Существование дискретных бризеров как периодических во времени решений, локализованных в дискретном пространстве, было строго доказано в работе [6] для бесконечных цепочек нелинейных осцилляторов с локальными разностными линейными связями, описываемых функцией Гамильтона [4]

$$H = \sum_n \left( \frac{p_n^2}{2} + U(x_n) + \frac{1}{2}\varkappa(x_{n+1} - x_n)^2 \right),$$

где  $U(x) \in C^2$  — потенциал нелинейного осциллятора,  $U'(0) = 0$ ,  $U''(0) = \omega_0^2 > 0$ ,  $\varkappa$  — параметр связи. Соответствующие уравнения движения имеют

вид

$$\ddot{x}_n = -U'(x_n) + \varkappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}). \quad (1.1)$$

Доказательство, предложенное в [6], носит конструктивный характер. А именно, в работе описан алгоритм построения дискретных бризеров в таких системах на основе метода непрерывного продолжения решения. В качестве продолжаемого рассматривается периодическое решение в бесконечной цепочке несвязанных осцилляторов ( $\varkappa = 0$ ), где один из осцилляторов совершает колебательное движение, а остальные находятся в покое. Было доказано, что такое решение может быть непрерывно продолжено в банаховом пространстве обратимых во времени периодических решений на некоторую область ненулевых значений параметра связи  $\varkappa > 0$  при выполнении условий *ангармоничности* продолжаемой орбиты (то есть, ненулевой производной её частоты по соответствующей переменной действия [4]) и её *нерезонансности* по отношению к малым колебаниям (то есть, ни сама частота, ни какая-либо из её гармоник не должна совпадать с частотой малых колебаний парциального осциллятора  $\omega_0$ ). Эти условия носят достаточно общий характер. Системы, допускающие существование дискретных бризеров, вообще говоря, неинтегрируемы. Таким образом, дискретные бризеры, в отличие от бризеров в непрерывных системах, не являются «редкими», поэтому можно говорить о потенциальной важности этого класса решений в физике.

На основе этого конструктивного алгоритма и метода точечных отображений Пуанкаре позже был предложен численный метод отыскания дискретных бризеров с высокой точностью. Была также показана устойчивость таких решений в линейном приближении (что не означает, вообще говоря, ни орбитальной устойчивости, ни устойчивости по Ляпунову) для некоторых систем в широком диапазоне параметров.

С физической точки зрения, условием локализации энергии в дискретном бризере является невозможность ее излучения на бесконечность в виде линейных волн. Поскольку амплитуда колебаний, по определению дискретного бризера, стремится к нулю с удалением от его центра, асимптотика «хвостов» дискретного бризера описывается линейным приближением. Пересечение гармоник бризера со спектром линейных волн привело бы к излучению энергии из бризера в виде таких волн и к убыванию энергии бризера со временем. Это означает, что частота дискретного бризера вместе со всеми гармониками должна лежать за пределами спектра линейных волн. В этом случае излучения энергии не происходит, и решение остается локализованным в пространстве. Физическими предпосылками существования дискретных бризеров являются, таким образом, ограниченность линейного спектра

системы (достигаемая за счет пространственной дискретности) и ангармоничность парциального элемента (благодаря которой частота нелинейных колебаний может оказаться за пределами спектра линейных волн) [1].

## 1.2. Модуляционная неустойчивость и формирование бризеров

Заметим, что множество дискретных бризеров как точных периодических решений в фазовом пространстве решеточной системы имеет меру нуль, что означает нулевую вероятность реализации такого точного периодического решения в физической системе. Поэтому говорят также о дискретных бризерах в «физическом смысле» как о решениях, характеризующихся пространственной локализацией энергии, имеющей, в отличие от строго периодических решений, конечное время жизни. Именно в этом смысле термин «дискретный бризер» употребляется в дальнейшем.

Одним из возможных механизмов генерации дискретных бризеров в физических процессах является разрушение гармонической волны за счет модуляционной неустойчивости [7, 8]. На начальном этапе развития неустойчивости волна разбивается на отдельные волновые пакеты. Образующиеся волновые пакеты (в силу некоторой сколь угодно малой случайности в начальных условиях) имеют различную энергию и за счет этого (благодаря нелинейности) слегка различную групповую скорость распространения. Пакеты, имеющие меньшую групповую скорость, поглощают энергию сталкивающихся с ними более быстрых пакетов [8], что приводит к систематическому нарастанию их энергии. В свою очередь, нарастание энергии приводит к дальнейшему замедлению такого пакета, что повышает частоту столкновений с быстрыми пакетами. Таким образом, процесс накопления энергии и замедления движения пакета становится лавинообразным. Возможно также однократное или многократное изменение направления движения такого пакета.

При превышении энергией пакета некоторого порога, который можно оценить в рамках «одночастичного приближения» [2], возбуждение становится неподвижным, и таким образом формируется дискретный бризер. Образовавшийся бризер продолжает взаимодействовать с окружением, в результате чего он может в случайные моменты времени изменять свое положение в решетке. Также взаимодействием с окружением объясняется конечное время жизни такого бризера: в случайный момент времени он разрушается.

Приведем основные аналитические результаты, относящиеся к модуляци-

онной неустойчивости в решеточных системах. Подробности анализа представлены в работах [8] (одномерный случай) и [9] (многомерный случай).

Рассмотрим одномерную безграничную цепочечную систему, описываемую уравнением

$$\ddot{x}_n + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \varkappa(x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}), \quad (1.2)$$

что соответствует уравнению вида (1.1) с потенциалом

$$U(x) = \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{\beta x^4}{4}.$$

Запишем решение этого уравнения в форме слабomodулированной гармонической волны:

$$x_n(t) = \frac{1}{2}(A + z_n(t))e^{i(\omega t - kn)} + c.c.,$$

где  $A$ ,  $\omega$  и  $k$  — амплитуда, частота и (безразмерное) волновое число<sup>1</sup> исходной волны,  $z_n(t)$  — новые комплексные переменные, отвечающие за модуляцию, которые полагаются малыми ( $|z_n(t)| \ll |A|$ ),  $c.c.$  — комплексно сопряженное выражение.

В предположении  $4\varkappa \ll \omega_0^2$ ,  $3\beta|A|^2/4 \ll \omega_0^2$  уравнения движения усредняются на периоде  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , затем линеаризуются по малым отклонениям  $z_n$ .

Для величин  $\omega$ ,  $k$  и  $A$  получается связывающее их приближенное соотношение («нелинейное дисперсионное уравнение»)

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega, \quad 2\omega_0\delta\omega \approx 4\varkappa \sin^2 \frac{k}{2} + \frac{3\beta|A|^2}{4}.$$

Общее решение линеаризованных уравнений для  $z_n(t)$  представляет собой суперпозицию комплексных экспонент, каждая из которых отвечает за некоторую гармоническую модуляцию (огibaющую) исходной волны и имеет вид

$$z_n(t) = \alpha e^{\delta t} e^{i(\Omega t - cn)},$$

где  $\delta$  — инкремент неустойчивости,  $\Omega$  и  $c$  — частота и волновое число огibaющей.

Анализ показывает, что ненулевой действительный инкремент  $\delta$  имеют огibaющие, у которых волновое число  $c$  удовлетворяет неравенству

$$\left| 4\varkappa \cos k \sin^2 \frac{c}{2} + \frac{3\beta|A|^2}{4} \right| < \left| \frac{3\beta|A|^2}{4} \right|, \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>Безразмерное волновое число соответствует безразмерной же дискретной пространственной координате.

при этом связь между  $c$  и  $\Omega$  (дисперсионное соотношение для огибающей) имеет вид

$$\Omega = \frac{\varkappa}{\omega_0} \sin k \sin c. \quad (1.4)$$

Неравенство (1.3) имеет непустое решение только в случае, если два слагаемых под модулем в его левой части противоположны по знаку, что выполняется, если

$$\beta \cos k < 0. \quad (1.5)$$

Иными словами, модуляционная неустойчивость в одномерной решетке (1.2) при  $\beta > 0$  имеет место для волн с волновыми числами в диапазоне  $\pi/2 < k < \pi$ , а при  $\beta < 0$  — в диапазоне  $0 < k < \pi/2$ . Указанное правило соответствует критерию Бенджамина-Фейра-Лайтхилла [7] для рассматриваемой системы.

Волновое число огибающей, имеющей наибольший инкремент  $\delta$ , определяется выражением

$$c_m = \begin{cases} 2 \arcsin \sqrt{\left| \frac{3\beta A^2}{16\varkappa \cos k} \right|}, & \text{если } \left| \frac{3\beta A^2}{16\varkappa \cos k} \right| < 1; \\ \pi, & \text{если } \left| \frac{3\beta A^2}{16\varkappa \cos k} \right| \geq 1. \end{cases}$$

Преимущественный пространственный масштаб неустойчивости, таким образом, имеет величину

$$L = 2\pi/c_m. \quad (1.6)$$

Фазовая скорость огибающей (то есть, скорость распространения образующихся волновых пакетов), исходя из (1.4), составляет

$$V = \frac{\Omega}{c} = \frac{\varkappa}{\omega_0} \sin k \frac{\sin c}{c}. \quad (1.7)$$

## Глава 2. Лабораторная работа

### 2.1. Описание программы для численного моделирования

Читателю предлагается выполнить лабораторную работу, в которой развитие модуляционной неустойчивости с последующим формированием дискретных бризеров моделируется численно с помощью ЭВМ. В качестве математической модели используется одномерная цепочечная система вида (1.2), содержащая  $N = 400$  элементов, с периодическими граничными условиями

$$x_0 = x_N, \quad x_{N+1} = x_1. \quad (2.1)$$

Значения параметров  $\omega_0$  и  $\varkappa$  зафиксированы:  $\omega_0 = 1$ ,  $\varkappa = 0,1$ . Параметр  $\beta$  должен быть задан в командной строке программы (см. ниже).

Для интегрирования уравнений движения используется реализованный на языке «С» метод Рунге-Кутты 4-го порядка, расчеты выполняются в двойной точности (тип переменных — `double`). Шаг по времени составляет  $h = 0,01$ . Конечный момент времени, до которого производится интегрирование, задается в командной строке.

Начальные условия задаются в виде гармонической волны со слабым мультипликативным шумом:

$$\begin{aligned} x_n(0) &= A(1 + \xi_n) \cos kn \\ \dot{x}_n(0) &= \omega A(1 + \eta_n) \sin kn, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где параметры  $A$  и  $k$  задаются в командной строке программы, а частота  $\omega$  рассчитывается в программе исходя из дисперсионной характеристики с учетом нелинейного сдвига частоты в первом приближении:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\varkappa \sin^2 \frac{k}{2} + \frac{3\beta A^2}{4}.$$

Случайные величины  $\xi_n, \eta_n$  в (2.2) независимы и распределены равномерно на интервале  $(0, \zeta)$ , где  $\zeta$  задается через командную строку. Для генерации случайных чисел в программе используется функция `rand()` из стандартной библиотеки языка «С» (заголовочный файл `stdlib.h`).

Заметим, что волновое число  $k$  должно задаваться таким образом, чтобы начальные условия (2.2) удовлетворяли граничным условиям (2.1), то есть, должно выполняться равенство

$$kN = 2\pi m, \quad (2.3)$$

где  $m$  — целое число. Модуляционная неустойчивость будет наблюдаться лишь в случае, если волновое число  $k$  удовлетворяет также условию (1.5).

В качестве основной измеряемой величины выступает дискретная плотность энергии (локальная энергия осциллятора)  $\varepsilon_n$ , определяемая соотношением

$$\varepsilon_n = \frac{\dot{x}_n^2}{2} + U(x_n) + \frac{1}{4}\kappa((x_{n-1} - x_n)^2 + (x_{n+1} - x_n)^2).$$

При таком определении условно полагается, что энергия каждой связи делится пополам между взаимодействующими частицами.

По мере интегрирования уравнений движения, программа периодически, через равные интервалы времени  $\Delta t = 50,0$  (включая и начальное состояние при  $t = 0$ ), выводит в выходной файл «снимки» пространственного распределения энергии по цепочке (под «снимком» понимается полный набор величин  $\varepsilon_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ ). Результирующий файл представляет собой последовательность таких «снимков» и отражает, таким образом, пространственно-временную картину динамики цепочки.

Каждое значение  $\varepsilon_n$  выводится в бинарном формате `float` (размер — четыре байта). Таким образом, например, если полное время интегрирования составляет  $t_{\text{кон}} = 25000$ , то выходной файл можно представить в виде таблицы из  $\lceil t_{\text{кон}}/\Delta t \rceil + 1 = 501$  строк по  $N = 400$  столбцов (значений типа `float`) в каждой. Полный размер такого файла составит

$$\begin{aligned} \text{sizeof(float)} \times N \times \left( \left\lceil \frac{t_{\text{кон}}}{\Delta t} \right\rceil + 1 \right) &= \\ &= 4 \text{ байта} \times 400 \times (500 + 1) = 801600 \text{ байт.} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Командная строка для запуска программы имеет формат

`automod.exe имя_файла β k A ζ s tкон`

где `automod.exe` — имя программы (исполняемого файла), `имя_файла` — имя выходного бинарного файла,  $s$  — номер реализации случайной составляющей начальных условий (2.2), смысл остальных обозначений разъяснялся выше.

Например, бинарный файл с именем `e0.2_1.dat` и размером 801600 байт, уже имеющийся в каталоге программы, создан в результате запуска программы командой

```
automod.exe e0.2_1.dat 0.25 2.3561945 0.2 0.001 1 25000
```

Файл содержит результаты для первой реализации ( $s = 1$ ) эксперимента с параметрами  $\beta = 0,25$ ,  $k = 2,3561945 \approx 3\pi/4$ ,  $A = 0,2$ ,  $\zeta = 0,001$  на интервале времени от 0 до 25000. Файл состоит из 501 отсчета по времени, в каждом из которых по 400 значений  $\varepsilon_n$  (см. расчет (2.4)).

Изменяя номер реализации  $s$ , можно получить серию различных экспериментов при одинаковых значениях детерминированных параметров. В этом смысле изменение  $s$  моделирует многократное повторение реального эксперимента в одинаковых условиях.

Имя файла может быть любым (в пределах ограничений, накладываемых операционной системой). Необходимо иметь в виду, что если файл с указанным именем уже существует, то этот старый файл будет уничтожен без предупреждения. Если проводится серия экспериментов с различными значениями параметров, то рекомендуется, чтобы имя файла содержало информацию о значениях параметров, которые изменяются в данной серии. Так, в рассмотренном примере в имя файла включено значение параметра  $A = 0,2$  и номер реализации  $s = 1$ .

## 2.2. Указания по работе в пакете Scilab

Обработка полученных бинарных файлов производится с помощью программного пакета *Scilab*<sup>1</sup>, бесплатно распространяемого на условиях лицензии *CeCill*<sup>2</sup>, с использованием дополнительных функций, разработанных автором лабораторной работы.

Рассмотрим основные операции, выполняемые в интерфейсе командной строки *Scilab* в процессе обработки результатов численного эксперимента в данной работе.

*Переход в каталог, где расположены бинарные файлы с результатами экспериментов и файлы loadbinf.sci, depict.sci:*

```
-->cd('d:\automod');
```

(вместо d:\automod следует указать фактический путь к каталогу).

*Загрузка и компиляция файлов, содержащих определение дополнительных функций:*

```
-->exec('loadbinf.sci');
```

---

<sup>1</sup><http://www.scilab.org/>

<sup>2</sup><http://www.cecill.info/index.en.html>

```
-->exec('depict.sci');
```

*Определение количества отсчетов по времени, содержащихся в файле (если оно неизвестно):*

```
-->801600/(400*4)
ans =
```

```
501.
```

(вместо 801600 следует подставить реальный размер файла).

*Чтение файла:*

```
-->e=loadbinf('e0.2_1.dat',501,400);
```

Здесь 501 — количество строк в файле (отсчетов по времени); 400 — количество столбцов (значений типа `float` в каждой строке, что в данной работе соответствует количеству узлов цепочки  $N$ ). Следует подставить реальные значения и реальное имя файла. В приведенном примере будет создана переменная `e`, являющаяся матрицей размером в 501 строку на 400 столбцов.

*Представление двумерной матрицы в виде изображения в декартовых координатах:*

```
-->depict(e,50.);
```

Здесь второй аргумент — интервал времени между отсчетами, задает калибровку оси ординат. В результате выполнения команды в новом окне в декартовых координатах строится цветное изображение, причем цвет в каждой точке определяется значением соответствующего элемента матрицы `e` согласно цветовой шкале, отображаемой справа. По оси абсцисс (слева направо) откладывается номер столбца (что в данной работе соответствует номеру узла цепочки, то есть, дискретной пространственной координате), а по оси ординат (снизу вверх) — номер строки, умноженный на второй аргумент функции `depict` (что соответствует времени). Отметим, что первая строка матрицы `e` (начальный момент времени) соответствует нижней границе изображения, а последняя строка (конечный момент времени) — верхней границе.

Таким образом строится пространственно-временная картина динамики плотности энергии в цепочке. На рисунке на странице 16 приведен пример

такого изображения<sup>3</sup>, которое было построено путём выполнения приведённых выше команд по данным из файла `e0.2_1.dat`, прилагаемого к программе. Вертикальная тёмная линия соответствует бризеру, наклонные линии — волновым пакетам, образующимся вследствие модуляционной неустойчивости.

*Другие примеры построения изображений:*

```
-->depict(e(1:100,:),50.);  
-->depict(e(101:200,:),50.);
```

Отображаются только первые 100 строк матрицы `e`, то есть, первые 100 отсчетов по времени (первый вариант) или отсчеты со 101-го по 200-й (второй вариант).

*Измерение скорости движения пакета:*

```
-->locate(2)  
ans =  
  
    206.94311    323.17583  
    2593.9986    4835.5025  
  
-->(323.17583-206.94311)/(4835.5025-2593.9986)  
ans =  
  
    0.0518548
```

Командой `locate(2)` измеряются координаты двух последовательных щелчков левой кнопкой мыши в текущем графическом окне, результаты измерения выводятся в окно командной строки. Столбцы выводимой матрицы соответствуют последовательным щелчкам мыши; первая строка матрицы — абсцисса, вторая строка — ордината. По умолчанию текущим является последнее созданное окно. Чтобы сделать текущим другое окно, следует в меню **Правка** соответствующего окна выбрать пункт **Установить текущим графическим окном**.

Щелчками следует указать две точки на траектории выбранного пакета. Скорость пакета рассчитывается как частное от деления пройденного пути (разность абсцисс двух щелчков) на затраченное время (разность ординат двух щелчков).

---

<sup>3</sup>Изображение на рисунке представлено в чёрно-белой форме. Реальное изображение — цветное.

### *Сохранение построенного изображения в графическом файле:*

В меню **Файл** графического окна выбрать пункт **Экспортировать...**, в открывающемся диалоговом окне указать имя и тип сохраняемого файла (рекомендуется тип **GIF**).

## **2.3. Задания**

Для нескольких значений амплитуды исходной волны  $A$  пронаблюдать возникновение модуляционной неустойчивости, формирование волновых пакетов, взаимодействие пакетов, формирование дискретных бризеров.

Для каждого значения амплитуды  $A$  провести несколько численных экспериментов, различающихся номером реализации  $s$ . Количество значений  $A$  и реализаций  $s$  устанавливает преподаватель.

Полное время интегрирования  $t_{\text{кон}}$  выбирается студентом в каждом эксперименте исходя из достаточности для выполнения заданий.

Значения остальных параметров остаются фиксированными во всей серии экспериментов.

Рекомендуемые значения параметров:  $\beta = 0,25$ ,  $\zeta = 0,001$  (если иное не указано преподавателем).

Студент самостоятельно выбирает значения амплитуд  $A$  (при  $\beta = 0,25$  рекомендуется задавать значения  $A$ , не превышающие 0,5) и волнового числа  $k$  (с учетом требований (1.5) и (2.3)).

В каждом из экспериментов измерить:

1. Значение времени  $t_{\text{пак}}$ , когда становится заметной модуляция волны (становятся различимы пакеты)
2. Период следования пакетов  $L_{\text{пак}}$
3. Скорость распространения пакетов  $V_{\text{пак}}$
4. Значение времени  $t_{\text{бр}}$ , когда формируется первый дискретный бризер
5. Полное количество дискретных бризеров  $n_{\text{бр}}$

К отчету по лабораторной работе должны быть приложены все бинарные файлы и рисунки (в электронном виде), по которым проводились измерения.

Величины  $L_{\text{пак}}$ ,  $V_{\text{пак}}$  оценить аналитически, используя выражения (1.6), (1.7).

Для каждого значения  $A$  результаты рекомендуется свести в таблицу (см. пример на странице 16).

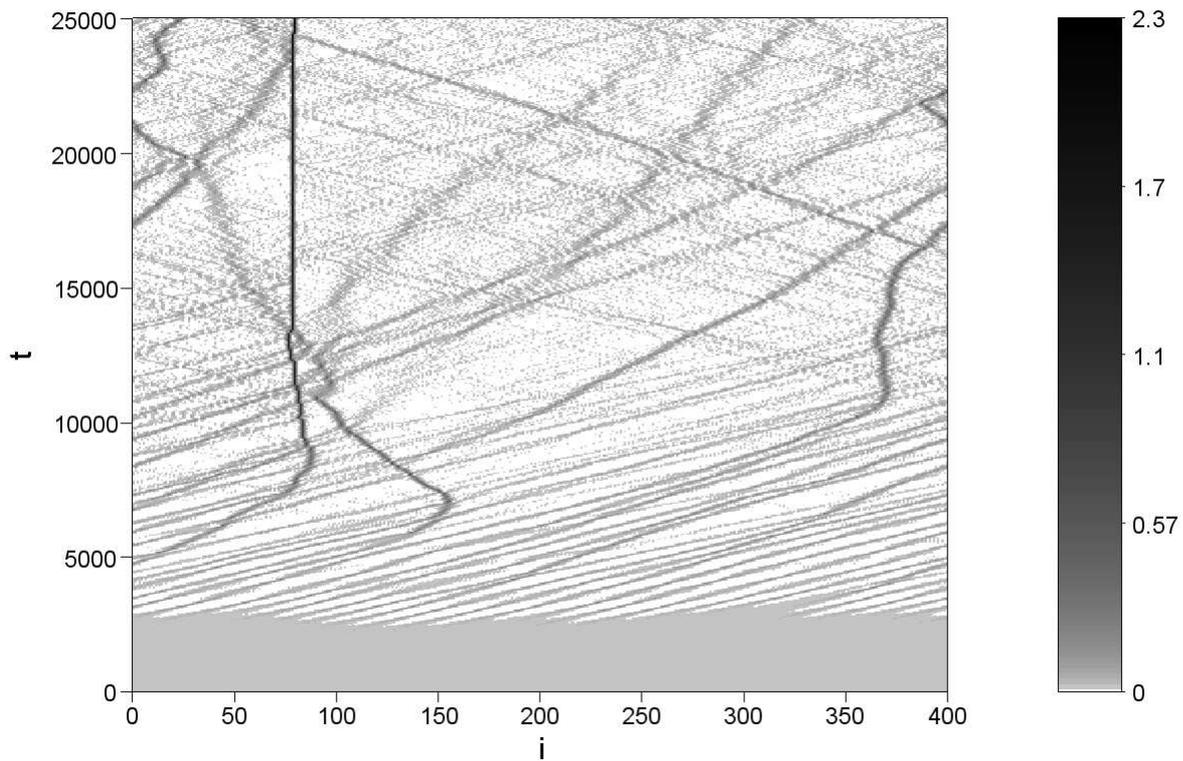


Рис. 1. Пример получаемой картины пространственно-временной динамики

Значения параметров: .....				
	Теория	Численный эксперимент		
		$s = 1$	$s = 2$	...
$t_{\text{пак}}$	—			
$L_{\text{пак}}$				
$V_{\text{пак}}$				
$t_{\text{бр}}$	—			
$n_{\text{бр}}$	—			

Табл. 1. Рекомендуемый формат представления результатов

## 2.4. Контрольные вопросы

Если лабораторная работа выполняется в рамках изучения дисциплин «Введение в теорию дискретных бризеров», «Дискретные бризеры», требуется владение знаниями по следующим вопросам:

1. Нелинейный осциллятор с мягкой и жесткой нелинейностью. Отыскание зависимости частоты (периода) колебаний от энергии осциллятора в приближении Ван-дер-Поля.
2. Линейные цепочечные системы. Дисперсионные уравнения для распространяющихся гармонических волн и колебательных решений, экспоненциальных по пространственной координате.
3. Поток энергии в линейных цепочках в распространяющейся волне, в экспоненциально-локализованном колебательном решении и в суперпозиции решений.
4. Понятие дискретного бризера (ДБ) — пространственно локализованного колебательного решения. Необходимые условия существования ДБ. Дискретность и нелинейность как физические предпосылки существования ДБ.
5. Получение дискретного нелинейного уравнения Шрёдингера (ДНУШ) в рамках приближения Ван-дер-Поля (медленно меняющихся амплитуд) из уравнений движения цепочки связанных осцилляторов. Условия применимости приближения.
6. Бегущая волна как точное решение ДНУШ. «Нелинейное дисперсионное соотношение». Его согласование с точным дисперсионным соотношением линейной системы.
7. Линеаризация ДНУШ в окрестности бегущей волны. Линеаризованные уравнения динамики «дискретной огибающей» (малых добавок к комплексной амплитуде волны).
8. Анализ линейных уравнений дискретной огибающей на устойчивость. Получение выражения для показателя экспоненты нарастания (инкремента) дискретной огибающей.
9. Анализ выражения для инкремента дискретной огибающей. Условия возникновения модуляционной неустойчивости. Отыскание преимущественного пространственного масштаба неустойчивости (волнового числа огибающей, имеющей наибольший инкремент).

# Список литературы

## Основная литература:

- [1] Flach S., Willis C.R. Discrete breathers //Phys. Reports. 1998. Vol. 295. P. 181–264.
- [2] Канаков О.И., Флах С., Шалфеев В.Д. Введение в теорию дискретных бризеров //Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, №3. С. 112–128.
- [3] Канаков О.И., Флах С. Динамическая локализация энергии в решёточных системах: основы теории и приложения: Учебное пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. 85 с. URL: [http://www.unn.ru/books/met\\_files/posobie\\_Kanakov\\_OI.pdf](http://www.unn.ru/books/met_files/posobie_Kanakov_OI.pdf)
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988.

## Дополнительная литература:

- [5] Овчинников А.А. Локализованные долгоживущие колебательные состояния в молекулярных кристаллах //ЖЭТФ. 1969. Т. 57, № 1. С. 263.
- [6] MacKay R.S., Aubry S. Proof of existence of breathers for time-reversible or hamiltonian networks of weakly coupled oscillators. //Nonlinearity. 1994. Vol. 7. P. 1623.
- [7] Zakharov V.E., Ostrovsky L.A. Modulational instability: The beginning //Physica D. 2009. V. 238. P. 540–548.
- [8] Daumont I., Dauxois T., Peyrard M. Modulational instability: first step towards energy localization in nonlinear lattices //Nonlinearity. 1997. Vol. 10. P. 617.
- [9] Канаков О.И., Тихомиров А.А. Особенности явления модуляционной неустойчивости в двумерных решёточных системах //Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 5(3). С. 283–291.

Олег Игоревич **Канаков**

# МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ДИСКРЕТНЫЕ БРИЗЕРЫ

*Учебно-методическое пособие*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60 84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. . Уч-изд. л.  
Заказ № . Тираж 50 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета  
им. Н.И. Лобачевского  
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37  
Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01