УДК 621.391.01

АНАЛИЗ ОБЛАСТЕЙ ГЕНЕРАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

В. В. Матросов, В. Д. Шалфеев, Д. В. Касаткин

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Обсуждаются вопросы генерации хаотически модулированных колебаний в малых ансамблях связанных автогенераторов с фазовым управлением. Особое внимание уделяется анализу областей генерации хаотических колебаний в пространстве параметров. Показано, что переход к коллективной динамике позволяет эффективно решать задачу генерации хаотически модулированных колебаний в достаточно широкой области пространства параметров.

ВВЕДЕНИЕ

Высказанная в [1] идея использования в системах связи хаотических колебаний в качестве несущих нашла достаточно широкий отклик в литературе [2–9]. Очевидные преимущества таких систем, связанные со свойствами широкополосности и сверхширокополосности хаотических сигналов, наличием богатых возможностей управления хаотическими колебаниями и, следовательно, возможностей модуляции хаотических колебаний, выдвинули исследования в этом направлении в ряд актуальных и перспективных [10]. Сейчас можно выделить две ключевые проблемы этого направления — создание эффективно управляемых источников хаотических автоколебаний для различных частотных диапазонов и синхронизацию (подстройку) таких хаотических колебаний.

В традиционных системах связи, основанных на использовании регулярных колебаний, широко применяются системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) [11, 12]. Системы ФАП представляют собой типовое кольцо автоматического управления частотой генератора. В результате действия цепи управления происходит подстройка частоты колебаний управляемого генератора под частоту опорного колебания, в системе ФАП устанавливается режим синхронизации. При выходе из режима синхронизации на выходе системы ФАП возникают асинхронные колебания различной сложности. Среди таких колебаний выделим хаотически модулированные колебания (ХМК) [13, 14], средняя частота которых стабилизирована опорным сигналом. Такие колебания могут представлять большой интерес с точки зрения передачи информации на базе динамического хаоса, где они могут использоваться в качестве несущих колебаний. В этой связи задача исследования несинхронных хаотических режимов системы ФАП с целью создания эффективных генераторов хаотически модулированных колебаний представляется актуальной.

Система ФАП способна генерировать колебания с хаотической модуляцией, если её цепь управления содержит фильтр не ниже второго порядка. Исследования системы ФАП с фильтром второго порядка показали [13, 15], что области генерации ХМК в пространстве параметров этой системы сравнительно малы. Это обстоятельство может представлять определённые трудности при практическом использовании таких систем в качестве генераторов ХМК. Попытки добиться увеличения размеров областей генерации ХМК путём изменения нелинейности фазового дискриминатора, путём варьирования параметров фильтра, а также за счёт изменения структуры локальной цепи управления оказались малоэффективными [16–18]. Наиболее продуктивным представляется подход, основанный на использовании свойств коллективной динамики малых ансамблей связанных систем ФАП [14, 19–27]. Изучение математических моделей таких ансамблей показало, что системы ФАП, объединённые в ансамбль, способны генерировать ХМК даже при

наличии в цепях управления наиболее простых фильтров — фильтров первого порядка. Показано также, что области параметров, где эти колебания реализуются, имеют существенно бóльшие размеры по сравнению с аналогичными областями парциальных систем ФАП. Однако проведённые исследования не затрагивали вопросы внутренней структуры выделенных областей, хотя эта информация крайне важна при выработке рекомендаций по практическому использованию хаотических колебаний. Данная работа продолжает исследования хаотической динамики ансамблей каскадно связанных систем ФАП. Основное внимание здесь уделено анализу областей генерации ХМК в пространстве параметров.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ФАП

Хаотические колебания связанных систем ФАП исследовались путём изучения фазовых траекторий следующих динамических систем [14, 22]:

$$\mu_1 \dddot{\varphi}_1 + \varepsilon_1 \ddot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1 + \sin\varphi_1 + \kappa_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \gamma_1, \qquad \mu_2 \dddot{\varphi}_2 + \varepsilon_2 \ddot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \gamma_2 \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 \ddot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1 + \sin\varphi_1 + \kappa_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \gamma_1, \\ &\varepsilon_2 \ddot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2 + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \kappa_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) = \gamma_2, \\ &\varepsilon_3 \ddot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_3 + \sin(\varphi_3 - \varphi_2) = \gamma_3, \end{aligned} \tag{2}$$

где точка обозначает производную по времени. Модель (1) определена в шестимерном цилиндрическом фазовом пространстве $U = \{\varphi_1 \mod 2\pi,\ y_1 = \dot{\varphi}_1,\ z_1 = \ddot{\varphi}_1,\ \varphi_2 \mod 2\pi,\ y_2 = \dot{\varphi}_2,\ z_2 = \ddot{\varphi}_2\}$ и описывает динамические процессы в ансамбле, состоящем из двух систем ФАП с фильтрами второго порядка в цепях управления, индивидуальная динамика которых может быть как регулярной, так и хаотической. Модель (2) определена в шестимерном цилиндрическом фазовом пространстве $V = \{\varphi_1 \mod 2\pi,\ y_1 = \dot{\varphi}_1,\ \varphi_2 \mod 2\pi,\ y_2 = \dot{\varphi}_2,\ \varphi_3 \mod 2\pi,\ y_3 = \dot{\varphi}_1\}$ и описывает коллективную динамику ансамбля, состоящего из трёх каскадно связанных систем ФАП с фильтрами первого порядка. В этом случае индивидуальная динамика элементов ансамбля может быть только регулярной. В уравнениях (1) и (2) φ_i и γ_i — текущие фазовые и начальные частотные расстройки i-го генератора относительно опорного сигнала, ε_i и μ_i — безразмерные параметры фильтров, $i = 1, 2, 3$.

Используя модели (1) и (2), рассмотрим вопрос о структуре разбиения пространства параметров малых ансамблей каскадно связанных систем ФАП на области, соответствующие различным режимам. При этом основное внимание обратим на области автомодуляционных режимов и, в особенности, на области генерации ХМК. Коллективная хаотическая динамика ансамблей систем ФАП определяется хаотическими аттракторами в глобальных фазовых пространствах соответствующих математических моделей. Динамика отдельных ФАП, входящих в состав ансамбля, определяется проекциями аттракторов на соответствующие локальные подпространства [23]. Если проекция хаотического аттрактора на соответствующее локальное подпространство ограничена по φ_i, это означает, что i-ая система ФАП функционирует в режиме ХМК, в противном случае i-ая система ФАП находится в режиме хаотических биений. Коллективное поведение ансамбля, состоящего из трёх систем ФАП, будем характеризовать индексами вращения (индексами квазисинхронизма) $[J_1, J_2]$ для ансамбля, состоящего из двух систем ФАП, и $[J_1, J_2, J_3]$ для ансамбля из трёх систем ФАП, где $J_i = 1$, если по координате φ_i происходит вращение, и $J_i = 0$ в противном случае. Отсутствие вращения по координатам φ_i означает, что i-ые генераторы работают

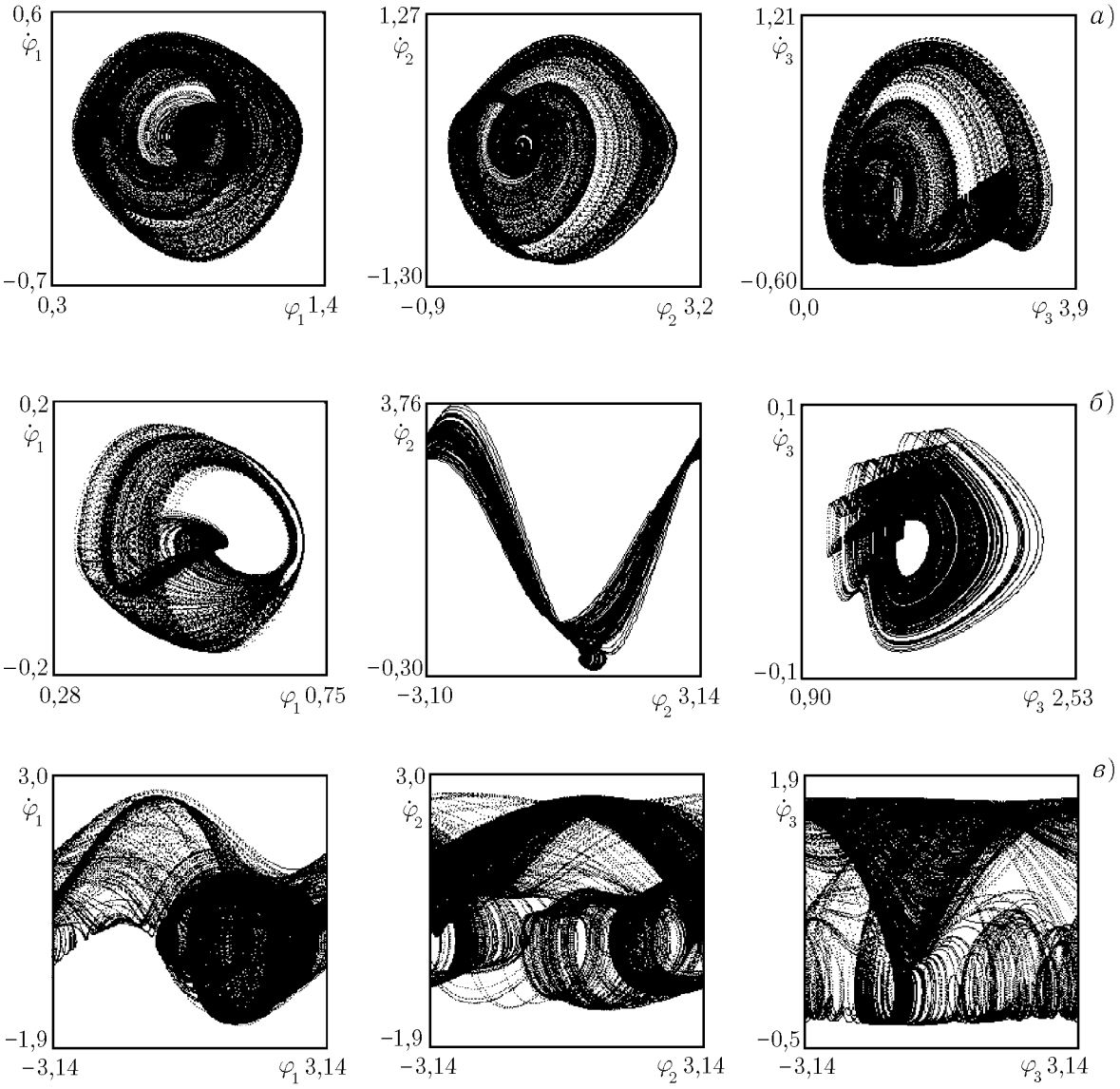

Рис. 1. Примеры хаотических аттракторов модели (2), соответствующие различным динамическим режимам ансамблей ФАП: глобальному ХМК-режиму (*а*), частичному ХМК-режиму с индексом квазисинхронизма $[0, 1, 0]$ (*б*) и глобальному хаотическому режиму биений (*в*)

в квазисинхронном режиме [1], когда остальные генераторы находятся в режиме биений. При этом, если аттрактор хаотический, то на выходе генераторов имеют место либо ХМК, либо хаотические биения. Выход фазовых траекторий на хаотический колебательный аттрактор с индексом вращения $[0, 0, 0]$ (либо $[0, 0]$) соответствует хаотически модулированным колебаниям на выходе всех генераторов ансамбля (рис. 1*а*). Этот режим назовём глобальным ХМК-режимом ансамбля ФАП. Хаотически модулированные колебания на выходе отдельных генераторов соответствуют колебательно-вращательным хаотическим аттракторам, у которых индексы вращения содержат как нули, так и единицы (рис. 1*б*). Эти аттракторы определяют режимы частичной генерации

[1] Квазисинхронный режим — автомодуляционный режим, при котором имеется модуляция частоты управляемого генератора около стабилизированной по опорному сигналу средней частоты. В фазовом пространстве математических моделей этому режиму отвечают аттракторы колебательного типа.

хаотически модулированных колебаний ансамблем систем ФАП, или частичные ХМК-режимы ансамбля ФАП. Наконец, наличие в фазовом пространстве вращательного хаотического аттрактора с индексом вращения $[1, 1, 1]$ (либо $[1, 1]$) отвечает глобальному хаотическому режиму биений (рис. 1*в*).

Введённая выше классификация аттракторов, определяющих динамику ансамблей систем ФАП, позволяет перейти к изучению структуры пространства параметров моделей (1) и (2), которое сводится к разбиению пространства на области автомодуляционных режимов различных типов (с различными индексами квазисинхронизма) и выделению подобластей монорежимов.

2. АНАЛИЗ ОБЛАСТЕЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ АВТОМОДУЛЯЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ

Области существования автомодуляционных колебаний в пространстве параметров моделей (1) и (2) исследовались путём построения и анализа двухпараметрических карт динамических режимов. Алгоритм построения этих карт базируется на построении и анализе отображения Пуанкаре, а также расчёте максимального показателя Ляпунова [17]. Вид карты динамических режимов определяется фиксированными параметрами математической модели, алгоритмом выбора фазовой траектории, порождающей отображение Пуанкаре, и сценарием перехода от одной точки пространства параметров к другой. Выбор алгоритма и сценария построения карты динамических режимов определяется конкретными задачами, для решения которых строится карта.

При изучении областей генерации автомодуляционных колебаний моделей (1) и (2) основное внимание было сосредоточено на выделении и анализе областей параметров, где существуют ХМК (областей D_{u} удержания режима ХМК) и где они реализуются гарантированно (областей D_{z} захвата в режим ХМК). Для оценки областей D_{u} и D_{z} применялись алгоритмы, аналогичные обычно используемым для вычисления полосы захвата и удержания систем фазовой автоподстройки в синхронный режим [28], с той лишь разницей, что вместо синхронного режима анализировался квазисинхронный режим.

Далее остановимся на рассмотрении результатов исследования областей автомодуляционных режимов следующих ансамблей: 1) двух систем ФАП с фильтрами второго порядка, 2) системы ФАП с фильтром первого порядка и системы ФАП с фильтром второго порядка и 3) трёх систем ФАП с фильтрами первого порядка.

2.1. Ансамбль из двух систем ФАП с фильтрами второго порядка [27]

На рис. 2 приведены карты динамических режимов модели (1) на плоскости (μ_1, γ_1), построенные для оценки областей D_{u} и D_{z}. Эти карты составлены из $N = 64\,800$ точек разного цвета — 300 точек по горизонтали и 216 точек по вертикали. Интенсивность цвета точки карты характеризует тип динамического режима ансамбля. При построении карты на рис. 2*а* стартовым являлось состояние модели (1) при $\gamma_1 = 0$, $\mu_1 = 0{,}01$ с начальными условиями на аттракторе типа $[0, 0]$. Затем начальная частотная расстройка увеличивалась с шагом $\Delta_\gamma = 0{,}01$ до тех пор, пока в системе не устанавливался глобальный режим биений, при этом значения фазовых переменных для очередного значения параметра γ наследовались от аттрактора на предыдущем шаге. Далее описанная процедура повторялась для значений $\mu_1 \in [0{,}01; 3{,}0]$ с шагом $\Delta_\mu = 0{,}01$. Рисунок 2*б* является результатом совмещения двух карт динамических режимов: одна построена при изменении γ_1 от 1,1 до $-1{,}0$, другая — при изменении γ_1 от $-1{,}05$ до 1,1. В обоих случаях стартовым состоянием модели (1) являлся аттрактор типа $[1, 1]$, значения фазовых переменных для очередного значения параметра γ наследовались от аттрактора на предыдущем шаге, параметр μ_1 варьировался

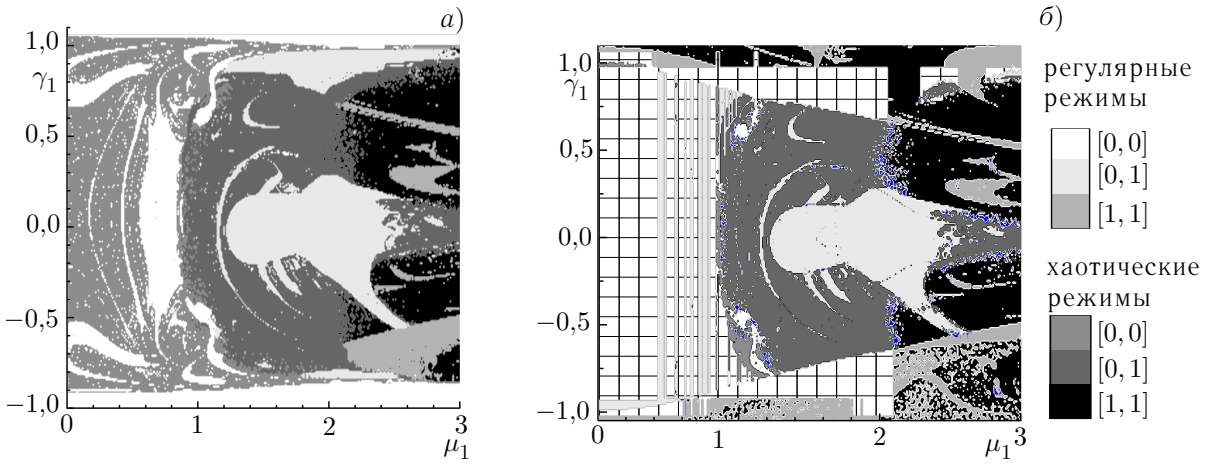

Рис. 2. Карты динамических режимов модели (1), построенные для оценки областей удержания режима ХМК (*а*) и захвата в режим ХМК (*б*) при $\varepsilon_1 = 1$, $\gamma_2 = 0{,}69$, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 2{,}37$, $\kappa_1 = 0{,}1$

в интервале от 0,01 до 3,0 с шагом $\Delta_\mu = 0{,}01$. Совмещение полученных карт позволило выявить области с бистабильным поведением (выделены на рис. 2*б* штриховкой) и определить области монорежимов. Из представленных на рис. 2 карт видно, что при рассматриваемых значениях параметров модель (1) имеет шесть типов динамических режимов: регулярные или хаотические типа $[0, 0]$ — обе системы ФАП функционируют в регулярном или хаотическом квазисинхронных режимах соответственно; регулярные или хаотические режимы типа $[0, 1]$ — система ФАП_1 находится в регулярном или хаотическом квазисинхронном режиме, а система ФАП_2 — в регулярном или хаотическом режиме биений; регулярные и хаотические режимы типа $[1, 1]$ — обе системы ФАП функционируют в регулярном или хаотическом режимах биений. Построенные карты позволяют оценить совокупные размеры областей существования динамических режимов определённого типа по соотношению числа соответствующих им точек к общему числу точек на карте. Вычисленные таким образом совокупные размеры областей существования режима ХМК по рис. 2*а* для систем ФАП_1 и ФАП_2 равны соответственно $D_{\text{u}1} = (N_{[0,0]} + N_{[0,1]})/N = 0{,}56$ и $D_{\text{u}2} = N_{[0,0]}/N = 0{,}27$, где $N_{[0,0]}$ и $N_{[0,1]}$ — число точек на карте, соответствующих установлению хаотического режима типа $[0, 0]$ и $[0, 1]$ соответственно. Области $D_{\text{u}1}$ и $D_{\text{u}2}$ являются областями удержания режима ХМК систем ФАП_1 и ФАП_2 соответственно. Области $D_{\text{z}1}$ и $D_{\text{z}2}$ существования режима ХМК на рис. 2*б* являются областями захвата в режим ХМК первой и второй систем ФАП. Совокупные размеры областей захвата в режим ХМК для систем ФАП_1 и ФАП_2 равны соответственно $D_{\text{z}1} = 0{,}21$ и $D_{\text{z}2} = 0{,}01$.

Из рис. 2*а* видно, что значения параметров, отвечающие режимам хаотических колебаний, рассредоточены по пространству параметров, причём крайне неравномерно. Очевидно, что в этом случае выделить область параметров, где реализуются только хаотические колебания, невозможно. Поэтому на практике при выделении областей существования хаотических аттракторов часто в качестве границ используются крайние значения параметров, при которых в фазовых пространствах математических моделей либо зарождаются, либо исчезают, а в определённых случаях испытывают внутреннюю бифуркацию хаотические аттракторы, т. е. выделяют лишь внешний контур области существования хаотического аттрактора. Выделенные таким образом области D^*_{u} существования хаотических колебаний [2], как правило, содержат подобласти регулярных колеба-

[2] Области существования хаотических колебаний, выявленные путём выделения ограничивающего контура, будем отмечать верхним индексом $*$.

ний, размеры которых могут быть соизмеримы и даже превышать реальные размеры областей существования хаотических колебаний. Это, несомненно, сказывается на хаотической эффективности области $D^*_{\rm u}$. В качестве характеристики хаотической «эффективности» области $D^*_{\rm u}$ будем использовать показатель её хаотической однородности $I = S_{\rm c}/S_{\rm u}$, где $S_{\rm c}$ — совокупный размер областей существования хаотических колебаний, а $S_{\rm u}$ — размер области $D^*_{\rm u}$ [17].

Оценим показатель хаотической однородности областей $D^*_{\rm u1}$ и $D^*_{\rm u2}$ существования ХМК систем ФАП_1 и ФАП_2 рассматриваемого ансамбля по карте на рис. 2*а*. Контур, ограничивающий области существования хаотических режимов типа $[0,0]$ и $[0,1]$, на рис. 2*а* просматривается достаточно чётко и хорошо согласуется с границами областей $D^*_{\rm u1}$ и $D^*_{\rm u2}$, полученными в [27] путём численного бифуркационного анализа движений модели (1). Размеры областей $D^*_{\rm u1}$ и $D^*_{\rm u2}$ будем оценивать по числу точек карты, попадающих в эти области. На рис. 2*а* область $D_{[0,0]}$ состоит из $N_{[0,0]} = 20\,521$ точек, отвечающих движениям типа $[0,0]$, из которых $N^*_{[0,0]} = 15\,388$ точек соответствуют хаотическим колебаниям; область $D_{[0,1]}$ включает $N_{[0,1]} = 16\,778$ точек типа $[0,1]$, из которых $N^*_{[0,1]} = 13\,926$ точек соответствуют хаотическим колебаниям, и $N_{[1,1]} = 98$ точек типа $[1,1]$. Таким образом, области $D_{[0,0]}$ и $D_{[0,1]}$ содержат $N_{\rm c1} = 29\,314$ точек, соответствующих режиму генерации ХМК первой системой ФАП, и $N_{\rm c2} = 15\,388$ точек, соответствующих режиму генерации ХМК второй системой ФАП. Отсюда следует, что области $D^*_{\rm u1}$ и $D^*_{\rm u2}$ имеют показатели хаотической однородности $I^{(2)}_1 = 29\,314/(20\,521 + 16\,778) = 0{,}78$ и $I^{(2)}_2 = 15\,388/20\,521 = 0{,}68$ соответственно. Для модели одиночной системы ФАП с фильтром второго порядка при $\varepsilon_1 = 1$ показатель хаотической однородности $I = 0{,}73$. Примечательно, что индивидуальная динамика системы ФАП_2 при рассматриваемых значениях параметров может быть только регулярной, а размеры областей удержания и захвата ХМК одиночной системы ФАП с фильтром второго порядка при $\varepsilon_1 = 1$, вычисленные по аналогичной методике, равны $D_{\rm u} = 0{,}065$ и $D_{\rm z} = 0{,}036$.

Проведённый для карты на рис. 2*а* анализ максимального показателя Ляпунова λ_1 позволяет заключить, что максимальное значение λ_1 достигается при хаотическом движении типа $[0,1]$, когда индивидуальная динамика объединённых систем ФАП характеризуется регулярным квазисинхронным режимом. Максимальный показатель Ляпунова, рассчитанный по траекториям модели (1), достигает $\lambda_1 = 0{,}3$, что в три раза больше максимального показателя Ляпунова для траекторий модели парциальной системы ФАП с фильтром второго порядка.

2.2. Ансамбль из двух систем ФАП с фильтрами первого и второго порядка [27]

Рассмотрим динамику ансамбля из двух систем ФАП в случае, когда индивидуальная динамика системы ФАП_1 может быть только регулярной, а система ФАП_2 обладает хаотической динамикой. Для этого в цепи управления первого генератора выбираем фильтр первого порядка, а в цепи управления второго генератора — фильтр второго порядка. Если зафиксировать параметры системы ФАП_2 в точке, где её индивидуальная динамика характеризуется режимом хаотических биений, то введением дополнительной связи $\kappa_1 \neq 0$ можно добиться генерации ХМК на выходе первого генератора в широкой области параметров. В качестве иллюстрации этого факта на рис. 3 приведены карты динамических режимов на плоскости $(\varepsilon_1, \gamma_1)$ для ансамбля, описываемого уравнениями (1) при $\mu_1 = 0$. Карта на рис. 3*а* получена при изменении начальной частотной расстройки γ_1 от нуля, когда на выходе системы ФАП_1 имеют место ХМК, до $\gamma_1 = \pm 1$, когда в ансамбле реализуется глобальный режим биений. Карта на рис. 3*б* построена при изменении γ_1 от значений $\gamma_1 = \pm\,1$ до нуля.

Из рис. 3 видно, что основными динамическими режимами рассматриваемого ансамбля являются хаотические колебания. На рис. 3*а* области существования хаотических режимов типа

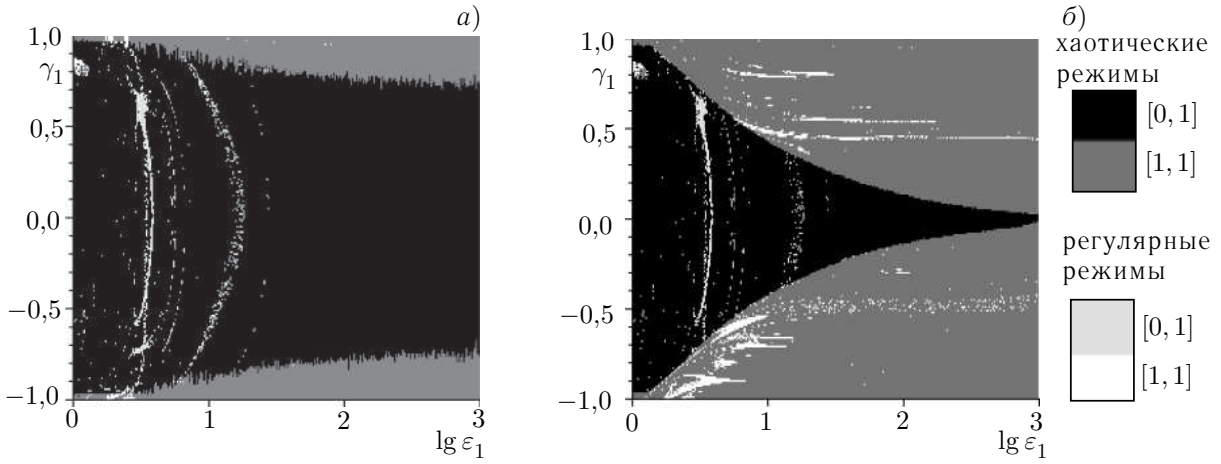

Рис. 3. Карты динамических режимов модели (1) при $\mu_1 = 0$, $\gamma_2 = 0{,}25$, $\varepsilon_2 = 1$, $\mu_2 = 6$, $\kappa_1 = 0{,}1$

$[0, 1]$ и $[1, 1]$ занимают соответственно 81 % и 17 % общей площади рисунка. Отсюда следует, что совокупные размеры областей удержания ХМК систем ФАП_1 и ФАП_2 равны $D_{\text{u}1} = 0{,}81$ и $D_{\text{u}2} = 0$ соответственно. Области захвата в режим ХМК, рассчитанные по рис. 3*б*, имеют размер $D_{\text{z}1} = 0{,}34$ и $D_{\text{z}2} = 0$ соответственно. Показатель хаотической однородности области $D^*_{\text{u}1}$ равен $I^{(2)}_1 = 0{,}98$. Следует обратить внимание на то, что области $D_{\text{z}1}$ и $D^*_{\text{u}1}$ практически совпадают с областью захвата в режим синхронизации и областью удержания режима синхронизации индивидуальной системы ФАП с интегрирующим фильтром в цепи управления, хорошо известными в теории систем ФАП [29].

Хаотические аттракторы в фазовом пространстве U определяют модулирующие колебания, возникающие в цепях управления систем ФАП. Усреднённые значения фазовых переменных φ_i и y_i представляют собой отклонения средних фазы и частоты модулирующих колебаний i-го управляемого генератора от частоты и фазы опорного сигнала, а диапазоны изменения этих переменных — амплитуды качаний фазы и частоты соответственно. Анализ проекций хаотических аттракторов модели (1) на плоскость (φ_1, y_1), проведённый для стационарных движений, определяющих рис. 3*а*, показывает, что при увеличении ε_1 амплитуды качаний $\Delta\varphi_1$ и Δy_1 уменьшаются. При $\varepsilon_1 > 100$ модуляция по частоте практически отсутствует — на выходе системы ФАП_1 имеют место колебания с фазовой хаотической модуляцией.

2.3. Ансамбль из трёх систем ФАП с фильтрами первого порядка [26]

Рассмотрим колебания ансамбля из трёх систем ФАП в случае, когда их индивидуальная динамика может быть только регулярной. Динамика такого ансамбля описывается уравнениями (2). На рис. 4 приведены карты динамических режимов модели (2) на плоскостях (κ_2, γ_1) и $(\varepsilon_1, \gamma_1)$. Из представленных на рис. 4 диаграмм видно, что ансамбль из трёх ФАП с фильтрами первого порядка обладает большим разнообразием как регулярных, так и хаотических динамических режимов, области существования этих режимов распределены в пространстве параметров неравномерно. Совокупные размеры областей удержания ХМК для систем ФАП_1, ФАП_2 и ФАП_3 на рис. 4*а* равны соответственно $D_{\text{u}1} = 0{,}63$, $D_{\text{u}2} = 0{,}13$ и $D_{\text{u}3} = 0{,}02$, а на рис. 4*б* — $D_{\text{u}1} = 0{,}79$, $D_{\text{u}2} = 0{,}56$ и $D_{\text{u}3} = 0$. Анализ карт динамических режимов позволяет выделить параметры, малые изменения которых приводят к существенным изменениям колебаний на выходе генераторов ансамбля, и параметры, при варьировании которых изменения в коллективной динамике ансамбля

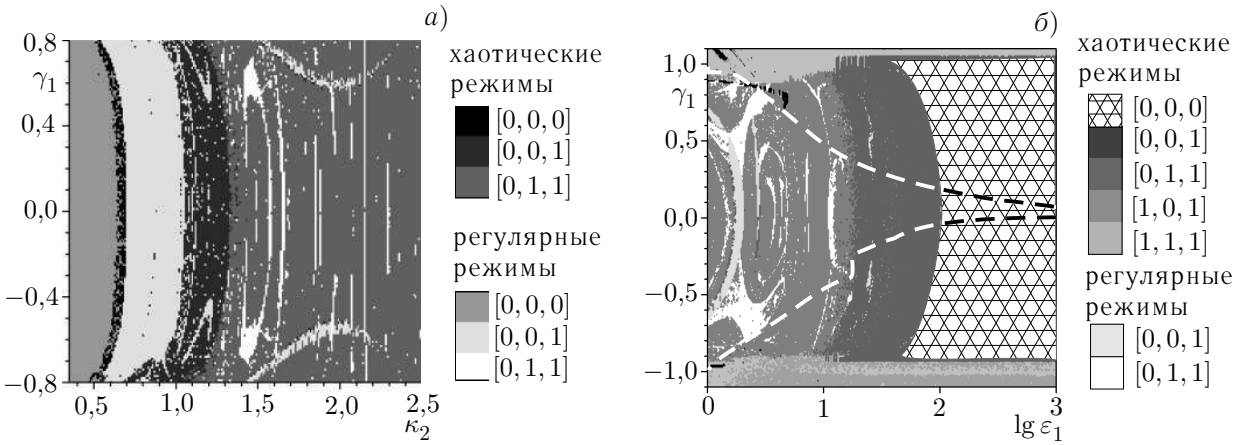

Рис. 4. Карты динамических режимов модели (2) при $\varepsilon_1 = 0{,}8$, $\gamma_2 = 0{,}5$, $\varepsilon_2 = 7{,}5$, $\gamma_3 = 0{,}7$, $\varepsilon_3 = 3$, $\kappa_1 = 0{,}15$ (*а*) и $\gamma_2 = 0{,}5$, $\varepsilon_2 = 7{,}5$, $\gamma_3 = 0{,}7$, $\varepsilon_3 = 3$, $\kappa_1 = 0{,}15$, $\kappa_2 = 1{,}6$ (*б*)

не столь значительны. К параметрам, оказывающим сильное влияние, следует отнести параметры дополнительных связей κ_1 и κ_2. Параметры парциальных систем ФАП (начальные частотные расстройки γ_i и инерционности локальных цепей управления ε_i, где $i = 1, 2, 3$) можно изменять в достаточно широких пределах, что оказывает не столь сильное влияние на колебания генераторов ансамбля, как изменение параметров связей. Это достаточно хорошо видно из диаграмм, приведённых на рис. 4. Об этом свидетельствуют и показатели хаотической однородности областей $D^*_{\mathrm{u}1}$ и $D^*_{\mathrm{u}2}$ на рис. 4*б*, которые равны соответственно $I^{(3)}_1 = 0{,}91$ и $I^{(3)}_2 = 0{,}9$, а также представленные в [26] результаты исследования хаотических аттракторов модели (2).

На рис. 4*б* пунктирной линией выделены области $D_{\mathrm{z}1}$ и $D_{\mathrm{z}2}$ захвата в режим ХМК первого и второго генераторов рассматриваемого ансамбля из трёх систем ФАП. Здесь, как и в рассмотренном выше случае (см. пункт 2.2), область $D_{\mathrm{z}1}$ практически совпадает с областью захвата в режим синхронизации индивидуальной системы ФАП с интегрирующим фильтром в цепи управления. Области захвата в режим ХМК для генераторов ансамбля из трёх систем ФАП имеют следующие совокупные размеры: $D_{\mathrm{z}1} = 0{,}29, D_{\mathrm{z}2} = 0{,}1$, $D_{\mathrm{z}3} = 0$.

При выделении областей существования хаотически модулированных колебаний генераторов ансамблей необходимо обращать внимание не только на характерный вид проекций хаотических аттракторов моделей на соответствующие локальные подпространства (ограничена проекция по циклической координате или нет), но и учитывать размеры проекции, поскольку малые размеры проекций более соответствуют режиму синхронизации, чем режиму ХМК. Анализ проекций хаотического аттрактора модели (2) показывает, что при увеличении параметра ε_1 проекция хаотического аттрактора на подпространство $V_1 = \{\varphi_1 \mod 2\pi, y_1\}$ сжимается. На рис. 4*б* область параметров, где $\Delta\varphi_1 < 0{,}1$ и $\Delta y_1 < 0{,}02$ выделена штриховкой. По-видимому, эту часть области $D_{\mathrm{u}1}$ следует отнести к области существования режима синхронизации.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование динамических режимов малых ансамблей связанных фазовых систем в пространстве параметров. Построены и проанализированы карты динамических режимов ансамблей, состоящих из двух и трёх каскадно связанных фазовых систем, обладающих как простой индивидуальной динамикой, так и сложной (хаотической). Показано, что путём объединения в ансамбль можно, во-первых, существенно расширить области генерации ХМК фазовыми

системами в пространстве параметров, во-вторых, добиться генерации ХМК в фазовых системах, индивидуальная динамика которых может быть предельно простой (характеризуется наличием в фазовом пространстве единственного аттрактора — либо состояния равновесия, либо предельного цикла). Установлено, что коллективная динамика ансамбля, составленного из систем со сложной индивидуальной динамикой, характеризуется высокой степенью мультистабильности. Степень мультистабильности снижается при объединении в ансамбль элементов с простой индивидуальной динамикой.

Анализ карт динамических режимов выявил существенную неоднородность областей генерации ХМК в сечениях пространства параметров плоскостями, содержащими параметры связей: области состоят из нескольких подобластей, отвечающих генерации хаотических колебаний различных типов, а также содержат достаточно большие «окна» с регулярной динамикой. Сечения пространства параметров плоскостями, не содержащими параметры связей, демонстрируют достаточно высокую однородность режимов генерации ХМК определённого типа. Показано, что свойствами генерируемых колебаний достаточно эффективно можно управлять с помощью малых изменений параметров связей. Полученные результаты по генерации ХМК представляют значительный интерес для создания новых коммуникационных систем на базе динамического хаоса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05–02–17409).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pecora L. M., Carroll T. L. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64, No. 8. P. 821.
2. Oppenheim A. L., Wornell G. W., Isabell S. H., Cuomo K. M. // Proc. IEEE ICASSP. 1992. V. 6. P. 117.
3. Kocarev L., Halle K. S., Eckert K., Chua L. O., Parlitz U. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. V. 2, No. 3. P. 709.
4. Hayes S., Grebogi G., Ott E. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3 031.
5. Волковский А. Р., Рульков Н. Ф. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 9, № 3. С. 71.
6. Dmitriev A. S., Panas A. I., Starkov S. O. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1995. V. 5, No. 4. P. 1 249.
7. Dedieu H., Kennedy M. P., Hasler M. // IEEE Trans. CAS. 1993. V. 40, No. 10. P. 634.
8. Hasler M. // Phil. Trans Rog. Soc. Lond. A. 1995. V. 353. P. 115.
9. Kennedy M. P. // Proc. NDES'96, Seville, 1996. P. 1.
10. Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002.
11. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении: Пер. с англ. / Под ред. Ю. Н. Бакаева, М. В. Капранова. М.: Сов. радио, 1978.
12. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982.
13. Матросов В. В. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22 (23). С. 4.
14. Шалфеев В. Д., Матросов В. В., Корзинова М. В. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 11. С. 44.
15. Kolumban G., Vizvari B. // Proc. NDES'95, Dublin, 1995. P. 99.
16. Матросов В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 3. С. 267.
17. Матросов В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 4. С. 357.
18. Матросов В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47, № 4. С. 334.

19. Korzinova M. V., Matrosov V. V., Shalfeev V. D. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1999. V. 9, No. 5. P. 963.
20. Shalfeev V. D., Matrosov V. V., Korzinova M. V. // Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems / Ed. by G. Chen. New York: CRC Press, 2000. P. 529.
21. Shalfeev V. D., Matrosov V. V. // Chaos in Circuits and Systems / Ed. by G. Chen, T. Ueta. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2002. P. 130.
22. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. // Нелинейные волны'2002 / Отв. ред. А. В. Гапонов-Грехов, В. И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003. С. 77.
23. Матросов В. В., Касаткин Д. В. // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 6. С. 637.
24. Капранов М. В. // Динамика систем: Межвуз. сб. Горький: ГГУ, 1976. № 11. С. 76.
25. Матросов В. В., Касаткин Д. В. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, № 4–5. С. 31.
26. Матросов В. В., Касаткин Д. В. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2004. Т. 12, № 1–2. С. 159.
27. Matrosov V. V. // Proc. Int. Symposium "Topical problems of nonlinear wave physics". Nizhny Novgorod, Russia, 2005. P. 66.
28. Пономаренко В. П., Матросов В. В. // Вестник Верхне-Волжского отделения Академии технологических наук РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике. Нижний Новгород, 1997. Вып. 2 (4). С. 15.
29. Белюстина Л. Н., Кивелёва К. Г., Шалфеев В. Д. // Радиотехника. 1972. Т. 27, № 4. С. 36.

Поступила в редакцию 25 марта 2005 г.; принята в печать 1 сентября 2005 г.

ANALYSIS OF REGIONS OF CHAOTIC OSCILLATIONS IN COUPLED PHASE SYSTEMS

V. V. Matrosov, V. D. Shalfeev, and D. V. Kasatkin

We discuss the problems of excitation of chaotically modulated oscillations in small ensembles of coupled self-excited oscillators with phase control. Special attention is paid to analyzing the regions of generation of chaotic oscillations in the parameter space. It is shown that transition to collective dynamics allows us to efficiently solve the problem of generation of chaotically modulated oscillations in a sufficiently wide parameter-space region.