

УДК 621.391.01

## АВТОМОДУЛЯЦИОННЫЕ РЕЖИМЫ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ С ФИЛЬТРОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*В. В. Матросов*

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Исследуются автомодуляционные колебания системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка в цепи управления. Анализируются области генерации модулированных колебаний в пространстве параметров и свойства модулирующих колебаний. Особое внимание уделяется изучению колебаний с хаотической модуляцией.

### ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением начатых в [1–9] исследований нелинейной динамики автогенераторов с локальными фазовыми цепями управления — систем фазовой автоподстройки частоты (ФАП). Такие системы находят широкое применение при решении актуальных задач радиофизики и радиотехники, связанных с формированием, приёмом и обработкой сигналов. Традиционно при изучении динамических свойств автогенераторов с фазовым и частотным управлением рассматривались задачи, связанные с режимами синхронизации управляемых генераторов опорным сигналом. В последнее время акцент исследований сместился в область углублённого изучения автомодуляционных колебаний, возникающих в рассматриваемых системах при значениях параметров вне области устойчивости режима синхронизации. Это связано с перспективой создания новых устройств передачи информации, использующих колебания с периодической и хаотической угловой модуляцией [3, 8, 10]. Наиболее широкий набор автомодуляционных колебаний система ФАП демонстрирует при наличии в цепи управления фильтра второго (и выше) порядка. Исследования модели ФАП с фильтром второго порядка обнаружили богатую картину сложных колебательных режимов и бифуркационных переходов, привлекательную с точки зрения генерации различного рода регулярных и шумоподобных сигналов. В данной работе изучаются автомодуляционные колебания в простейшей системе ФАП, способной демонстрировать хаотические колебания, при этом особое внимание уделяется анализу областей генерации модулированных колебаний в пространстве параметров.

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ СИСТЕМЫ

Динамические уравнения, на основе которых изучаются автомодуляционные колебания в системе ФАП с фильтром второго порядка<sup>1</sup>, записываются в следующем виде [9]:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = z, \quad \mu \frac{dz}{d\tau} = \gamma - F(\varphi) - y - \varepsilon z, \quad (1)$$

где  $\tau$  — безразмерное время,  $\varphi$ ,  $y$  и  $z$  — безразмерные переменные ( $\varphi$  и  $y$  — текущие отклонения фазы и частоты управляемого генератора от фазы и частоты опорного сигнала соответственно),  $\varepsilon > 0$  и  $\mu > 0$  — безразмерные параметры, характеризующие инерционность цепи управления,  $\gamma$  — начальная расстройка по частоте,  $F(\varphi)$  — нормированная характеристика фазового дискриминатора. Система (1) определена в автономном трёхмерном цилиндрическом фазовом пространстве  $U = \{\varphi \bmod 2\pi, y, z\}$ .

<sup>1</sup> Фильтр с коэффициентом передачи  $K(p) = (1 + a_1 p + a_2 p^2)^{-1}$ .

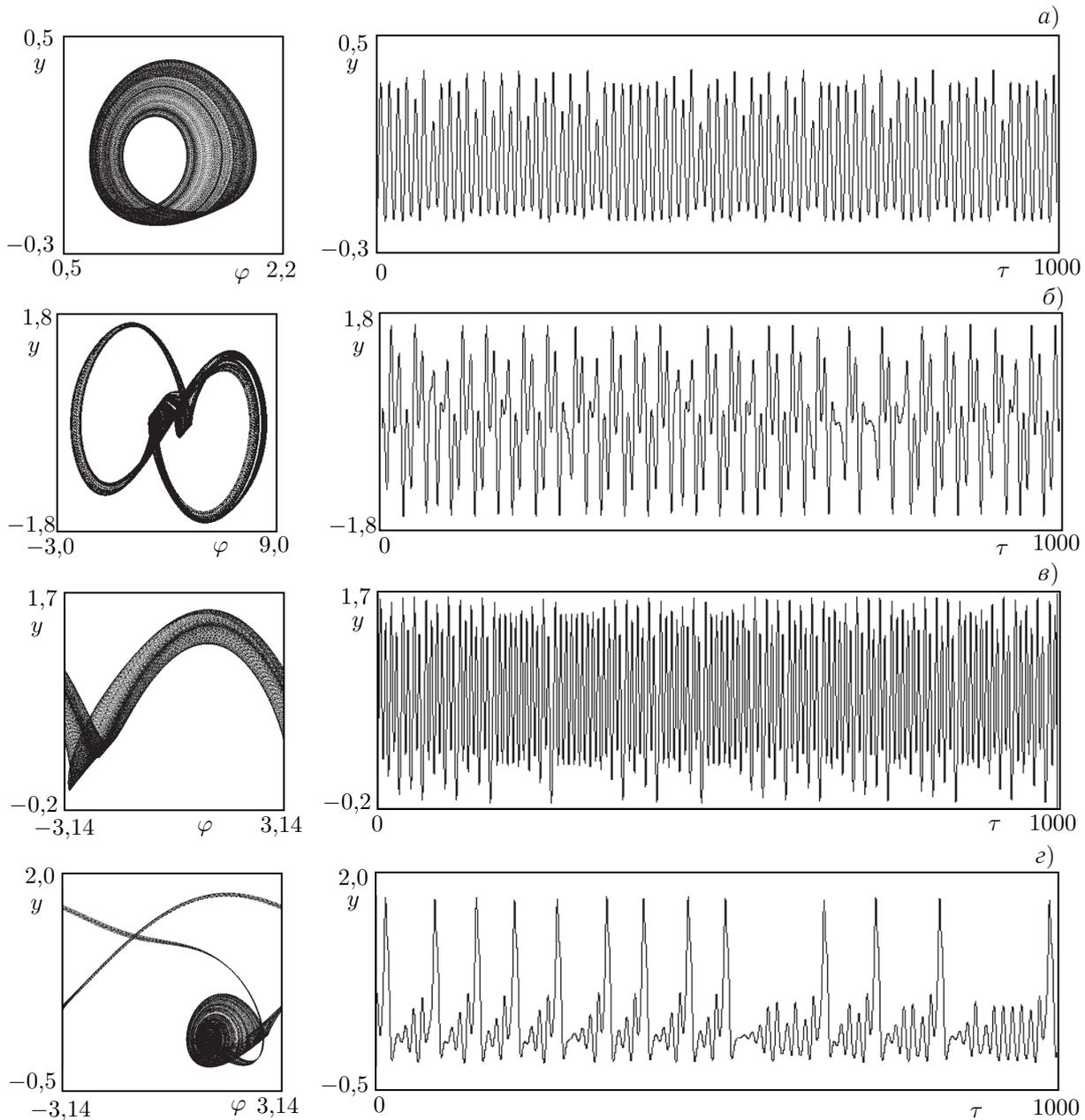


Рис. 1. Примеры характерных хаотических аттракторов модели ФАП

В результате исследования модели (1) качественными и численными методами установлено, что система ФАП с фильтром второго порядка обладает разнообразными стационарными режимами: режимом синхронизации генератора опорным сигналом, регулярными и хаотическими режимами квазисинхронизации, регулярными и хаотическими режимами биений [9]. Далее сосредоточимся на анализе хаотических колебаний, к которым в последнее время проявляется повышенный интерес, стимулированный попытками их практического использования. В силу цилиндричности фазового пространства модели (1) хаотические колебания условно могут быть разделены на три группы [1].

К первой группе относятся колебания, ограниченные по фазовой координате  $\varphi$  и обладающие нулевым средним значением координаты  $y = \dot{\varphi}$  (рис. 1а, б). Это хаотические аттракторы колебательного типа, они соответствуют хаотическому квазисинхронному режиму ФАП, при котором на выходе управляемого генератора имеют место колебания с угловой хаотической модуляцией, стабилизированные по опорной частоте. Далее такие режимы будем называть режимами хаотически модулированных колебаний (ХМК). Колебательные аттракторы, у которых амплитуда по координате  $\varphi$  больше  $2\pi$  (рис. 1б), будем называть колебательными аттракторами с проворотом, а соответствующие им режимы ФАП — квазисинхронными режимами с проскальзыванием фазы.

Вторую группу составляют колебания, у которых  $\varphi$  постоянно растёт, а среднее значение  $\dot{\varphi}$  равно некоторой постоянной:  $\langle \dot{\varphi} \rangle = \tilde{y}$  (рис. 1в). Аттракторы такого вида называют вращательными. Вращательные аттракторы соответствуют режиму биений, при котором разность фаз эталонного и подстраиваемого сигналов постоянно растёт, а средняя разность частот равна некоторой постоянной величине, зависящей от параметров системы ФАП.

К третьей группе относятся колебания, которым в фазовом пространстве соответствуют колебательно-вращательные аттракторы (рис. 1г). На этих аттракторах переменная  $\varphi$  может совершать как колебательные, так и вращательные движения. Колебательно-вращательные аттракторы, как и вращательные аттракторы, соответствуют режиму биений, но в этом режиме можно выделить две стадии. Одна стадия отвечает вращениям, когда  $\langle \dot{\varphi} \rangle = \tilde{y} = \text{const}$ , другая стадия отвечает колебаниям, при этом  $\langle \dot{\varphi} \rangle = 0$ . На хаотическом колебательно-вращательном аттракторе переключения между стадиями происходят случайным образом, среднее время пребывания в каждой стадии определяется внутренней структурой хаотического аттрактора и зависит от параметров системы.

Для передачи информации с использованием динамического хаоса наибольший интерес представляют хаотически модулированные колебания, поскольку средняя частота этих колебаний стабилизирована по опорной частоте и не зависит от параметров системы ФАП. Поэтому далее особое внимание уделим режимам ХМК.

## 2. АНАЛИЗ ОБЛАСТЕЙ АВТОМОДУЛЯЦИОННЫХ РЕЖИМОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ

При изучении хаотических колебаний автогенераторных систем одной из основных задач является задача, связанная с исследованием областей параметров, где генераторы способны вырабатывать хаотические колебания. В качестве теоретической оценки этих областей, как правило, используют области параметров математических моделей генераторов, где существуют хаотические аттракторы. При выделении областей существования хаотических аттракторов в качестве границ часто используются крайние значения параметров, при которых в фазовых пространствах математических моделей зарождаются либо исчезают (а в определённых случаях — испытывают внутреннюю бифуркацию) хаотические аттракторы. При этом недостаточно внимания уделяется анализу внутренней структуры выделенных областей, хотя эта информация крайне важна при выработке рекомендаций по практическому использованию хаотических колебаний.

Известно (см., например, [11–16]), что при изменении параметров моделей генераторов хаотические колебания могут становиться регулярными, а при дальнейшем изменении параметров вновь хаотическими. При этом области существования регулярных колебаний в пространстве параметров могут быть изолированными (окружёнными областями параметров, отвечающими хаотическим колебаниям) и достаточно протяжёнными. Оба этих фактора необходимо учитывать при оценке областей генерации хаотических колебаний. Знание внутренней структуры областей генерации хаотических колебаний позволяет не только избежать регуляризации колебаний, но и

эффективно управлять свойствами хаотических колебаний. Таким образом, выделение областей существования хаотических колебаний в пространстве параметров и анализ структуры указанных областей является актуальной задачей и представляет практический интерес.

Для изучения областей генерации хаотических колебаний системы ФАП используем карты динамических режимов модели (1), которые построим в два этапа. На первом этапе карта динамических режимов строится по следующему алгоритму. На плоскости двух параметров выделяется область, которая покрывается сеткой. Далее для каждого узла (точки) сетки выясняется, какой аттрактор существует в фазовом пространстве математической модели при выделенных значениях параметров. Тип аттрактора устанавливается путём поиска неподвижных точек отображения Пуанкаре, порождаемого фазовыми траекториями модели (1) при пересечении секущей  $z = 0$ . Поиск неподвижных точек отображения Пуанкаре осуществляется модифицированным методом простой итерации, который позволяет обнаруживать неподвижные точки, соответствующие колебательным, колебательно-вращательным и вращательным предельным циклам произвольной кратности  $k$  из заданного диапазона. Если за  $N_i$  итераций неподвижная точка не обнаруживается с точностью  $\varepsilon_p$ , будем считать, что при выбранных значениях параметров в фазовом пространстве существует сложное стационарное движение — хаотический аттрактор. На втором этапе для каждого узла сетки в пространстве параметров, где выявлено сложное динамическое поведение, вычисляется максимальный показатель Ляпунова  $\lambda_1$  согласно алгоритму, описанному в [11]. Показатель Ляпунова вычисляется с точностью  $\varepsilon_\lambda$ . Если в результате вычисления  $|\lambda_1|$  оказывается меньше  $\varepsilon_\lambda$ , делается вывод, что данное решение регулярное, и в карту динамических режимов вносятся соответствующие поправки<sup>2</sup>.

Предлагаемый алгоритм представляет собой модификацию метода, который широко использовался ранее для оценки областей захвата в синхронный режим различных устройств синхронизации [17]. Модифицированный алгоритм прост в реализации и позволяет не только оценить размеры областей существования различных динамических режимов в пространстве параметров, но и судить об их внутренней структуре. Однако полученные с его помощью карты динамических режимов менее информативны по сравнению с параметрическими диаграммами, построенными путём бифуркационного анализа, т. к. не содержат сведений о бифуркационных переходах и потенциально существующих динамических режимах. В настоящее время аналогичные подходы широко применяются для анализа пространства параметров разнообразных динамических систем как с непрерывным, так и с дискретным временем [18].

Остановимся на результатах применения предлагаемого подхода для оценки областей генерации ХМК в пространстве параметров системы ФАП по модели (1). Для определённости рассмотрим область на плоскости параметров  $(\mu, \gamma)$  при  $\varepsilon = 1$ ,  $2 \leq \mu \leq 5$ ,  $0 \leq \gamma \leq 0,99$ , где согласно [9] в основном сосредоточены области генерации ХМК. Будем моделировать процесс выхода системы ФАП из режима синхронизации. Для этого предположим, что при  $\gamma = 0,99$  система ФАП находится в режиме синхронизации, т. е. начальное состояние модели (1) находится в окрестности устойчивого состояния равновесия. Далее будем уменьшать параметр  $\gamma$  до 0 с шагом  $h_\gamma = 0,01$ , при этом для построения очередного отображения Пуанкаре будем использовать траекторию с начальными условиями, принадлежащими последнему обнаруженному аттрактору. Эту процедуру повторим для всех значений  $\mu$ , которые получаются при изменении  $\mu$  от 2 до 5 с шагом  $h_\mu = 0,01$ . В результате получаем карту динамических режимов, приведённую на рис. 2, на которой выделены области, соответствующие различным типам динамических режимов. Данная карта даёт представление о распределении динамических режимов в пространстве параметров и в целом отражает результаты бифуркационного анализа модели (1). На ней в полной мере отраже-

<sup>2</sup> В численных экспериментах с моделью (1) кратность  $k \in [1, 130]$ , число итераций  $N_i = 500$ ,  $\varepsilon_p = 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_\lambda = 10^{-4}$ .

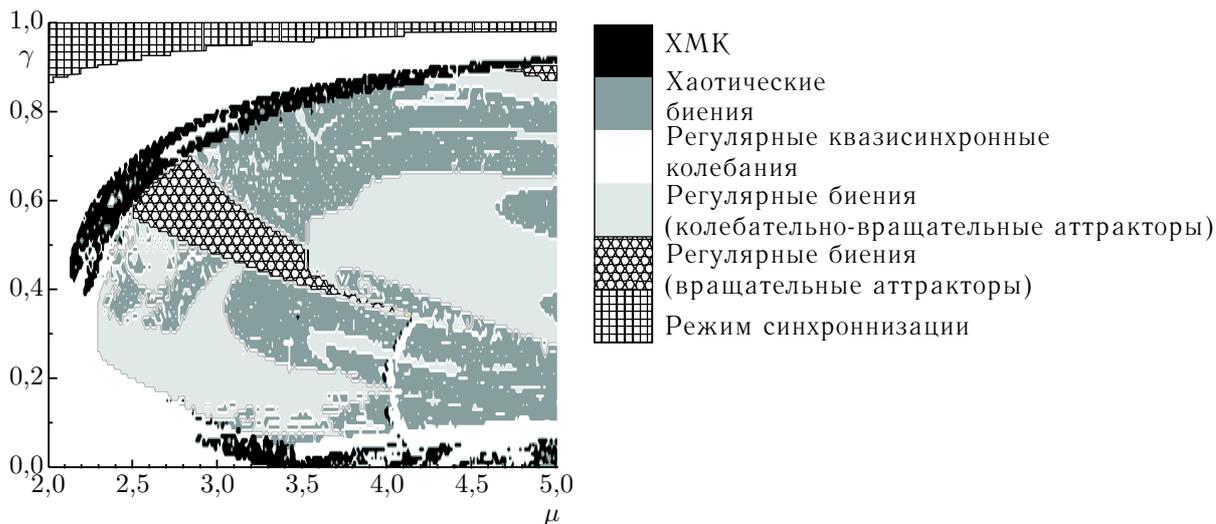


Рис. 2. Карта динамических режимов модели (1) для  $\varepsilon = 1$ , построенная по результатам моделирования процесса выхода системы ФАП из режима синхронизации

ны области существования режима синхронизации, регулярных и хаотических квазисинхронных режимов, а также представлены области асинхронных режимов, определяемые колебательными и колебательно-вращательными предельными циклами и колебательно-вращательными хаотическими аттракторами.

Сравним области генерации ХМК на рис. 2 с областями, полученными в [9] путём бифуркационного анализа. В [9] были выделены три области генерации ХМК:  $D_{Н1}$ , расположенная в области больших начальных расстройек,  $D_{Н2}$  и  $D_{Н3}$ , сосредоточенные в области малых  $\gamma$ . Области  $D_{Н2}$  и  $D_{Н3}$  пересекались в интервале  $\mu \in (3,2; 3,7)$  и отвечали за существование двух различных хаотических колебательных аттракторов с близкими характеристиками (значениями ляпуновских показателей, спектрами мощности, автокорреляционными функциями). На рис. 2 можно выделить область  $D_{Н1}^*$ , которая практически совпадает с областью  $D_{Н1}$ , и область  $D_{Н2}^*$ , совпадающую с объединением областей  $D_{Н2}$  и  $D_{Н3}$ . Кроме того, на карте обнаруживаются неизвестные ранее значения параметров, соответствующие режиму ХМК, а в областях  $D_{Н1}^*$  и  $D_{Н2}^*$  прослеживаются «окна» регулярных режимов. Таким образом, представленная карта динамических режимов не только отражает известные результаты исследований хаотических режимов, но и дополняет их. Карта динамических режимов позволяет достаточно просто оценить как совокупные размеры областей существования различных динамических режимов, так и размеры отдельных областей. Совокупные размеры области существования динамических режимов определённого типа оцениваются путём вычисления отношения числа точек карты, соответствующих данному режиму, к общему числу точек карты. Аналогично оцениваются и размеры отдельно выделенных областей — как отношение числа точек, образующих область, к общему числу точек карты. Выраженные в процентах совокупные размеры областей динамических режимов, вычисленные по карте на рис. 2, следующие: хаотический квазисинхронный режим (колебательные хаотические аттракторы) — 6,47 %, хаотические биения (колебательно-вращательные хаотические аттракторы) — 27,08 %, регулярный квазисинхронный режим — 28 %, регулярные биения — 34,54 % (колебательно-вращательные циклы — 29,13%, вращательные циклы — 5,41 %), синхронный режим — 4,88 %. Области  $D_{Н1}^*$  и  $D_{Н2}^*$  генерации ХМК имеют размеры 5,22 % и 2,26 % соответственно. Суммарная площадь этих областей превышает совокупные размеры области генерации ХМК, что объясняется наличием в  $D_{Н1}^*$  и  $D_{Н2}^*$  «окон» регулярных режимов. Чтобы оценить сте-

Таблица 1. Характеристики областей генерации ХМК системы ФАП с фильтром второго порядка

Характеристика фазового дискриминатора	Области генерации ХМК	Размер областей	Показатель хаотической эффективности
$F(\varphi) = \sin^3 \varphi$	$D_{H1}$	1,70 %	0,70
	$D_{H2} \cup D_{H3}$	8,76 %	0,89
$F(\varphi) = \sin^{1/3} \varphi$	$D_{H1}$	3,98 %	0,93
	$D_{H2} \cup D_{H3}$	0,67 %	0,85
трапецидальная при $a = 1$	$D_{H1}$	2,34 %	0,38
	$D_{H2} \cup D_{H3}$	1,82 %	0,46
пилообразная при $b = 3$	$D_{H1}$	6,95 %	0,84

пень заполненности областей  $D_{H1}^*$  и  $D_{H2}^*$  регулярными «окнами», введём показатель «хаотической эффективности»  $I$  области генерации ХМК, вычисляемый по карте динамических режимов согласно выражению  $I = N_{\text{смo}}/N$ , где  $N_{\text{смo}}$  — число точек карты, отвечающих за генерацию ХМК,  $N$  — общее число точек, образующих область. Вычисленные таким образом показатели хаотической эффективности для областей  $D_{H1}^* = D_{H1}$  и  $D_{H2}^* = D_{H2} \cup D_{H3}$  равны соответственно  $I_{H1}^* = 0,75$  и  $I_{H2}^* = 0,65$ .

Показатель хаотической эффективности и совокупные размеры области генерации ХМК можно рассматривать в качестве характеристик областей генерации хаотических колебаний в пространстве параметров. В табл. 1 приведены результаты расчётов размеров и показателей хаотической эффективности областей генерации ХМК системы ФАП с фильтром второго порядка для различных характеристик фазового дискриминатора, в частности для  $F(\varphi) = \sin^3 \varphi$ ,  $F(\varphi) = \sqrt[3]{\sin \varphi}$ , трапецидальной и пилообразной характеристик, определяемых соответственно выражениями

$$F(\varphi) = \begin{cases} \varphi/a, & -a < \varphi < a; \\ 1, & a \leq \varphi \leq \pi - a; \\ -1, & -\pi + a \leq \varphi \leq -a; \\ -(\varphi - \pi)/a, & \pi - a < \varphi < \pi; \\ -(\varphi + \pi)/a, & -\pi < \varphi < -\pi + a, \end{cases} \quad F(\varphi) = \begin{cases} \varphi/b, & -b \leq \varphi \leq b; \\ (\varphi - \pi)/(b - \pi), & b < \varphi < \pi; \\ (\varphi + \pi)/(b - \pi), & -\pi < \varphi < -b. \end{cases}$$

Данные в табл. 1 получены по результатам расчёта карт динамических режимов на плоскости  $(\mu, \gamma)$  при  $\varepsilon = 1$ ,  $0 \leq \gamma \leq 0,99$  и  $2 \leq \mu \leq 5$  для  $F(\varphi) = \sqrt[3]{\sin \varphi}$ , трапецидальной и пилообразной характеристик,  $1,8 \leq \mu \leq 4,8$  для  $F(\varphi) = \sin^3 \varphi$ . Поскольку структура разбиения пространства параметров модели (1) качественно не меняется при изменении формы характеристики фазового дискриминатора, то в табл. 1 сохранены обозначения областей, принятые для случая  $F(\varphi) = \sin \varphi$ . Исключение составляет пилообразная характеристика — в этом случае имеет место только одна область  $D_{H1}$ , достаточно узкая по  $\mu$ , но протяжённая по  $\gamma$  от 0 до 0,99. Данные табл. 1 подтверждают сделанный ранее вывод, что, изменяя характеристику фазового детектора, можно влиять на динамические режимы системы ФАП, но нельзя добиться существенного увеличения размеров областей генерации ХМК.

Как показал бифуркационный анализ модели (1), система ФАП при определённых условиях обладает свойством мультистабильности (имеет два и более динамических режима при фиксированных значениях параметров). Поэтому размер, форма, структура областей параметров, отвеча-

ющих определённым динамическим режимам (карты динамических режимов), зависят не только от значений фиксированных параметров математической модели, но и от выбора фазовой траектории, порождающей отображение Пуанкаре, а также от алгоритма перехода от одной точки пространства параметров к другой. Выбор алгоритма построения карты динамических режимов определяется задачами, для решения которых строится карта.

При рассмотрении системы ФАП как генератора ХМК остановимся на оценке двух динамических характеристик: области захвата в режим ХМК и области удержания режима ХМК. Под областью удержания режима ХМК будем понимать область параметров  $D_U$ , внутри которой плавные изменения параметров не приводят к исчезновению ХМК, т. е. режим ХМК сохраняется. Под областью захвата в режим ХМК будем понимать область параметров  $D_Z$ , при значениях параметров из которой режим генерации ХМК наступает гарантированно. Для оценки областей  $D_U$  и  $D_Z$  будем применять алгоритмы, аналогичные обычно используемым для вычисления полосы захвата в синхронный режим и удержания в синхронном режиме систем фазовой автоподстройки [17], с той лишь разницей, что вместо синхронного режима будем рассматривать квазисинхронный режим. Для оценки области  $D_U$  можно воспользоваться картой динамических режимов на рис. 2 и вычисленными по ней характеристиками областей  $D_{H1}^*$  и  $D_{H2}^*$ , т. к. эти области являются областями удержания ХМК. Для оценки области  $D_Z$  будем использовать карты, построенные по следующим двум алгоритмам.

Первый алгоритм базируется на определении значений параметров модели (1), при которых исчезают асинхронные движения, препятствующие вхождению системы ФАП в квазисинхронный режим. При реализации этого алгоритма начальные значения параметров модели (1) выбираются в области, где реализуется режим биений. Далее осуществляется выход из этой области в область квазисинхронных режимов, при этом в качестве начальных условий для построения очередного отображения Пуанкаре используется точка фазового пространства, принадлежащая последнему обнаруженному аттрактору.

Второй алгоритм основан на том, что в начальный момент времени фазовая переменная  $y$  равна начальной частотной расстройке:  $y_0 = \gamma$ , фазовая переменная  $\varphi$  не контролируется:  $\varphi_0 \in [-\pi, \pi]$ , а  $z_0 = 0$ . В этом алгоритме для каждой точки пространства параметров идентификация динамического режима осуществляется не по одной фазовой траектории, а по серии фазовых траекторий с начальными условиями, равномерно распределёнными на отрезке  $l_0 = \{-\pi < \varphi < \pi, y = \gamma, z = 0\}$ . Если среди фазовых траекторий серии существуют траектории, притягивающиеся к различным аттракторам, считается, что анализируемая точка пространства параметров является точкой мультистабильного поведения системы ФАП.

На рис. 3а и б представлены карты динамических режимов, построенные для оценки области захвата  $D_Z$  по первому и второму алгоритму соответственно. При построении этих карт параметр  $\gamma$  изменялся в интервале от 1,01 до 0 с шагом  $h_\gamma = 0,01$ , а параметр  $\mu$  — в интервале от 2 до 5 с шагом  $h_\mu = 0,01$ . Из представленных карт видно, что оба алгоритма вычисления области  $D_Z$  дают близкий результат. Это подтверждается качественным сходством картин, а также близостью совокупного размера областей захвата в режим ХМК, который для рис. 3а и б равен 3,80 % и 3,59 % соответственно. Особенностью найденных областей захвата в режим генерации ХМК является то, что по сравнению с областью удержания режима ХМК они ещё более раздроблены. Здесь гарантированное установление режима ХМК возможно не при всех значениях параметров из области  $D_{H1}^*$ . В области  $D_{H1}^*$  можно выделить три подобласти:  $D_{Z1}^1$ ,  $D_{Z1}^2$ ,  $D_{Z1}^3$ , где устанавливается режим ХМК. Эти области крайне малы:  $D_{Z1}^1$ ,  $D_{Z1}^2$  и  $D_{Z1}^3$  имеют размеры 1,07 %, 0,79 % и 0,48 % соответственно. Размер области  $D_{z2}$  захвата в режим ХМК в диапазоне малых частотных расстройек составляет 1,46 %, что меньше размера области  $D_{H2}^*$ . Таким образом, можно констатировать, что области захвата в режим ХМК системы ФАП с фильтром второго

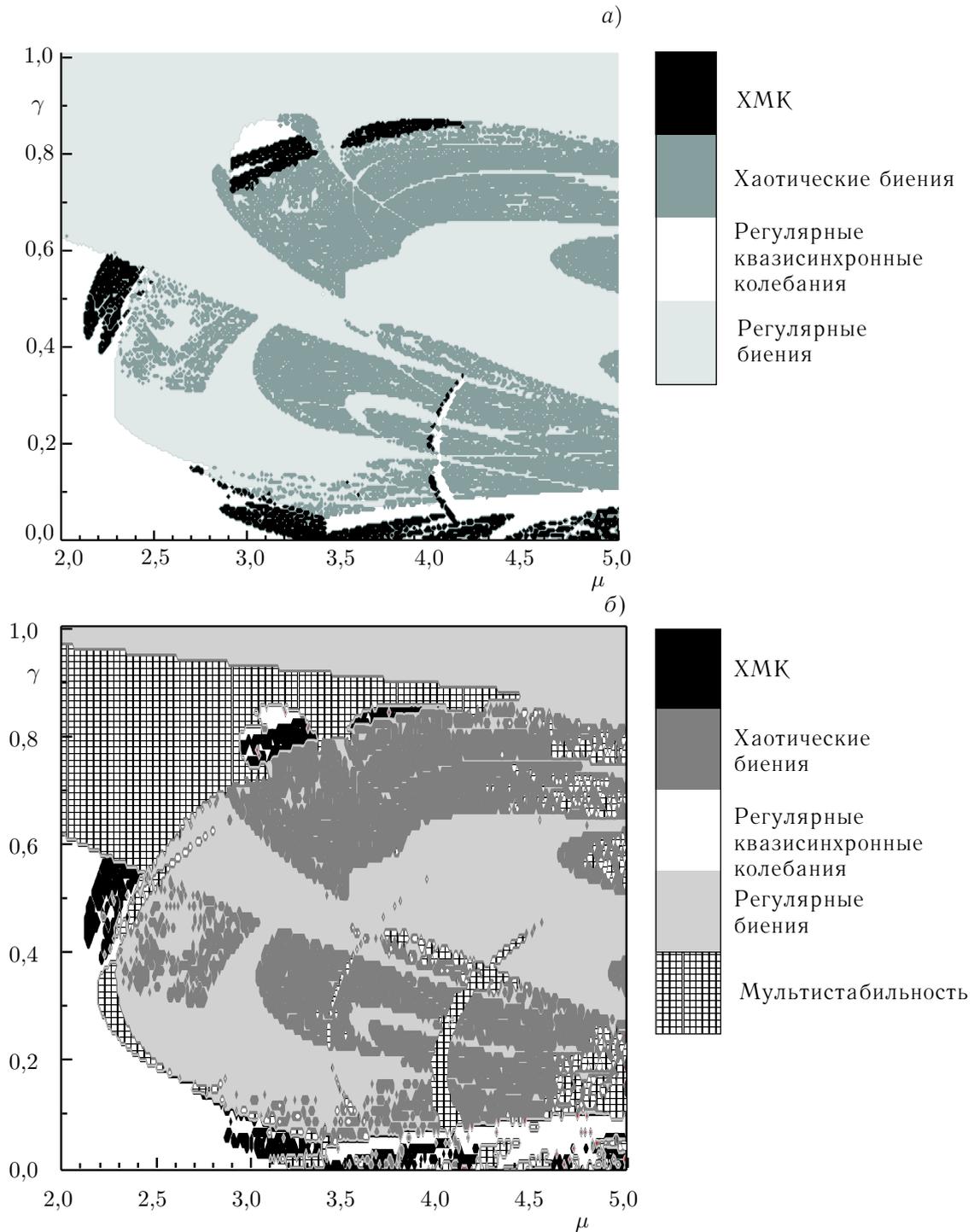


Рис. 3. Карты динамических режимов модели (1) при  $\varepsilon = 1$ , построенные для оценки области  $D_Z$  захвата в режим ХМК по алгоритму 1 (а) и по алгоритму 2 (б)

порядка и синусоидальной характеристикой фазового дискриминатора почти в два раза меньше областей удержания ХМК. Этот вывод сохраняется и при других характеристиках фазового дискриминатора, о чём свидетельствует табл. 2, в которой представлены результаты расчёта раз-

Таблица 2. Характеристики областей захвата в режим генерации ХМК системы ФАП с фильтром второго порядка, рассчитанные по картам динамических режимов для области захвата модели (1) на плоскости  $(\mu, \gamma)$  при  $\varepsilon = 1$

Характеристика фазового дискриминатора	Область захвата в режим ХМК	Размер области
$F(\varphi) = \sin^3 \varphi$	$D_{Z2}$	3,34 %
$F(\varphi) = \sin^{1/3} \varphi$	$D_{Z1}^1$	1,64 %
трапециевидальная при $a = 1$	$D_{Z2}$	1,26 %
пилообразная при $b = 3$	$D_{Z1}$	5,27 %

мера областей захвата в режим ХМК системы ФАП с фильтром второго порядка на плоскости  $(\mu, \gamma)$  при  $\varepsilon = 1$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1,01$  и  $2 \leq \mu \leq 5$  для  $F(\varphi) = \sqrt[3]{\sin \varphi}$ , трапециевидальной и пилообразной характеристик,  $1,8 \leq \mu \leq 4,8$  для  $F(\varphi) = \sin^3 \varphi$ . Расчёт проведён по второму алгоритму, при этом в табл. 2 отражены только области захвата, размер которых превосходит 1 %.

На рис. 4 приведена соответствующая рис. 3а карта максимального показателя Ляпунова  $\lambda_1$ . Здесь интенсивность цвета точки карты характеризует величину максимального показателя Ляпунова: чем темнее точка, тем больше  $\lambda_1$ . Карта максимального показателя Ляпунова достаточно чётко выделяет области с хаотическим поведением. Однако использование только этой карты, без учёта характера поведения фазовых траекторий, приводит к ошибочным выводам [19] о возможности работы системы ФАП в хаотических режимах. Дело в том, что карта максимального показателя Ляпунова, во-первых, не содержит ярко выраженных границ между хаотическими квазисинхронными режимами и режимами биеений, во-вторых, как следует из совместного рассмотрения рис. 3а и 4, наиболее «хаотичными» в модели (1) являются асинхронные движения колебательно-вращательного типа, т. к. максимальные значения показателя Ляпунова  $\lambda_1$  достигаются именно на этих аттракторах.

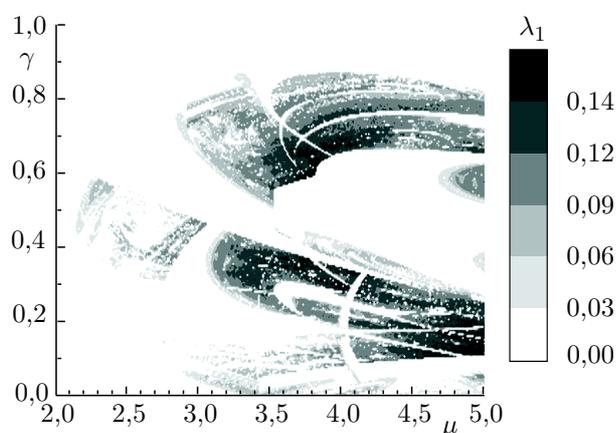


Рис. 4. Карта максимального показателя Ляпунова

## 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДУЛИРУЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

Автомодуляционные колебания на выходе управляемого генератора системы ФАП появляются тогда, когда в цепи управления возникают модулирующие колебания. Образом модулирующих колебаний в фазовом пространстве  $U$  являются устойчивые предельные циклы и хаотические аттракторы. Поэтому характеристики этих аттракторов могут рассматриваться в качестве характеристик модулирующих колебаний. Одной из такой характеристик является показатель Ляпунова на рис. 4, описывающий степень хаотичности модулирующих колебаний. Другими характеристиками могут служить усреднённые значения и диапазоны изменения фазовых координат на стационарных траекториях модели (1). Усреднённые значения фазовых переменных  $\varphi$  и  $y$  представляют собой отклонения средних значений фазы и частоты модулирующих колебаний от фазы и частоты опорного сигнала, а диапазоны изменения этих переменных — амплитуды «качаний»

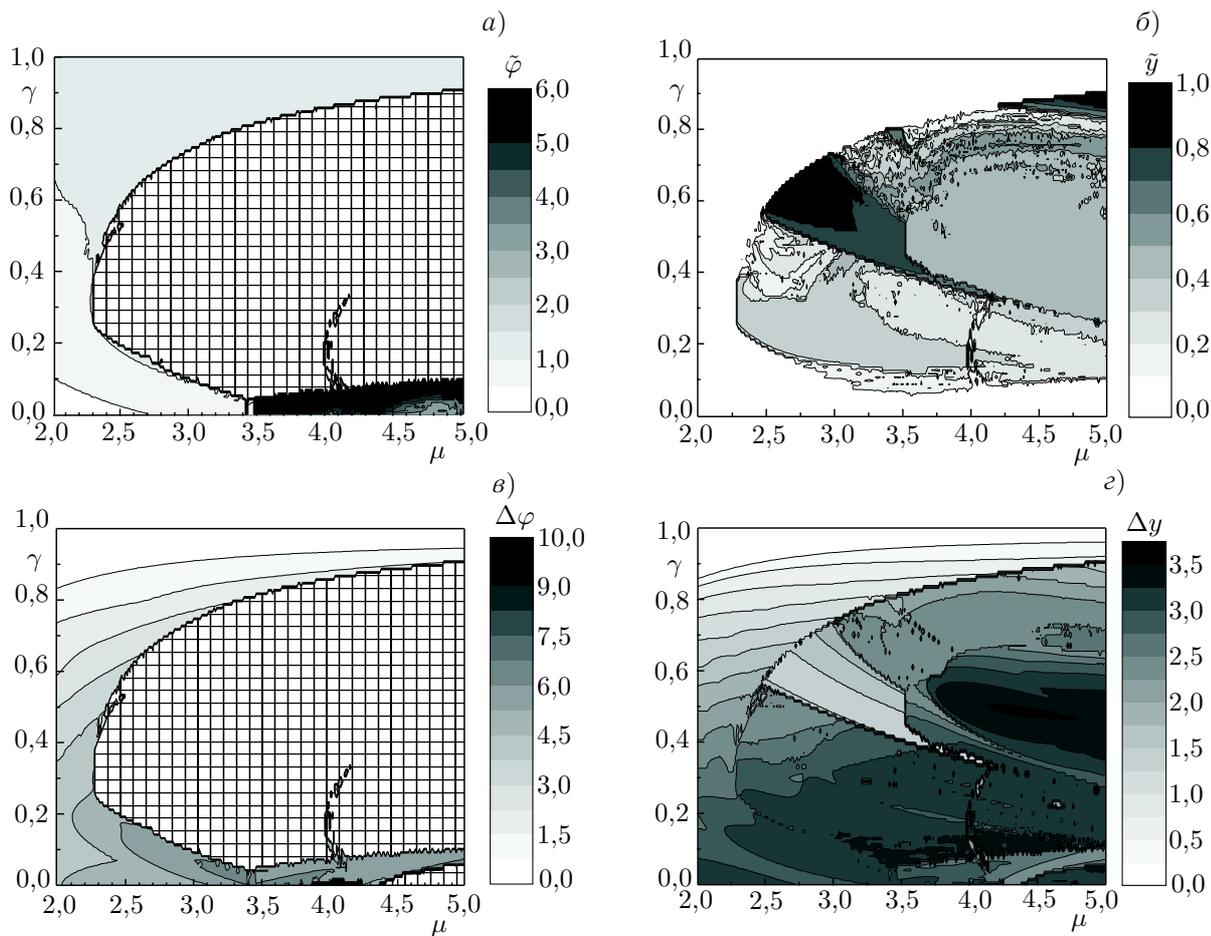


Рис. 5. Характеристики модулирующих колебаний системы ФАП с фильтром второго порядка: усреднённая фаза (а), усреднённая частота (б), амплитуда качаний фазы (в), амплитуда качаний частоты (г)

фазы и частоты соответственно. Поскольку законы модуляции определяются решениями модели (1), которая допускает мультистабильное поведение, законы модуляции могут быть неоднозначными, т. е. могут зависеть не только от параметров модели, но и от начальных условий.

На рис. 5 в качестве примера представлены характеристики модулирующих колебаний, вычисленные для динамических режимов, представленных на рис. 2. Здесь средние значения отклонений и амплитуда качаний фазы и частоты модулирующих колебаний характеризуются цветом. Поскольку в режиме биений фаза модулирующих колебаний постоянно нарастает и, следовательно, не имеет стационарных среднего значения и амплитуды, то на рис. 5а, в область пространства параметров, соответствующая режимам биений, выделена штриховкой. Совместное рассмотрение представленных характеристик позволяет выделять в пространстве параметров области существования синхронного и квазисинхронного режимов, а также квазисинхронного режима с проворотом фазы и режима биений. Однако по средним значениям и амплитудам качаний фазы и частоты модулирующих колебаний невозможно определить, являются колебания хаотическими или нет.

В режиме синхронизации модулирующие колебания отсутствуют, поэтому амплитуды качаний фазы ( $\Delta\varphi$ ) и частоты ( $\Delta y$ ) равны нулю, средняя частота  $\bar{y} = 0$ , средняя фаза  $\bar{\varphi} = \arcsin \gamma$ .

В квазисинхронном режиме  $\tilde{y} = 0$ ,  $0 < \Delta\varphi < 2\pi$ ,  $\Delta y > 0$ . Отметим следующие свойства квазисинхронных колебаний, вытекающие из рис. 5: амплитуда качаний фазы  $\Delta\varphi$  растёт с уменьшением параметра  $\gamma$ , среднее значение фазы  $\bar{\varphi}$  зависит как от начальной частотной расстройки, так и от параметров фильтра. Примечательно, что средняя фаза модулирующих колебаний может изменяться скачком при вариациях параметра  $\mu$ . В рассматриваемом случае это явление наблюдается при малых  $\gamma$  и  $\mu \approx 3,5$  и связано с переходом от одного колебательного аттрактора к другому. При этом следует отметить, что оба колебательных аттрактора обладают близкими характеристиками: амплитудами качаний фазы, значениями ляпуновских показателей, спектрами мощности и автокорреляционными функциями. В квазисинхронном режиме с проворотом фазы  $\tilde{y} = 0$ ,  $\Delta\varphi > 2\pi$ ,  $\Delta y > 0$ . Режиму биений соответствуют  $\tilde{y} \neq 0$ ,  $|\bar{\varphi}| > 2\pi$ ,  $\Delta\varphi > 2\pi$ . Здесь следует отметить, что модулирующие колебания, определяемые вращательными аттракторами, имеют большие средние значения и меньшие амплитуды качаний по частоте, чем колебания, определяемые колебательно-вращательными аттракторами.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены автомодуляционные режимы системы ФАП с фильтром второго порядка, при этом особое внимание уделено режимам хаотических колебаний. Проведена классификация хаотических колебаний системы ФАП, среди которых выделены колебания, представляющие наибольший интерес для практических приложений: колебания с хаотической угловой модуляцией, стабилизированные по опорной частоте. Предложены алгоритмы выделения в пространстве параметров областей, соответствующих различному динамическому поведению. По предложенным алгоритмам построены карты динамических режимов трёхмерной модели ФАП для оценки областей удержания режима ХМК и областей захвата в режим ХМК при различных характеристиках фазового дискриминатора. Проведён сравнительный анализ карт динамических режимов с результатами бифуркационного анализа математической модели системы ФАП. Установлено, что полученные карты, во-первых, достаточно хорошо согласуются с результатами бифуркационного анализа модели, во-вторых, позволяют оценивать размеры и внутреннюю структуру областей генерации ХМК. Полученные с помощью карт динамических режимов результаты подтверждают сделанные ранее выводы о большом разнообразии динамических режимов трёхмерной модели ФАП, о её высокой мультистабильности. Для построенных карт динамических режимов вычислены характеристики модулирующих колебаний. Проведено совместное рассмотрение полученных карт динамических режимов и характеристик модулирующих колебаний. Установлено, что для оценки хаотических свойств систем ФАП недостаточно анализировать карты ляпуновских показателей, поскольку они не содержат информацию о структуре хаотических аттракторов, а следовательно, о типе динамического режима. Проведённый анализ областей удержания в режиме ХМК и захвата в режим ХМК при различных характеристиках фазового дискриминатора свидетельствуют, что эти области крайне малы и обладают сравнительно невысокой степенью хаотичности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матросов В. В. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22 (23). С. 4.
2. Matrosov V. V. // Proc. 5th Int. Workshop on Nonlinear Dynamics of Electron Systems — NDES'97, Moscow, Russia, 1997. P. 554.
3. Шалфеев В. Д., Матросов В. В., Корзинова М. В. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. С. 44.

4. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 12. С. 1 033.
5. Shalfeev V. D., Matrosov V. V., Korzinova M. V. // Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems / Ed. by G. Chen. Washington: CRC Press, 1999. P. 529.
6. Shalfeev V. D., Matrosov V. V. // Chaos in Circuits and Systems / Ed. by G. Chen, T. Ueta. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2002. P. 130.
7. Matrosov V. V. // Proc. Int. Conf. Dedicated to the 100th Anniversary of A. A. Andronov, Nizhny Novgorod, Russia, 2002. V. 3. P. 219.
8. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. // Нелинейные волны'2002 / Отв. ред. А. В. Гапонов-Грехов, В. И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003. С. 77.
9. Матросов В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 3. С. 267.
10. Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002.
11. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 423 с.
12. Шустер Г. Детерминированный хаос: введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
13. Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
14. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
15. Мун Ф. Хаотические колебания: вводный курс для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1990. 312 с.
16. Берже П., Помо И., Видаль К. О детерминированном подходе к турбулентности. М.: Наука, 1991. 386 с.
17. Пономаренко В. П., Матросов В. В. // Вестник Верхне-Волжского отделения Академии технологических наук РФ. Высокие технологии в радиоэлектронике. Нижний Новгород, 1997. Вып. 2 (4). С. 15.
18. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001.
19. Шахтарин Б. И., Голубев С. В. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 3. С. 637.

Поступила в редакцию 21 мая 2005 г.; принята в печать 28 марта 2006 г.

## SELF-OSCILLATING MODES OF A PHASE-LOCKED LOOP WITH THE SECOND-ORDER FILTER

*V. V. Matrosov*

We study self-oscillating modes of a phase-locked loop with the second-order filter. The regions of modulated-oscillation generation in the parameter space and modulating-oscillation properties are studied. Special attention is paid to analyzing oscillations with chaotic modulation.