УДК 621.391.01

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ С ФИЛЬТРОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. В. Матросов

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Исследуются динамические режимы системы фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка в цепи управления. В пространстве параметров выделяются области с различным динамическим поведением. Анализируется эволюция выделенных областей при изменении параметров фильтров и формы характеристики фазового дискриминатора.

ВВЕДЕНИЕ

Системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) нашли широкое применение в различных сложных системах и комплексах, реализующих современные высокоэффективные методы передачи информации с использованием регулярных сигналов. Эти системы используются для демодуляции сигналов с частотной и фазовой модуляцией, для синтеза частот, в СВЧ генераторах и т. д. [1–4]. Проблемы динамики таких систем до сих пор остаются в числе актуальных задач радиофизики и теоретической радиотехники. В последнее время к системам ФАП проявляется повышенный интерес [5–15], который обусловлен развитием теории информационных систем, использующих динамический хаос. Перспектива создания на базе ФАП высокоэффективных генераторов колебаний с частотной и фазовой хаотической модуляцией представляется весьма привлекательной для реализации идеи передачи информации на основе динамического хаоса [16].

Несмотря на многочисленные работы, посвящённые исследованию систем ФАП, существует достаточно большой круг вопросов, которые практически не освещены в литературе. К таким вопросам относится, в частности, динамика системы вне области устойчивости, т. е. вне области существования синхронного режима. Это объясняется тем, что в традиционных применениях систем ФАП в качестве основного динамического режима рассматривался режим синхронизации, поэтому внимание исследователей было сосредоточено главным образом на изучении именно синхронного режима: точности синхронизации, областей удержания режима синхронизации в пространстве параметров и областей захвата в синхронный режим, времени вхождения системы ФАП в режим синхронизации и т. д. Асинхронными режимами интересовались постольку, поскольку они нарушали устойчивую работу системы. Идея использования ФАП как генератора сложных модулированных колебаний делает актуальной задачу детального исследования свойств асинхронных режимов и их устойчивости по отношению к вариациям параметров системы. Данная работа посвящена именно этим вопросам и представляет результаты бифуркационного анализа динамических режимов модели ФАП с фильтром второго порядка в цепи управления. Особенность проведённых исследований состоит в том, что изучаемая модель принадлежит к классу динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством, которые характеризуются большим разнообразием стационарных движений. Приведённые ниже результаты исследований могут представлять интерес для других приложений, где динамические процессы описываются математическими моделями, содержащими циклические координаты, например при рассмотрении эффектов фазовой синхронизации хаотических систем [17].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ФАП

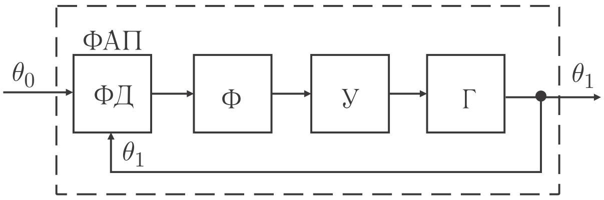


Рис. 1. Структурная схема системы ФАП

Система ФАП является типовым кольцом автоматического управления частотой генератора (см. рис. 1). Периодические колебания с выхода генератора (Г) с текущей фазой θ_1 сравниваются на фазовом дискриминаторе (ФД) с колебаниями опорного сигнала с текущей фазой θ_0, в результате чего на выходе ФД формируется сигнал, зависящий от разности фаз $\varphi = \theta_0 - \theta_1$, который после прохождения фильтра (Ф) подаётся на управляющий элемент (У), непосредственно изменяющий частоту генератора в сторону уменьшения фазового рассогласования φ. Математическая модель такой системы ФАП может быть записана в операторной форме:

$$\frac{p\varphi}{\Omega} + K(p)F(\varphi) = \gamma, \tag{1}$$

где $p \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}t$, Ω — максимальная расстройка по частоте, которую может скомпенсировать цепь управления, $\gamma = \Omega_{\text{Н}}/\Omega$, $\Omega_{\text{Н}}$ — начальная частотная расстройка колебаний, $K(p)$ — коэффициент передачи фильтра в операторной форме, $F(\varphi)$ — нормированная характеристика фазового дискриминатора. Нелинейные свойства уравнения (1) определяются нелинейной характеристикой фазового дискриминатора, а инерционные зависят от фильтра в цепи управления. В зависимости от типа используемого фильтра из уравнения (1) могут быть получены различные математические модели. Если предположить, что в цепи управления стоит фильтр второго порядка с коэффициентом передачи $K(p) = (1 + n_1 a_1 p + n_2 a_2 p^2)/(1 + a_1 p + a_2 p^2)$, то из (1) получается следующая математическая модель:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = y, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = z,$$

$$\mu\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = \gamma - F(\varphi) - [1 + n_1 \varepsilon F'(\varphi)]\,y - n_2 \mu y^2 F''(\varphi) - [\varepsilon + n_2 \mu F'(\varphi)]\,z, \tag{2}$$

определённая в автономном трёхмерном цилиндрическом фазовом пространстве $U = \{\varphi \mod 2\pi, y, z\}$, где $\tau = \Omega t$ — безразмерное время, $\varepsilon = \Omega a_1 > 0$, $\mu = \Omega^2 a_2 > 0$, $0 \le n_1 < 1$, $0 \le n_2 < 1$ — безразмерные параметры цепи управления.

В силу существенной нелинейности и высокой размерности модели (2) её исследование проводилось путём численного моделирования, основанного на методах теории колебаний и теории бифуркаций. При этом широко использовались результаты исследования системы (2), полученные при различных предположениях и различными методами [18–24] [1]. Прежде всего, это сведения о бифуркационных поверхностях, разделяющих пространство параметров системы (2) на области, где система глобально асимптотически устойчива, содержит циклы первого и второго рода, а также имеет счётное множество седловых циклов [20, 23]. Что касается хаотических движений, то информация о них в ранних работах отсутствует. Одной из первых работ, в которых рассматривались хаотические аттракторы, является [7]. В ней для системы (2) в случае $F(\varphi) = \sin\varphi$, $n_1 = n_2 = 0$ путём численного моделирования установлено существование колебательных, вращательных и колебательно-вращательных хаотических аттракторов и на плоскости параметров

[1] Более полный список работ, посвящённых исследованию системы ФАП с фильтром второго порядка, можно найти в [1–4].

(μ, γ) выделены области их существования при фиксированных ε. В работах [10, 12] эти исследования были продолжены. В данной работе рассматривается динамика системы (2) при различных характеристиках фазового дискриминатора в случае $n_1 = n_2 = 0$ и при $F(\varphi) = \sin\varphi$ в случае $n_1 n_2 \neq 0$ [12, 13].

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ СИСТЕМЫ ФАП

В результате исследования модели (2) качественными и численными методами установлено, что система ФАП с фильтром второго порядка обладает большим разнообразием стационарных режимов [4, 7]:

1) режим синхронизации генератора опорным сигналом, когда частоты опорного и подстраиваемого генераторов равны, а разность фаз принимает постоянное значение φ^*. В фазовом пространстве U режиму синхронизации отвечает устойчивое состояние равновесия системы (2).

2) режим квазисинхронизации, при котором имеется периодическая модуляция частоты генератора в окрестности стабилизированной по опорному сигналу средней частоты. В фазовом пространстве U этому режиму отвечают колебательные (ограниченные по координате φ) аттракторы системы (2). Колебательные движения модели (2) могут быть как регулярными, так и хаотическими, поэтому квазисинхронные режимы также делятся на регулярные и хаотические.

Заметим, что в фазовом пространстве модели (2) могут существовать колебательные аттракторы, у которых амплитуда по координате φ больше 2π, т. е. на этих аттракторах по переменной φ имеют место вращения. Такие аттракторы мы будем называть колебательными аттракторами с проворотом, а соответствующие им режимы ФАП — квазисинхронными режимами с проворотом фазы. В этом случае в системе ФАП наблюдаются сдвиги фазы колебаний подстраиваемого генератора относительно опорного сигнала на $\pm 2\pi$, средняя же частота таких колебаний стабилизирована опорным сигналом.

3) режимы биений, при которых разность фаз подстраиваемого и опорного сигналов неограниченно нарастает. Этим режимам в фазовом пространстве U соответствуют вращательные и колебательно-вращательные аттракторы (координата φ у которых неограничена) системы (2). Так же, как и квазисинхронные режимы, режимы биений могут быть регулярными и хаотическими.

Большое разнообразие динамических режимов системы ФАП с фильтром второго порядка свидетельствует о больших функциональных возможностях этой системы как генератора колебаний. Однако для практического использования этих возможностей необходимы знания о величине и взаимном расположении в пространстве параметров областей существования тех или иных режимов. Для передачи информации с использованием динамического хаоса наибольший интерес представляют режимы хаотической квазисинхронизации, т. к. средняя частота колебаний в этих режимах не зависит от параметров системы ФАП. Далее эти режимы будем называть режимами хаотически модулированных колебаний (ХМК) и уделим им особое внимание.

3. АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ

Согласно [23] модель (2) обладает бесконечным числом бифуркаций, следовательно, её полный бифуркационный анализ невозможен. Проведённое ниже численное исследование не ставило своей целью нахождение наибольшего числа бифуркационных поверхностей, а было направлено на выделение в пространстве параметров модели областей с качественно различным динамическим поведением системы и изучение эволюции выделенных областей при изменении параметров модели. Анализ пространства параметров проводился в два этапа. На первом этапе при фиксированной характеристике ФД путём построения параметрических портретов в различных сечениях пространства параметров изучалась роль параметров фильтра. На втором этапе анализировались изменения установленных областей при изменении формы характеристики ФД.

3.1. Влияние параметров фильтра на динамические режимы системы ФАП характеризуют

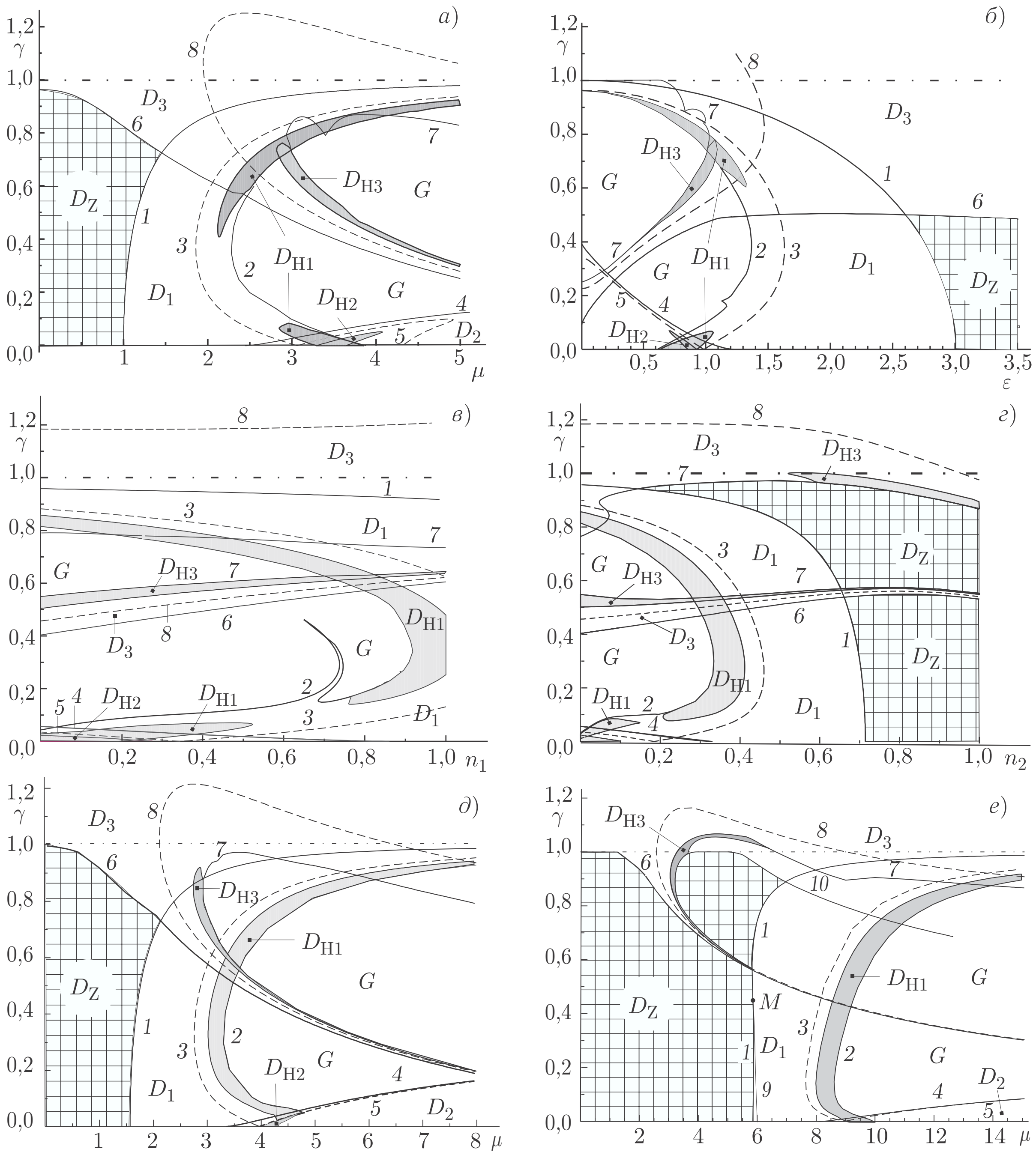


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы динамических режимов модели (2) для $F(\varphi) = \sin\varphi$ при $\varepsilon = 1$, $n_1 = n_2 = 0$ (*а*); $\mu = 3$, $n_1 = n_2 = 0$ (*б*); $\varepsilon = 1$, $\mu = 3{,}5$, $n_2 = 0$ (*в*); $\varepsilon = 1$, $\mu = 3{,}5$, $n_1 = 0$ (*г*); $\varepsilon = 1$, $n_1 = n_2 = 0{,}2$ (*д*); $\varepsilon = 1$, $n_1 = n_2 = 0{,}5$ (*е*)

приведённые на рис. 2 параметрические портреты системы (2) в плоскостях (μ, γ), (ε, γ), (n_1, γ), (n_2, γ) в случае синусоидальной характеристики фазового дискриминатора: $F(\varphi) = \sin\varphi$. Система (2) инвариантна относительно преобразования П: $(\gamma, \varphi, y, z) \to (-\gamma, -\varphi, -y, -z)$, поэтому достаточно рассматривать значения $\gamma \geq 0$.

Штрих-пунктирная прямая $\gamma = 1$ является границей области существования состояний равновесия системы (2). При $\gamma < 1$ в фазовом пространстве U существуют два состояния равновесия: $O_1(\varphi^* = \arcsin\gamma, y^* = 0,\ z^* = 0)$ — узел или фокус, и $O_2(\pi - \varphi^*, y^*, z^*)$ — седло или седло-фокус. Состояние равновесия O_1 теряет устойчивость через бифуркацию Андронова—Хопфа на кривой $\gamma = \gamma_{\rm s}(\mu, \varepsilon, n_1, n_2)$, удовлетворяющей уравнению $(\varepsilon + n_2\mu\sqrt{1-\gamma_{\rm s}^2})\,(1 + n_1\varepsilon) - \mu\sqrt{1-\gamma_{\rm s}^2} = 0$. Область D_U, заключённая между прямой $\gamma = 1$ и кривой $\gamma_{\rm s}$, представляет собой область удержания режима синхронизации.

В области D_1, расположенной между линиями *1* и *2*, в фазовом пространстве системы (2) существует колебательный аттрактор вокруг состояния равновесия O_1. Линия *1*, ограничивающая область D_1 сверху и слева (рис. 2*а, д, е*) или справа (рис. 2*б, в, г*), в общем случае состоит из кусков двух бифуркационных кривых, которые соединяются в точке M (рис. 2*е*). Точка M отвечает обращению в нуль первой ляпуновской величины [25]: $L = 0$. Часть линии *1*, расположенная выше точки M, определяется бифуркационной кривой $\gamma = \gamma_{\rm s}$, на которой $L < 0$. Поэтому вхождение в область D_1 через этот участок сопровождается мягким рождением устойчивого колебательного предельного цикла L_{01} (рис. 3*а*). Часть линии *1*, расположенная ниже точки M, отвечает касательной бифуркации, в результате которой в фазовом пространстве U рождаются устойчивый L_{01} и седловой Γ_{01} колебательные предельные циклы. При продвижении внутрь области D_1 цикл Γ_{01} стягивается в точку и исчезает на бифуркационной кривой $\gamma = \gamma_{\rm s}$ (линия *9* на рис. 2*е*), где $L > 0$. В случае $n_1 = 0$ или $n_2 = 0$ первая ляпуновская величина L всегда отрицательная, поэтому линия *1* в этих случаях состоит из одной бифуркационной кривой $\gamma = \gamma_{\rm s}$. «Опасный» участок на кривой $\gamma_{\rm s}$ (участок, где $L > 0$) возникает при $n_1 n_2 \neq 0$ из точки $\gamma = 0$ и далее расширяется в сторону увеличения начальной частотной расстройки. Если при $\gamma = 0$ первая ляпуновская величина $L < 0$, то она отрицательна и при $\gamma \neq 0$. Таким образом, о наличии опасного участка на кривой смены устойчивости состояния равновесия O_1 можно судить по значению L при $\gamma = 0$. Если при $\gamma = 0$ величина $L < 0$, то вся кривая $\gamma_{\rm s}$ является безопасной, $L > 0$ свидетельствует о наличии на границе $\gamma_{\rm s}$ опасного участка. Для иллюстрации возможности возникновения опасной границы на рис. 4 приведены проекции поверхности $L(\gamma, \varepsilon, \mu, n_1, n_2) = 0$ на подпространство (μ, ε, n_1) при $\gamma = 0$. Примечательно, что на четырёхмерной поверхности $L(\gamma = 0, \varepsilon, \mu, n_1, n_2) = 0$ параметр ε достигает максимума $\varepsilon_{\max} = 1/n_1$, а параметр μ достигает минимума $\mu_{\min} = 4/n_1$ при $n_2 = 0{,}25$.

По мере удаления от линии *1* цикл L_{01} может проходить через серию бифуркаций удвоения периода, в результате чего возникает колебательный хаотический аттрактор S_{01} (рис. 3*б*). Колебательный хаотический аттрактор S_{01} существует при значениях параметров из областей $D_{\rm H1}$. Линия *2*, ограничивающая область D_1 справа (рис. 2*а, д, е*) или слева (рис. 2*б, в, г*), составлена из кусков бифуркационных кривых, отвечающих разрушению аттрактора S_{01} или образованию многообходных петель сепаратрис седла-фокуса O_2. Штриховая линия *3*, проходящая внутри области D_1, отвечает первой смене устойчивости цикла L_{01}.

При значениях параметров из области D_2 в фазовом пространстве U существует устойчивый колебательный предельный цикл L_{02} (рис. 3*в*). Границей области D_2 служит линия *4*, соответствующая касательной бифуркации цикла L_{02}. Как и L_{01}, цикл L_{02} может испытывать бифуркации удвоения периода, в результате которых возникает хаотический колебательный аттрактор S_{02} (рис. 3*г*). Аттрактор S_{02} реализуется при значениях параметров из области $D_{\rm H2}$. Штриховая линия *5*, проходящая внутри области D_2, соответствует первому удвоению периода цикла L_{02}. При

$\gamma = 0$ эта линия совпадает с штриховой линией *3*.

При параметрах из области D_3 в фазовом пространстве U существуют аттракторы вращательного типа. Эта область заключена между линиями *6* и *7*. Линия *6* состоит из двух кривых: одна соответствует образованию устойчивой петли сепаратрис седла (седла-фокуса) O_2, охватывающей фазовый цилиндр U, вторая — касательной бифуркации вращательного цикла. При вхождении в область D_3 через линию *6* в фазовом пространстве системы (2) появляется устойчивый вращательный предельный цикл L_1 (рис. 3*з*). Цикл L_1 может проходить через серию бифуркаций удвоения периода, порождая вращательный хаотический аттрактор S_1 (рис. 3*и*). Хаотические вращательные аттракторы системы (2) существуют при значениях параметров из области $D_{\text{Н3}}$. Линия *7* составлена из кусков бифуркационных кривых, отвечающих либо образованию многообходных петель сепаратрис седла-фокуса O_2, либо касательным бифуркациям устойчивых вращательных предельных циклов большой кратности (два, четыре и выше), либо кризису вращательного хаотического аттрактора. Штриховая линия *8* внутри области D_3 отражает первую бифуркацию удвоения периода цикла L_1.

В области G система (2) характеризуется сложным динамическим поведением, связанным с разнообразными колебательно-вращательными предельными циклами и хаотическими аттракторами. При движении внутри этих областей колебательно-вращательные аттракторы постоянно эволюционируют, переходя из регулярных в хаотические и обратно. При этом изменяется струк-

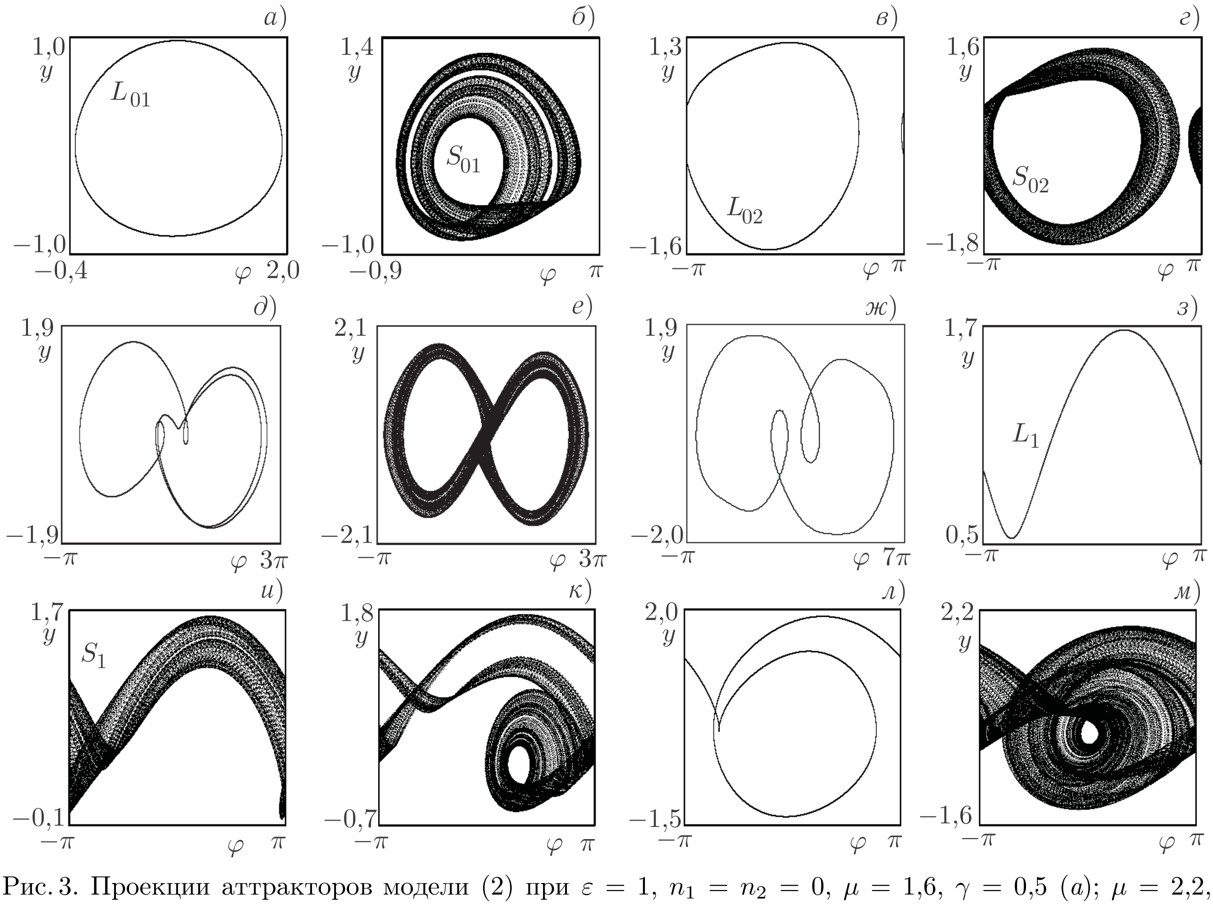


Рис. 3. Проекции аттракторов модели (2) при $\varepsilon = 1$, $n_1 = n_2 = 0$, $\mu = 1{,}6$, $\gamma = 0{,}5$ (*а*); $\mu = 2{,}2$, $\gamma = 0{,}5$ (*б*); $\mu = 3{,}5$, $\gamma = 0{,}05$ (*в*); $\mu = 3{,}5$, $\gamma = 0{,}01$ (*г*); $\mu = 5{,}0$, $\gamma = 0{,}002$ (*д*); $\mu = 5{,}4$, $\gamma = 0{,}002$ (*е*); $\mu = 17{,}8$, $\gamma = 0{,}003$ (*ж*); $\mu = 2{,}0$, $\gamma = 0{,}9$ (*з*); $\mu = 3{,}2$, $\gamma = 0{,}6$ (*и*); $\mu = 3{,}35$, $\gamma = 0{,}75$ (*к*); $\mu = 3{,}0$, $\gamma = 0{,}19$ (*л*); $\mu = 3{,}8$, $\gamma = 0{,}22$ (*м*)

тура аттракторов, т. е. изменяется соотношение колебательных и вращательных движений. На рис. 3*к, л, м* в качестве примера приведены проекции регулярного и хаотических колебательно-вращательных аттракторов различной структуры. В процессе вычислительных экспериментов установлено, что в области G могут реализовываться и чисто колебательные аттракторы (как регулярные, так и хаотические), однако области существования таких аттракторов малы.

Сложную картину перестройки динамического поведения системы (2) при движении внутри области G иллюстрируют однопараметрические бифуркационные диаграммы $\{\gamma, \varphi\}$ отображения Пуанкаре, представленные на рис. 5. Тёмная полоса над диаграммами характеризует вращение по координате φ. Если тёмная полоса отсутствует, то при этих значениях параметра γ в фазовом пространстве U реализуется колебательный аттрактор. Из представленных на рис. 5 диаграмм видно, что сценарии перестройки динамического поведения системы при увеличении и уменьшении параметра γ имеют различия. Это свидетельствует о наличии в системе (2) режимов мультистабильного поведения, при которых допускается одновременное существование аттракторов разных типов, как регулярных, так и хаотических.

Колебательные аттракторы с проворотом наблюдаются в модели (2) при $\gamma \ll 1$. Эти движения весьма разнообразны, в зависимости от соотношения параметров фильтра они могут быть регулярными и хаотическими, симметричными и асимметричными, с одним, двумя и более проворотами (рис. 3*д, е, ж*). Области в пространстве параметров, соответствующие существованию колебательных аттракторов с проворотом, малы, поэтому на рис. 2 они не выделены.

В области D_{Z} происходит захват в синхронный режим. Здесь состояние равновесия глобально асимптотически устойчиво. При $n_1 > 0$ или $n_2 > 0$ область D_{Z} может состоять из двух подобластей (рис. 2*г, е*), которые разделены узкой полосой параметров, отвечающей за существование в фазовом пространстве U асинхронных движений. Однако разделяющий слой может быть настолько узким, что область D_{Z} практически представляет собой единое целое. Границами области D_{Z} служат линии *1, 6, 7*, а также линия *10*, соответствующая возникновению аттракторов колебательно-вращательного типа. При значениях параметров из подобласти D_{Z}, целиком расположенной в области больших начальных расстроек, в фазовом пространстве U существуют неустойчивые периодические движения, которые могут приводить к усложнению и замедлению

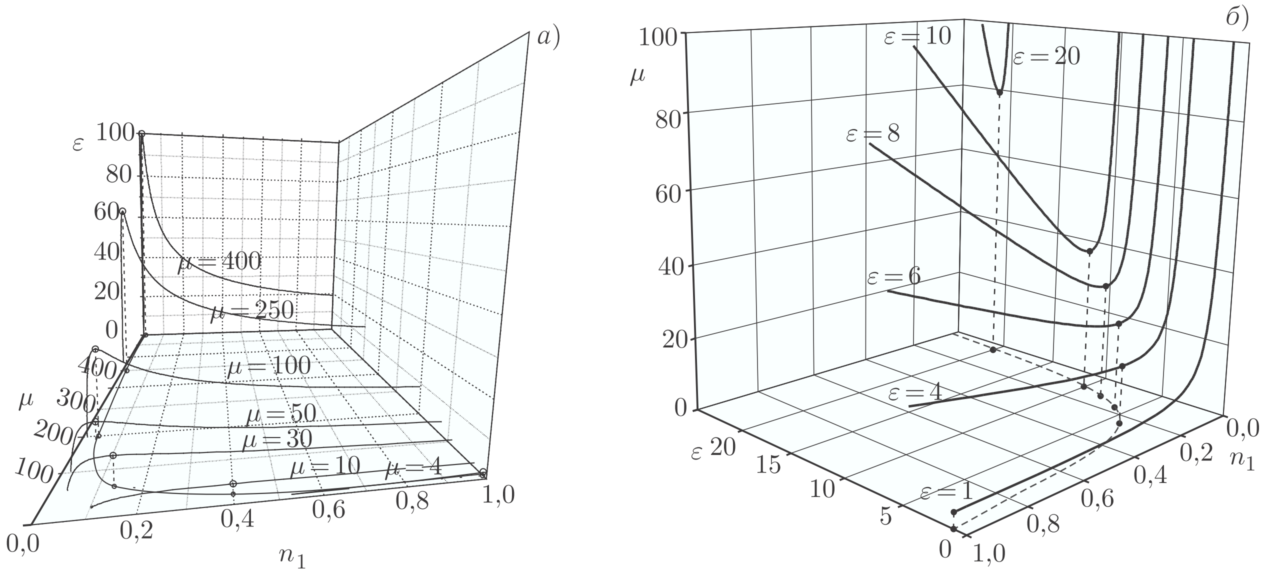
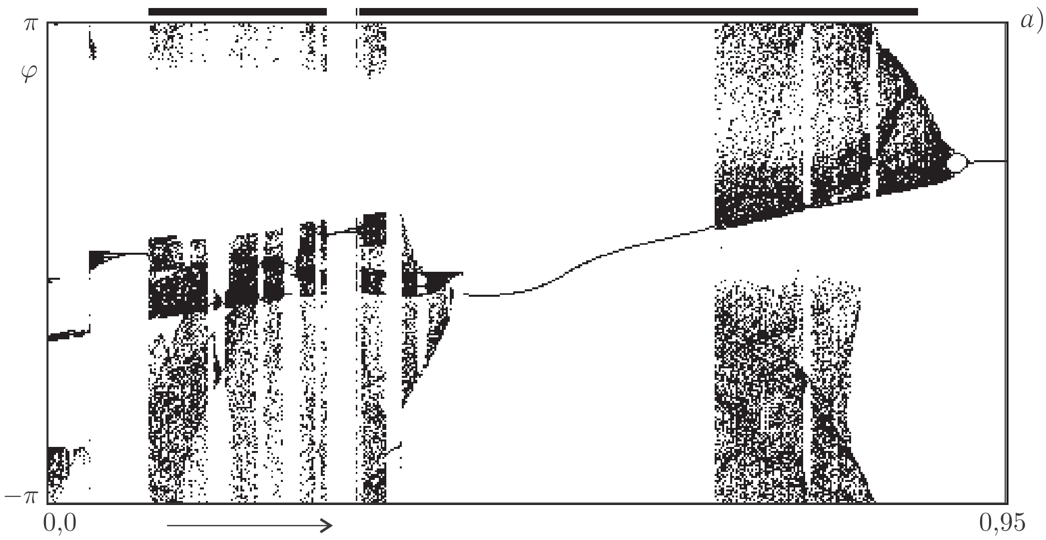


Рис. 4. Проекции поверхности обращения в нуль первой ляпуновской величины для значений $\gamma = 0$



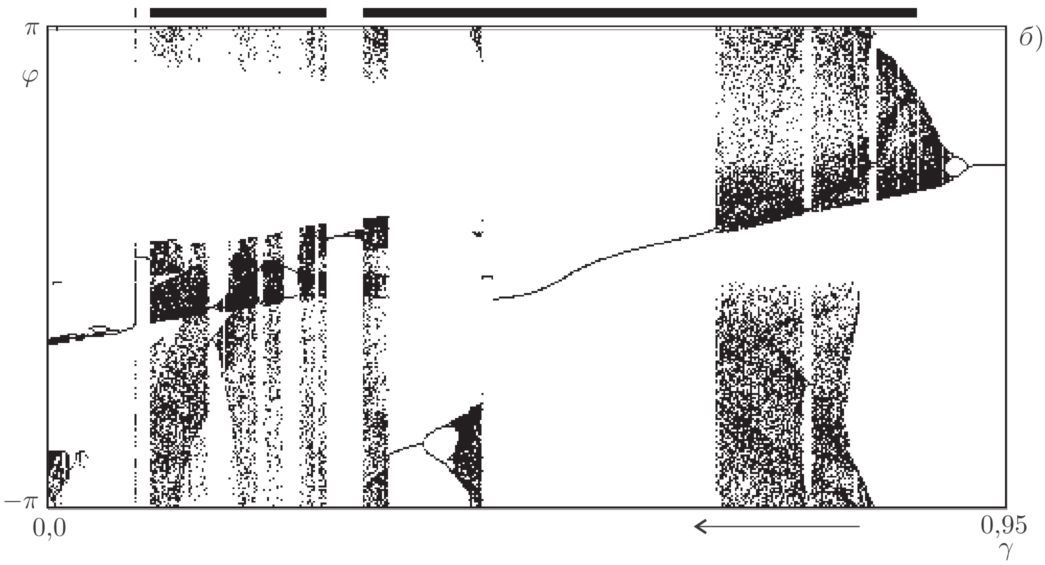
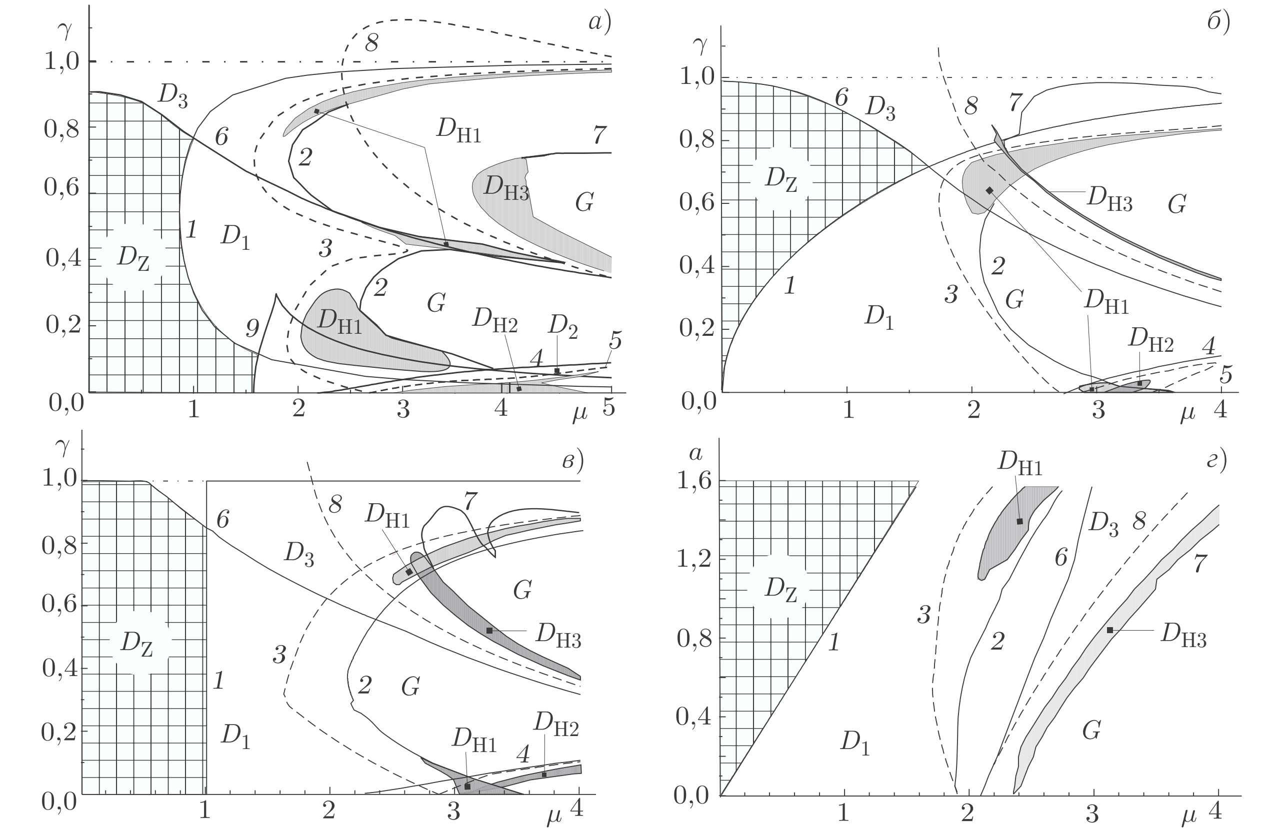


Рис. 5. Однопараметрические бифуркационные диаграммы отображения Пуанкаре модели (2) при $\varepsilon = 1$, $\mu = 4{,}1$, $n_1 = n_2 = 0$, полученные при увеличении (*а*) и уменьшении (*б*) параметра γ

переходных процессов к режиму синхронизации.

Бифуркационные диаграммы на рис. 2 дают наглядное представление о структуре пространства параметров системы ФАП с фильтром второго порядка и её эволюции при изменении параметров фильтра. Из представленных диаграмм видно, что пространство параметров вне области устойчивости имеет сложную структуру. Оно характеризуется большим количеством областей, отвечающих различным динамическим режимам, причём эти области могут пересекаться, что приводит к мультистабильному поведению системы и, как следствие, гистерезисным явлениям. Наиболее ярко выраженными областями моностабильного поведения являются область D_{Z} захвата в синхронный режим и примыкающие к ней области квазисинхронных регулярных движений и регулярных биений. Область существования ХМК, в настоящее время привлекающая к себе повышенное внимание, имеет сравнительно небольшие размеры. Более того, эта область, во-первых, состоит из нескольких подобластей (D_{H1} и D_{H2}), во-вторых, часть области лежит в



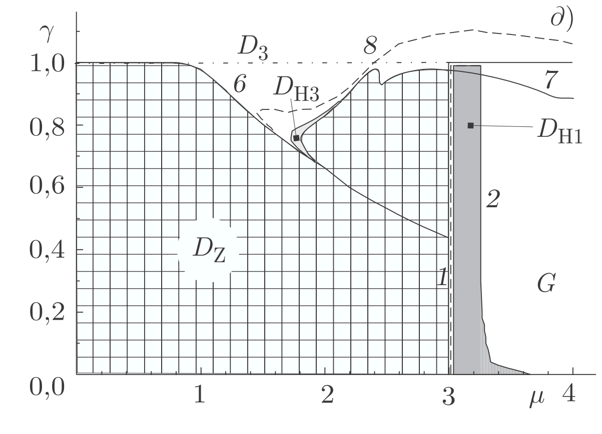


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы динамических режимов модели (2) при $\varepsilon = 1$, $n_1 = n_2 = 0$ для $F(\varphi) = \sin^3\varphi$ (*а*), $F(\varphi) = \sin^{1/3}\varphi$ (*б*), трапецеидальной характеристики ФД при $a = 1$ (*в*) и при $\gamma = 0{,}5$ (*г*), а также для пилообразной характеристики ФД при $b = 3$ (*д*)

зоне мультистабильного поведения системы. Всё это затрудняет реализацию режима ХМК в рассматриваемой системе. Подбором параметров n_1 и n_2 можно существенным образом улучшить синхронизирующие свойства системы ФАП, сохраняя при этом «безопасность» границы смены устойчивости. Введение параметров n_1 и n_2 позволяет также увеличить области генерации ХМК, в частности за счёт объединения подобластей D_{H1} в единую область, а также увеличить размеры областей, в которых режим ХМК наступает гарантированно. Здесь обратим внимание на то, что при $n_1 \neq 0$ и $n_2 \neq 0$ область гарантированной генерации регулярных и хаотических квазисинхронных режимов обладает теми же свойствами, что и область D_Z, т. е. может состоять из двух подобластей, разделённых узкой полосой, в которой реализуются асинхронные режимы.

3.2. На рис. 6 представлены результаты исследования динамических режимов модели (2) при различных характеристиках фазового дискриминатора в случае $n_1 = n_2 = 0$. Рассмотрены три вида характеристик, симметричных относительно прямой $\varphi = \pi/2$: $F(\varphi) = \sin^3\varphi$ (рис. 6*а*), $F(\varphi) = \sin^{1/3}\varphi$ (рис. 6*б*) и в виде трапеции (рис. 6*в, г*):

$$F(\varphi) = \begin{cases} \varphi/a, & -a < \varphi < a; \\ 1, & a \le \varphi \le \pi - a; \\ -1, & -\pi + a \le \varphi \le -a; \\ -(\varphi - \pi)/a, & \pi - a < \varphi < \pi; \\ -(\varphi + \pi)/a, & -\pi < \varphi < -\pi + a, \end{cases} \qquad (3)$$

а также асимметричная характеристика ФД в виде пилы (рис. 6*д*):

$$F(\varphi) = \begin{cases} \varphi/b, & -b \le \varphi \le b; \\ (\varphi - \pi)/(b - \pi), & b < \varphi < \pi; \\ (\varphi + \pi)/(b - \pi), & -\pi < \varphi < -b. \end{cases} \qquad (4)$$

На рис. 6 сохранены обозначения кривых и областей, принятые для рис. 2. Сравнение рис. 2*а* и 6 позволяет заключить, что изменение нелинейной характеристики ФД системы ФАП при $\varepsilon = 1$ не приводит к качественным изменениям параметрического портрета на плоскости (μ, γ) — автомодуляционные колебания возникают и эволюционируют по сценариям, установленным ранее для синусоидальной характеристики ФД. Основные изменения связаны с формой и размерами областей параметров, отвечающих существованию тех или иных колебаний. Остановимся на сравнительном анализе областей параметров, отвечающих хаотическим колебаниям.

Увеличение крутизны характеристики ФД в нуле (переход $F(\varphi) = \sin^{1/3}\varphi \to F(\varphi) = \sin\varphi \to F(\varphi) = \sin^3\varphi$ или уменьшение параметра a для трапецеидальной характеристики (3)) приводит к уменьшению областей ХМК D_{H1} и увеличению областей хаотических биений D_{H3} в области больших начальных расстроек $0{,}5 < \gamma < 1$, а при малых γ $(0 < \gamma < 0{,}5)$ — к увеличению областей D_{H1} и D_{H2}. В случае кусочно-линейной аппроксимации ФД граница возникновения квазисинхронного режима (кривая *1*) определяется только параметром нелинейности (a или b) и не зависит от параметров цепи управления. При трапецеидальной $(0 < a < \pi/2)$ и треугольной $(a = \pi/2)$ характеристиках ФД, когда характеристики симметричны относительно $\varphi = \pi/2$, хаотически модулированные колебания сильно зависят от параметра γ. Введение асимметрии в треугольную характеристику, т. е. переход к пилообразной характеристике ФД, практически исключает зависимость ХМК от параметра γ, при этом существенно увеличивается область синхронизации D_{Z} и уменьшается область регулярных квазисинхронных режимов. Таким образом, из представленных результатов следует, что, изменяя характеристику фазового детектора, можно влиять на автоколебательные режимы системы ФАП, но нельзя добиться существенного увеличения размеров областей генерации ХМК.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты моделирования системы (2) свидетельствуют о том, что система ФАП с фильтром второго порядка обладает большим разнообразием регулярных и хаотических режимов. Реализация этих режимов зависит как от параметров системы, так и от начальных условий. Обнаружены новые сведения о характере границ области захвата в режим синхронизации: границами могут являться бифуркационные поверхности, соответствующие кризису хаотических аттракторов. Показано, что, изменяя форму характеристики ФД и варьируя параметры фильтра, можно существенно улучшить синхронизирующие свойства системы ФАП. Выявлены широкие возможности системы ФАП по генерации модулированных колебаний различной сложности. Установлено, что представляющие практический интерес области существования хаотически модулированных колебаний в системе ФАП с фильтром второго порядка невелики. С помощью параметров фильтра можно увеличить области, где режим ХМК наступает гарантированно, однако с их помощью добиться кардинального увеличения размеров областей генерации ХМК не представляется возможным. Не удаётся это сделать и за счёт изменения формы характеристики фазового дискриминатора. Для выработки практических рекомендаций по использованию выявленных хаотических свойств системы ФАП необходимы дополнительные исследования свойств ХМК и областей их существования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
2. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении: Пер. с англ. / Под ред. Ю. Н. Бакаева, М. В. Капранова. М.: Сов. радио, 1978.
3. Фазовая синхронизация / Под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. М.: Связь, 1975.
4. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982.
5. Kolumban G., Vizvari B. // Proc. of the 3rd Int. Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electron Systems — NDES'95, Dublin, Ireland, 1995. P. 99.
6. Smyth N., Crowley C., Kennedy M. P. // Proc. of the 4th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electron Systems — NDES'96, Seville, Spain, 1996. P. 27.
7. Матросов В. В. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. С. 4.
8. Шалфеев В. Д., Матросов В. В., Корзинова М. В. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1998. № 11. С. 44.
9. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41, № 12. С. 1 033.
10. Shalfeev V. D., Matrosov V. V., Korzinova M. V. // Controlling Chaos and Bifurcations in Engineering Systems / Ed. by G. Chen. Boca—Raton—London—New York—Washington, D. C.: CRC Press, 1999. P. 529.
11. Капранов М. В., Кулешов В. Н., Ларионова М. В. и др. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2000. № 11. С. 48.
12. Shalfeev V. D., Matrosov V. V. // Chaos in Circuits and Systems / Ed. by G. Chen, T. Ueta. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2002. P. 130.
13. Matrosov V. V. // Proc. of the Int. Conf. Dedicated to the 100th Anniversary of A. A. Andronov, Nizhny Novgorod, Russia, 2002. V. 3. P. 219.
14. Шахтарин Б. И., Голубев С. В. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47, № 3. С. 637.
15. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. // Нелинейные волны'2002 / Отв. ред. А. В. Гапонов-Грехов, В. И. Некоркин. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003. С. 77.
16. Дмитриев А. С., Панас А. И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Изд.-во физ.-мат. лит., 2002.
17. Пиковский А., Роземблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
18. Сафонов В. М. // Радиотехника и электроника. 1958. Т. 3, № 4. С. 114.
19. Бакаев Ю. Н. // Радиотехника и электроника. 1965. Т. 10, № 6. С. 1 084.
20. Белюстина Л. Н., Быков В. В. // III Симпоз. по прикладной математике и кибернетике. М.: Наука, 1973. С. 28.

21. Белых В. Н., Некоркин В. И. // Фазовая синхронизация / Под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. М.: Связь, 1975. С. 106.
22. Леонов Г. А. // Сибирский математический журнал. 1975. Т. 16, № 5. С. 38.
23. Белых В. Н., Некоркин В. И. // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 5. С. 808.
24. Белюстина Л. Н., Кивелёва К. Г., Фрайман Л. А. // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. С. 21.
25. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 21 мая 2005 г.; принята в печать 28 марта 2006 г.

NONLINEAR DYNAMICS OF PHASE-LOCKED LOOP WITH THE SECOND-ORDER FILTER

V. V. Matrosov

We study the dynamic regimes of the phase-locked loop frequency control system with the second-order filter. Regions with different dynamic behaviors are identified in the parameter space. Evolution of these regions with changing filter parameters and the types of the phase-discriminator characteristics are analyzed.