

С.М. Рьжаков

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ЦЕПЕЙ

ГОРЬКИЙ-1982.

С.М.Рыжков. Топологический анализ электрических цепей.
Учебное пособие. Горький, изд.ГТУ, 1982, с.75, библиогр.4 назв.

Содержанием учебного пособия является крупный раздел читаемого на кафедре радиотехники ГТУ спецкурса "Анализ и синтез электрических цепей" – топологические методы анализа. Изложенный в учебном пособии материал соответствует объему читаемых автором лекций по этому разделу.

На основе понятия графа подробно рассмотрены процедуры формирования топологических матриц и три основных метода анализа электрических цепей – метод контурных токов, метод узловых потенциалов и метод анализа цепей с помощью уравнений в пространстве состояний.

Конечная цель учебного пособия – научить студента формировать уравнения для сосредоточенной электрической цепи разумной сложности в форме, пригодной для последующего решения этих уравнений на цифровых электронно-вычислительных машинах. Ставится и еще одна задача: научить студента записывать уравнения цепи без использования топологических методов, т.е. непосредственно по виду схемы. В конце учебного пособия имеется небольшой раздел с задачами.

Пособие предназначено для студентов радиофизического факультета ГТУ, специализирующихся по радиотехнике.

План 1982 г., поз.943

© Горьковский государственный университет
имени Н.И.Лобачевского

РАЗДЕЛ I

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

I. I. Граф электрической цепи

Рассмотрим электрическую цепь, показанную на рис. 1а. Будем интересоваться геометрическими свойствами цепи и отвлечемся от физических свойств элементов, входящих в ветви. Заменяем элементы линиями, соединяющими узлы. В результате получим геометрический образ схемы, называемый графом цепи - рис. 1б.

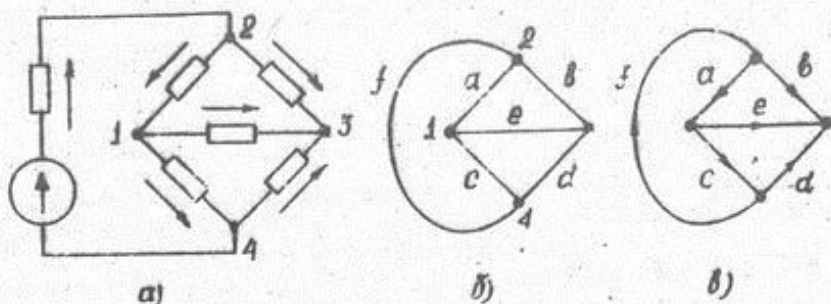


Рис. 1

Граф цепи состоит из ребер и вершин. В общем случае граф определяют как множество вершин U , связи между которыми определены множеством ребер e . Граф обозначают $G = (U, e)$. При начертании графа безразлично, как изображать ребра - это или прямые линии (ребра $a-e$ на рис. 1б) или кривые линии (ребро f). Важно, что в графе сохраняется число ветвей и узлов, а, следовательно, число контуров исходной цепи. Ребро графа электрической цепи может заменять либо один элемент (ребра $a-e$), либо несколько последовательно соединенных элементов - ребро f . Граф, любая пара вершин которого связаны, называется связным графом. В соответствии с этим определением граф на рис. 1б является связным. Выберем произвольное направление токов (напряжений) в ветвях исходной электрической цепи (рис. 1а). Тогда получим соответствующий граф с ориентированными ребрами или, сокращенно, оргграф - рис. 1в. Для оргграфа различают начальную вершину, из которой ребро исходит, и конечную вершину, в которую ребро заходит. Ребра с одинаковыми граничными вершинами являются параллельными и называются

ся кратными. В графе на рис.10, в нет кратных ребер.

Рассмотрим электрическую цепь с индуктивной связью - рис.2а. Граф этой цепи показан на рис.2б.

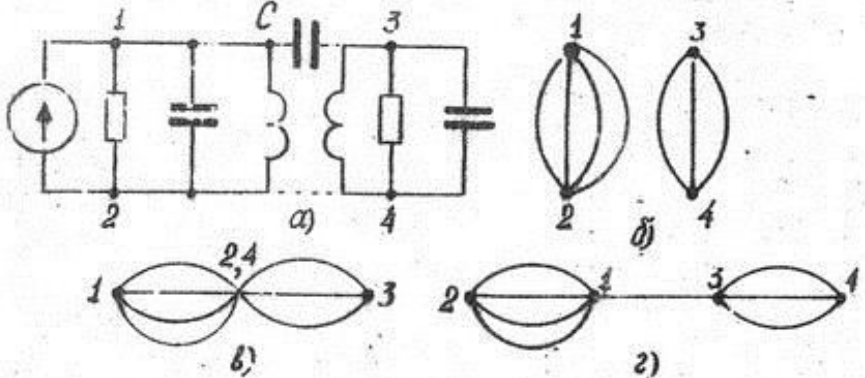


Рис.2

Граф на рис.2б содержит кратные ребра, является несвязным и состоит из двух частей. Соединим узлы 2 и 4 исходной цепи (пунктир на рис.2а). В этом случае соответствующий граф станет связным - рис.2в, причем объединенный узел (2,4) называется точкой сочленения. Если соединим узлы 1 и 3 исходной электрической цепи емкостью C (пунктир на рис.2а), то в соответствующем связном графе (рис.2г) появится дополнительное ребро, называемое мостом.

Важным понятием является дерево графа. Деревом называют любую систему из минимального числа ребер графа, соединяющую все узлы без обрезания замкнутых контуров. Некоторые деревья графа рис.10 представлены на рис.3.

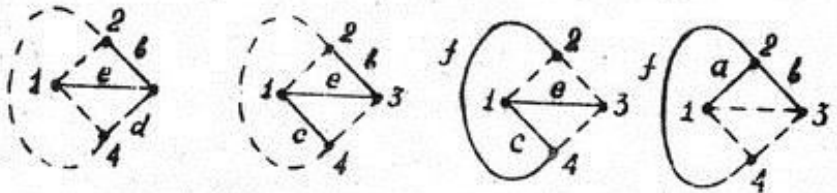


Рис.3

Ветви графа, вошедшие в состав дерева (они показаны на рис.3 сплошными линиями) называют ветвями дерева, а ветви, не вошедшие в состав дерева (пунктирные линии на рис.3), называют ветвями связи, лишними ветвями или хордами. Построим дерево для графа на рис.2б.

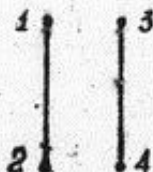


Рис.4

Дерево показано на рис.4: получили несвязный подграф, компонентами которого являются деревья. Несвязный граф, компонентами которого являются деревья, называется лесом. Обозначим: U - число вершин графа, ℓ - общее число ветвей графа, N - число ветвей дерева, m - число хорд. Поскольку первая ветвь дерева соединяет две вершины графа, а каждая последующая ветвь добавляет по одной вершине, то число ветвей дерева N на единицу меньше числа вершин U

$$N = U - 1. \quad (1)$$

Число ветвей, не вошедших в дерево, или число хорд равно

$$m = \ell - N = \ell - U + 1. \quad (2)$$

1.2. Матрица инциденций $[A_\alpha]$. Первый закон Кирхгофа с использованием матрицы инциденций

Первый закон Кирхгофа можно записать в матричной форме, используя для этого матрицу инциденций. Ее впервые использовал Кирхгоф. Матрица инциденций обозначается

$$[A_\alpha] = [a_{ij}]_{U \times \ell}.$$

Такая запись означает, что матрица $[A_\alpha]$ имеет U строк, где U - число вершин в графе, причем $i = 1, 2, \dots, U$ - номер строки матрицы, и имеет ℓ столбцов, где ℓ - число ребер графа, причем $j = 1, 2, \dots, \ell$ - номер столбца матрицы. Типичный элемент a_{ij} матрицы равен

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{если ребро } j \text{ присоединено к вершине } i \text{ и ориентировано от вершины;} \\ -1, & \text{если ребро } j \text{ присоединено к вершине } i \text{ и ориентировано к этой вершине;} \\ 0, & \text{если ребро } j \text{ не соединено с вершиной } i. \end{cases}$$

Получим матрицу инциденций для орграфа рис.1в, имеющего $U=4$, $\ell=6$. Введем для наглядности обозначение строк и столбцов матрицы инциденций:

$$[A_\alpha] = \begin{array}{c|cccccc} \text{вершины} & & & & & & \\ \text{графа} & & & & & & \\ \hline & a & b & c & d & e & f \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ребра} \\ \text{графа} \end{array}$$

Свяжем с каждым ребром графа ток соответствующей ветви, направление которого совпадает с направлением ребра. Запишем эти токи в виде матрицы-столбца $[J_b]$ размера $\rho \times 1$ (токов столько же, сколько и ветвей). Токи в матрице $[J_b]$ нумеруем в той же последовательности, в какой пронумерованы столбцы в матрице инцидентий. Матрицу $[J_b]$ удобно записать в виде транспонированной матрицы

$$[J_b] = [i_a \ i_b \ i_c \ i_d \ i_e \ i_f]^t,$$

где индекс t означает транспонирование.

Строки матрицы $[A]_\alpha$ содержат информацию о ветвях, принадлежащих, или, как говорят, инцидентных соответствующим вершинам. В соответствии с первым законом Кирхгофа алгебраическая сумма токов ветвей, инцидентных данной вершине, равна нулю. Следовательно, произведение матрицы $[A_\alpha]$ на вектор токов ветвей $[J_b]$ равно нулевой матрице

$$[A_\alpha] \cdot [J_b] = [0]. \quad (3)$$

Это уравнение выражает I-й закон Кирхгофа (ЗТК) в матричной форме. Действительно, подставим в (3) матрицы $[A_\alpha]$ и $[J_b]$ для орграфа на рис. 1в

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Развернув это выражение, произведя умножение матриц, получим уравнения, выражающие ЗТК для всех вершин графа на рис. 1в

$$\begin{cases} -i_a + i_c + i_e = 0, \\ i_a + i_b - i_f = 0, \\ -i_b - i_d - i_e = 0, \\ -i_c + i_d + i_f = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Матрица $[A_\alpha]$ полностью определяет оргграф, ибо зная матрицу инциденций, можно получить соответствующий этой матрице оргграф. Основное свойство матрицы инциденций $[A_\alpha]$ заключается в том, что каждый столбец этой матрицы содержит два элемента, отличных от нуля, причем один из этих элементов равен -1 , а второй $+1$. Это свойство является следствием того, что каждое ребро соединено с двумя вершинами и ориентировано от одной вершины к другой. Следовательно, элементы любой строки матрицы $[A_\alpha]$ могут быть определены через элементы других строк. Другими словами, любая строка может быть вычеркнута из матрицы $[A_\alpha]$. Полученную матрицу с вычеркнутой строкой называют упрощенной матрицей инциденций и обозначают $[A]$. Размер матрицы $[A]$ равен $(U-1) \times \rho = N \times \rho$. Первый закон Кирхгофа с использованием упрощенной матрицы инциденций принимает вид

$$[A][J_e] = [0] \quad (5)$$

Развернув это матричное соотношение, получим $N = (U-1)$ независимых уравнений по I-му закону Кирхгофа.

1.3. Понятие сечения. Правило построения независимых сечений

Вернемся к оргграфу на рис. 1в и уравнениям (4). Сложим некоторые из этих уравнений, например, первое и второе. Тогда получим

$$i_c + i_b + i_e - i_f = 0.$$

В этом уравнении речь идет о ветвях c, b, e, f . Если удалить эти ветви из графа, то граф распадется на две части, причем узлы 1 и 2 будут в одной части, а узлы 3 и 4 - в другой. Если разрезать ветви c, b, e, f в графе замкнутой поверхностью, которую называют сечением (разрезом), а затем удалить инцидентные этому сечению ветви, то граф распадается на две части - рис. 5.

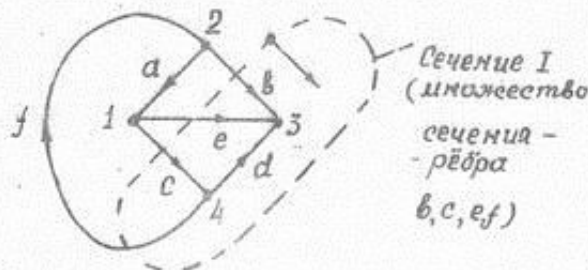


Рис. 5

Некоторое подмножество ветвей связного графа называют множеством сечения (разреза), если, во-первых, удаление всех ветвей множества превращает оставшийся граф в несвязанный и, во-вторых, удаление всех ветвей множества, кроме одной ветви, превращает оставшийся граф в связанный. Действительно, если удалить из множества сечения I в рассматриваемом примере все ветви множества сечения, кроме одной, например, ветви b , то оставшийся подграф будет связанным.

Последнее утверждение можно истолковать так: полный ток, пересекающий сечение I в направлении стрелки, показанной на рис. 5, равен нулю. Это положение хорошо известно и является обобщением I-го закона Киргофа для некоторой поверхности. Очевидно, рассмотренный граф имеет несколько сечений. Некоторые из сечений показаны на рис. 6а.

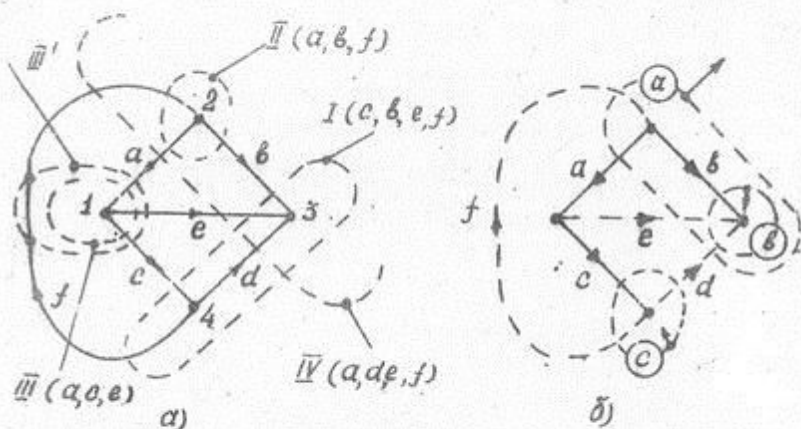


Рис. 6

В скобках указаны соответствующие каждому сечению множества сечения.

Заметим, что если ветвь графа пересекается сечением четное число раз, то она не является инцидентной этому сечению. Инцидентная сечению ветвь может пересекаться им лишь нечетное число раз. Действительно, если на рис. 6а представить сечение \bar{III} в виде \bar{III}' , то, казалось бы, ветвь f будет принадлежать сечению \bar{III} . Но это не так: ветвь пересекается сечением \bar{III}' 2 раза, поэтому не является инцидентной этому сечению.

Некоторые из указанных на рис. 6а множества сечения представляют множества ветвей, соединенных с узлом, например, множества разреза, принадлежащих сечениям II и III. Говорят, что совокупность ветвей, ин-

идентных некоторой вершине графа, образует множество сечения, а такое сечение называется центральным.

Для каждого сечения можно записать уравнение ЗТК. Таким образом, можно записать столько уравнений ЗТК, сколько имеется сечений. Полноту и независимость уравнений ЗТК обеспечивает надлежащий выбор совокупности независимых сечений. Оказывается, независимые сечения могут быть образованы с помощью дерева. Установим способ образования независимых сечений на примере графа - рис.6а. Одно из деревьев этого графа показано на рис.6б сплошными линиями. Строим сечения так, чтобы каждое сечение пересекало только одну ветвь дерева. Это всегда возможно, т.к. ветви дерева не образуют контуров. Получаем три независимых сечения, обозначения и направления которых отождествляются с обозначениями и направлениями соответствующих ветвей дерева. Так, например, сечение α имеет то же самое направление, как и ветвь дерева - стрелка. Каждое независимое сечение пересекает также некоторую совокупность хорд, которые совместно с ветвью дерева образуют множество разрезов для каждого независимого сечения. Так как каждое из сечений охватывает различные совокупности вершин графа, то все эти сечения являются независимыми. Их число равно числу ветвей дерева, т.е. число независимых сечений N можно определить по формуле (I).

1.4. Матрица сечений $[L]$, Первый закон Кирхгофа с использованием матрицы сечений

Матрицу сечений $[L]$ получают по правилу, аналогичному для матрицы инцидентий. Ее строки соответствуют независимым сечениям, а столбцы - ветвям графа, так что размер матрицы сечений равен $N \times P$ и совпадает с размером упрощенной матрицы инцидентий $[A]$. Элемент

- ij матрицы сечений $[L]$ равен
- +1, если j -я ветвь инцидентна i -му сечению и направлена в ту же сторону, что и i -ое сечение;
 - 1, если j -я ветвь инцидентна i -му сечению и направлена в сторону, противоположную i -му сечению;
 - 0, если j -я ветвь неинцидентна i -му сечению.

Так для графа на рис.6б с выбранными независимыми сечениями получаем

$$[L] = \begin{matrix} \text{сечения} & \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon & \zeta \end{matrix} & \leftarrow & \text{ветви} \\ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & & \end{matrix} \quad (6)$$

Строка матрицы сечений $[\Pi]$ содержит информацию о ветвях, инцидентных соответствующим сечениям. Образует матрицу-столбец токов ветвей, причем токи в этой матрице расположим в том же порядке, что и столбцы в матрице $[\Pi]$

$$[\mathcal{Y}_g^t] = [i_a \ i_b \ i_c \ i_d \ i_e \ i_f]^t,$$

где индекс "t" означает транспонирование. В соответствии с I законом Кирхгофа алгебраическая сумма токов ветвей, инцидентных данному сечению, равна нулю. Следовательно, произведение вектор-строки матрицы сечений $[\Pi]$ на вектор-столбец токов ветвей $[\mathcal{Y}_g]$ также равно нулю (или точнее, нулевой матрице)

$$[\Pi] \cdot [\mathcal{Y}_g] = [0]. \quad (7)$$

Формула (7) выражает I-й закон Кирхгофа с использованием матрицы независимых сечений. Вернемся к полученной матрице (6); в этой матрице столбцы пронумерованы таким образом, что в своей последовательности они соответствуют сначала всем ветвям дерева графа на рис. 6б, а затем располагаются столбцы, соответствующие хордам. Строки матрицы (6), соответствующие независимым сечениям, пронумерованы в той же последовательности, что и ее первые 3 столбца. Нетрудно видеть, что при таком расположении строк и столбцов матрицы (6) ее можно разбить на 2 подматрицы

$$[\Pi] = [I, \mathcal{X}], \quad (8)$$

где

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{— единичная квадратная матрица}$$

порядка $N \times N$;

$$[\mathcal{X}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{— матрица с размерностью } N \times M$$

(M .. число хорд в графе). Матрица $[\mathcal{X}]$, называемая матрицей сечений для хорд, полностью определяет матрицу сечений $[\Pi]$. Если известны матрица $[\mathcal{X}]$, то матрицу $[\Pi]$ можно получить, дополнив $[\mathcal{X}]$ единичной квадратной подматрицей в соответствии с выражением (8). Заметим, что в общем случае строки и столбцы матрицы $[\Pi]$ могут быть пронумерованы произвольным образом и выражение (8) в общем случае неспределимо.

Запишем теперь I-й закон Кирхгофа (7) с учетом выражения (8). В этом случае матрицу-столбец токов ветвей $[J_B]$ необходимо разбить на 2 подматрицы

$$[J_B] = \begin{bmatrix} J_A \\ J_x \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $[J_A] = [i_a \ i_b \ i_c]^t$ - матрица-столбец токов, протекающих в ветвях дерева, $[J_x] = [i_d \ i_e \ i_f]^t$ - матрица-столбец токов, протекающих в хордах. Подставляя в (7) выражения (8) и (9), получим

$$[1, x] \cdot \begin{bmatrix} J_A \\ J_x \end{bmatrix} = [0].$$

Выполнив умножение матриц с учетом $[1][J_A] = [J_A]$, получим

$$[J_A] = -[x][J_x]. \quad (10)$$

Полученное выше соотношение, называемое первым топологическим уравнением, устанавливает связь между токами в ветвях дерева и токами в хордах.

1.5. Методы контуров. 2-й закон Кирхгофа с использованием матрицы контуров

Матрица контуров обозначается $[B_a]$ и определяется так: каждая строка матрицы $[B_a] = [b_{ij}]$ соответствует контуре графа, а каждый из l столбцов - ориентированному ребру графа. Для каждого контура выбирается произвольное направление обхода. Элементы матрицы b_{ij} равны

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } j \text{ содержится в контуре } i \text{ и их направления совпадают;} \\ -1, & \text{если ребро } j \text{ содержится в контуре } i, \text{ но их направления противоположны;} \\ 0, & \text{если ребро } j \text{ не содержится в контуре } i. \end{cases}$$

Проиллюстрируем составление матрицы контуров на следующем примере. На рис. 7 изображен оргграф, в котором имеется 3 контура. Матрица контуров для этого графа имеет вид

контура		a	b	c	d	e	←	ветви	
$[B_a]$	=	1	2	3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$				

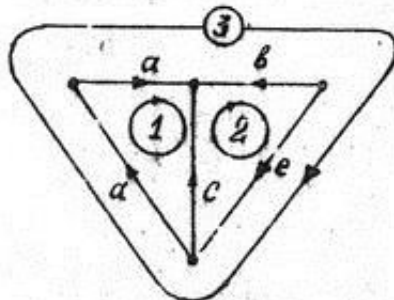


Рис. 7

Будем считать, что ориентация каждого ребра графа совпадает с условным направлением отсчета напряжения на элементе, который заменяется ребром. Запишем напряжения на элементах и соответственно в ветвях графа в виде матрицы-столбца $[V_b]$ размера $\ell \times 1$, причем располагаем строки матрицы $[V_b]$ в том же порядке, что и столбцы матрицы $[B_a]$

$$[V_b] = [U_a \ U_b \ U_c \ U_d \ U_e]^t$$

Каждая строка матрицы $[B_a]$ дает информацию о числе ребер, инцидентных данному контуру. Возьмем произведение матриц $[B_a] \cdot [V_b]$ и приравняем их нулевой матрице-столбцу; тогда получим выражение для 2-го закона Кирхгофа (ЗНК)

$$[B_a] \cdot [V_b] = [0]. \quad (11)$$

Развернем это матричное уравнение, подставив в него соответствующие матрицы для орграфа на рис. 7. Тогда получим

$$\begin{cases} U_a - U_c + U_d = 0, \\ -U_b + U_c + U_e = 0, \\ U_a - U_b + U_d + U_e = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Полученные уравнения выражают 2-й закон Кирхгофа для контуров 1, 2 и 3 соответственно (рис. 7). Легко видеть, что каждое из уравнений в системе (12) может быть получено путем сложения или вычитания двух остальных, следовательно, для графа на рис. 7 нет необходимости записывать уравнения ЗНК для всех контуров. Другими словами, стоит вопрос о том, как систематизированным образом выбирать независимые контуры в графе. Рассмотрим 2 способа образования независимых контуров с помощью дерева графа.

1-й способ. Выбирается дерево графа и затем поочередно добавляются хорды. Любой контур, образуемый добавлением новой хорды, является независимым, т.к. он отличается от предыдущих контуров новой ветвью. Следовательно, число независимых контуров равно числу хорд. Число независимых контуров m можно подсчитать по формуле (2).

Обрезаем независимые контуры для графа на рис.7; одно из деревьев этого графа показано на рис.8. Добавляем к дереву сначала хорду c и обрезаем контур 1, а затем хорду e и обрезаем контур 2, причем ориентацию полученных независимых контуров 1 и 2 выбираем произвольно. Матрица независимых контуров $[B]$ для этого примера имеет вид

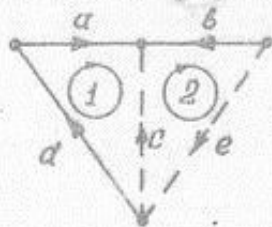


Рис.8

$$[B] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & c & b & e & d \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2-й способ. Обрезаем систему независимых так называемых основных контуров: выбираем дерево графа и добавляем к дереву одну хорду, обрезаю при этом 1-й контур. В отличие от первого способа, когда образованный 1-й контур ориентируется произвольно, основной контур ориентируется в направлении той хорды, с помощью которой он образован. Эта операция повторяется для второй хорды: второй контур образуется некоторой совокупностью ветвей дерева и одной хордой; ориентация второго контура снова выбирается совпадающей с ориентацией хорды и т.д. Таким образом, основные контуры образуются одной и только одной хордой и некоторой совокупностью ветвей дерева, а ориентация основных контуров совпадает с ориентацией той хорды, с помощью которой образован тот или иной контур. Рассмотрим процесс образования основных контуров на примере. Пусть имеется граф -- рис.9а. Требуется образовать

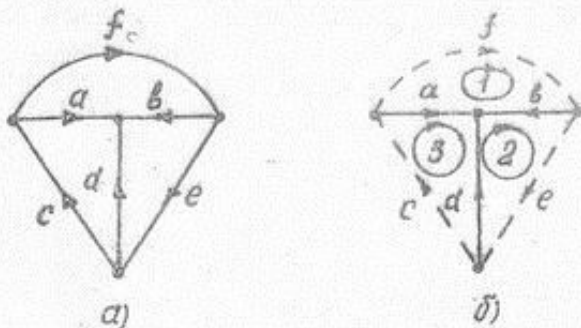


Рис.9

систему основных контуров. Одно из деревьев графа показано на рис. 9б. Добавляя к дереву последовательно хорды f , e и c , образуем соответственно основные контуры 1, 2 и 3, ориентируя эти контуры в направлении хорд f , e и c .

Введем матрицу основных контуров и обозначим ее $[B_f]$. Матрицу $[B_f]$ составляют по следующему правилу: столбцы этой матрицы соответствуют сначала хордам, а затем ветвям дерева; строки матрицы располагаются так, что 1-ая строка соответствует контуру, хорда которого определяет 1-й столбец, вторая строка соответствует контуру, хорда которого определяет второй столбец и т.д. Составим матрицу $[B_f]$ для графа на рис. 9.

$$[B_f] = \begin{array}{c|ccccccc} \text{контуры} & f & e & c & \alpha & \beta & \gamma & \leftarrow \text{ветви} \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

Из структуры матрицы $[B_f]$ видно, что каждый основной контур образован одной и только одной хордой и двумя или большим числом ветвей дерева. Матрицу $[B_f]$ всегда можно разбить на две подматрицы

$$[B_f] = [1, B_{12A}], \quad (13)$$

где $[1]$ — единичная квадратная матрица размера $m \times m$ (m — число независимых контуров в графе), $[B_{12A}]$ — подматрица размера $m \times N$ (N — число ветвей дерева).

1.6 Компонентные уравнения

Пусть электрическая цепь состоит из

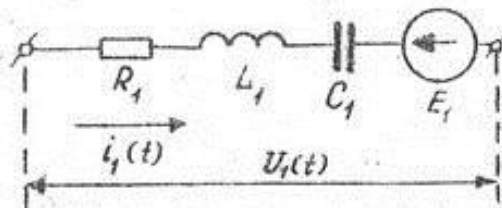


Рис. 10

ℓ ветвей, представляющих собой последовательное соединение источника напряжения E_1 и последующего двух полюсника, состоящего в общем случае из сопротивления R_1 , емкости C_1 и индуктивности L_1 — рис. 10. ЗНК для этой ветви запишем в виде

$$U_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1(t) dt + E_1.$$

Уравнение такого вида будем называть компонентным уравнением. Обозначив операцию дифференцирования как $p = d/dt$, а операцию интегрирования как $\frac{1}{p} = \int dt$, запишем компонентное уравнение в виде

$$U_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1 p i_1 + \frac{1}{C_1} \cdot \frac{1}{p} i_1 + E_1.$$

Так как электрическая цепь содержит ℓ ветвей, то получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} U_1 = R_1 i_1 + L_1 p i_1 + \frac{1}{C_1} \cdot \frac{1}{p} i_1 + E_1, \\ U_2 = R_2 i_2 + L_2 p i_2 + \frac{1}{C_2} \cdot \frac{1}{p} i_2 + E_2, \\ \dots \\ U_\ell = R_\ell i_\ell + L_\ell p i_\ell + \frac{1}{C_\ell} \cdot \frac{1}{p} i_\ell + E_\ell. \end{cases}$$

Запишем эту систему уравнений в матричном виде

$$[V_\ell] = [R_\ell][\mathcal{I}_\ell] + [L_\ell]p[\mathcal{I}_\ell] + \left[\frac{1}{C_\ell}\right] \cdot \frac{1}{p} [\mathcal{I}_\ell] + [E_\ell]. \quad (14)$$

В уравнении (14) введены следующие обозначения:

$[V_\ell] = [U_1, U_2, \dots, U_\ell]^t$ - матрица-столбец (или вектор) напряжений ветвей; размер этой матрицы $\ell \times 1$;

$[\mathcal{I}_\ell] = [i_1, i_2, \dots, i_\ell]^t$ - матрица-столбец (или вектор) токов ветвей; размер матрицы $\ell \times 1$;

$[E_\ell] = [E_1, E_2, \dots, E_\ell]^t$ - матрица-столбец (или вектор) заданных напряжений ветвей; размер матрицы $\ell \times 1$;

$$[R_\ell] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & R_\ell \end{bmatrix}, \quad [L_\ell] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & L_\ell \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{C_2} \end{bmatrix} = [D_\ell] = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{C_\ell} \end{bmatrix}.$$

Последние 3 матрицы являются квадратными диагональными матрицами размера $\ell \times \ell$ и называются соответственно матрицей сопротивлений ветвей, матрицей индуктивностей ветвей и матрицей величин, обратных емкостям ветвей. Последнюю матрицу $[D_\ell]$ называют иногда матрицей "эластансов".

Полученная система уравнений (I4) является системой интегродифференциальных компонентных уравнений. Рассмотрим, как изменятся эти уравнения для линейной электрической цепи в синусоидальном установившемся режиме. В этом случае оператор дифференцирования ρ равен $\rho = j\omega$, а оператор интегрирования $-\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{j\omega}$. С учетом этого интегродифференциальная система компонентных уравнений приводится к виду

$$[V_\ell] = [\tilde{X}_\ell] \cdot [I_\ell] + [E_\ell], \quad (I6)$$

где матрицы-столбцы (многомерные векторы) $[V_\ell]$, $[I_\ell]$, $[E_\ell]$ размера $\ell \times 1$ сохраняют свой вид, а квадратная матрица $[\tilde{X}_\ell]$ размера $\ell \times \ell$, которая называется матрицей сопротивлений ветвей, записывается в форме

$$[\tilde{X}_\ell] = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{x}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \tilde{x}_\ell \end{bmatrix}; \quad (I7)$$

Матрица $[\tilde{X}_\ell]$ для компонентных уравнений рассматриваемого типа является диагональной матрицей, т.к. только элементы ее главной диагонали отличны от нуля. Диагональные элементы представляют собой комплексные сопротивления ветвей.

$$\tilde{x}_1 = R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1},$$

$$\tilde{x}_2 = R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2},$$

.....

$$\tilde{z}_\ell = R_\ell + j\omega L_\ell + \frac{1}{j\omega C_\ell}$$

Пусть теперь каждая из ℓ ветвей электрической цепи представляет собой параллельное соединение пассивных элементов (резисторов, емкостей и индуктивностей) и идеального независимого источника тока - рис. II.

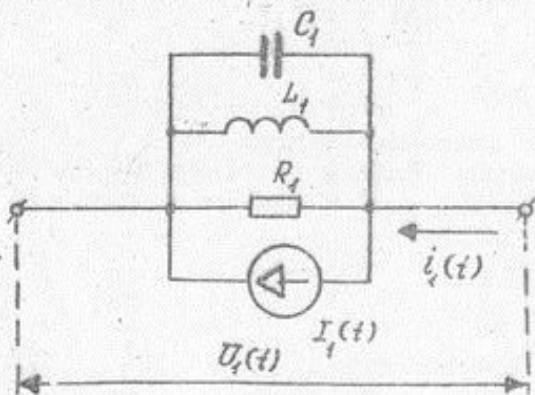


Рис. II

Тогда ток $i_1(t)$ первой ветви равен

$$i_1(t) = \frac{1}{R_1} U_1(t) + C_1 \frac{dU_1(t)}{dt} + \frac{1}{L_1} \int U_1(t) dt + I_1(t)$$

Для ℓ ветвей запишем систему интегро-дифференциальных компонентных уравнений.

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{R_1} U_1 + C_1 p U_1 + \frac{1}{L_1} \frac{1}{p} U_1 + I_1, \\ i_2 = \frac{1}{R_2} U_2 + C_2 p U_2 + \frac{1}{L_2} \frac{1}{p} U_2 + I_2, \\ \dots \\ i_\ell = \frac{1}{R_\ell} U_\ell + C_\ell p U_\ell + \frac{1}{L_\ell} \frac{1}{p} U_\ell + I_\ell, \end{cases}$$

где, как и ранее, p - оператор дифференцирования, $1/p$ - оператор интегрирования. Эту систему компонентных уравнений записываем в матричном виде в следующей компактной форме:

$$[Y_b] = [G_b][V_b] + [C_b] \cdot p[V_b] + [L_b] \cdot \frac{1}{p}[V_b] + [I_b]. \quad (18)$$

Использованные при записи уравнения (18) матрицы-столбцы $[Y_b]$ и $[V_b]$ имеют точно такой же вид, как при записи системы уравнений (14). Матрица $[I_b]$ имеет размер $\ell \times 1$ и называется матрицей заданных независимых источников тока ветвей.

$$[I_b] = [I_1, I_2, \dots, I_\ell]^t.$$

Квадратные диагональные матрицы размера $\ell \times \ell$ называется соответственно матрицей активных проводимостей ветвей, матрицей емкостей ветвей и матрицей величин, обратных индуктивностям ветвей.

$$[G_b] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{R_\ell} \end{bmatrix}, \quad [C_b] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_\ell \end{bmatrix},$$

$$[L_b] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{1}{L_\ell} \end{bmatrix}.$$

Систему интегро-дифференциальных компонентных уравнений (18) для синусоидального установившегося режима можно представить в виде

$$[Y_b] = [Y_b][V_b] + [I_b], \quad (19)$$

где $[Y_b]$ - матрица проводимостей ветвей, являющаяся квадратной диагональной матрицей размера $\ell \times \ell$:

$$[Y_g] = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Y_p \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Диагональные элементы матрицы $[Y_g]$ - сумма комплексных проводимостей ветвей.

$$Y_1 = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1},$$

$$Y_2 = \frac{1}{R_2} + j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2},$$

$$Y_p = \frac{1}{R_p} + j\omega C_p + \frac{1}{j\omega L_p}.$$

Матрицы-столбцы $[X_g]$, $[V_g]$ и $[I_g]$ в компонентном уравнении (19) имеют тот же вид, что и в уравнении (18).

Сделаем относительно полученных компонентных уравнений (16) и (19) два замечания.

1. Пока рассматривали ветви без взаимной индукции. В этом случае матрица сопротивлений (17) и матрица проводимостей (20) являются диагональными матрицами. При наличии взаимной индукции матрицы $[X_g]$ и $[Y_g]$ станут недиагональными, но симметричными. Примеры цепей с взаимной индукцией будут рассмотрены ниже.

2. Рассматривали ветви без зависимых источников. При наличии зависимых источников матрицы $[X_g]$ и $[Y_g]$ станут несимметричными. Покажем это; для этого рассмотрим электрическую цепь из трех ветвей - рис. 12 - одна из которых (ветвь № 2) включает в себя зависимый источник напряжений $R_0 i_3$, управляемый током третьей ветви. нас не интересует, как эти три ветви соединены между собой, поэтому ветви нарисованы отдельно.

Компонентные уравнения для этих ветвей имеют вид

$$U_1 = Z_1 i_1,$$

$$U_2 = Z_2 i_2 + R_0 i_3,$$

$$U_3 = Z_3 i_3,$$

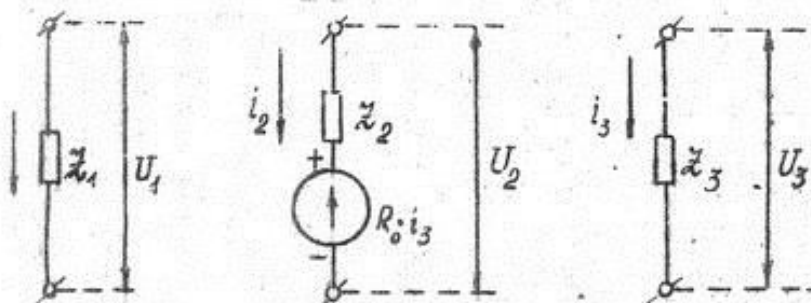


Рис. 12

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & R_0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}.$$

В этом случае матрица сопротивлений ветвей $[z_g]$ является недиагональной и несимметричной. Наличие члена R_0 во второй строке и третьем столбце матрицы $[z_g]$ означает, что во второй ветви включен зависимый источник напряжения, управляемый током третьей ветви.

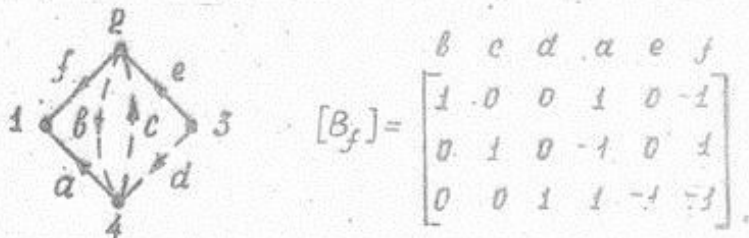
РАЗДЕЛ 2

МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Метод контурных или, как его иногда называют, "фиктивных" токов — один из основных методов расчета электрических цепей. Этот метод заключается в том, что вместо токов в ветвях, имеющих простой физический смысл, определяются на основании 2-го закона Кирхгофа так называемые контурные токи, замыкающиеся в контурах. Таких токов, вообще говоря, нет, и в этом смысле контурные токи — токи "фиктивные".

2.1. Связь между токами в ветвях и контурными токами в матричной форме

Для установления этой связи воспользуемся матрицей основных контуров $[B_f]$. Вообще говоря, могли бы воспользоваться любой матрицей контуров, строки которой соответствуют независимым контурам. Связь между токами в ветвях и контурными токами установим на примере графа, показанного на рис.13. Пусть $afce$ — дерево этого графа. Тогда матрица основных контуров имеет вид



$$[B_f] = \begin{matrix} & b & c & d & a & e & f \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Рис.13

Каждый столбец этой матрицы указывает на совокупность контуров схемы, проходящих через данную ветвь. Через хорды проходит только по одному контуру, поэтому можно отождествлять токи в хордах с независимыми контурными токами. Читая матрицу $[B_f]$ по строкам, получим выражение для 2-го закона Кирхгофа. Но эту матрицу можно прочесть и по столбцам. Действительно, обозначим токи ветвей графа символами $i_a, i_b, i_c, i_d, i_e, i_f$, а контурные токи независимых контуров обозначим I_1, I_2, I_3 . Тогда можно ввести следующие обозначения строк и столбцов:

$$[B_f] = \begin{matrix} \text{контурные} \\ \text{токи} \downarrow \\ \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \end{matrix} \begin{matrix} i_e & i_c & i_d & i_a & i_e & i_f \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{токи ветвей} \\ i_e \\ i_c \\ i_d \\ i_a \\ i_e \\ i_f \end{matrix}$$

Путем чтения этой матрицы по столбцам получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 i_e &= \mathcal{J}_1, & i_a &= \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3, \\
 i_c &= \mathcal{J}_2, & i_e &= -\mathcal{J}_3, \\
 i_d &= \mathcal{J}_3, & i_f &= -\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3.
 \end{aligned}$$

Полученные соотношения устанавливают связь между токами в ветвях и контурными токами. В рассматриваемом примере имеется 3 независимых контурных тока, а токи в шести ветвях выражаются через 3 контурных тока. Токи в ветвях b, c, d при выбранном дереве и способе образования независимых контуров совпадают с контурными токами, а токи в остальных ветвях являются суперпозицией контурных токов. Например, ток в ветви a есть суперпозиция 3-х контурных токов - рис.14. Запишем полученные алгебраические уравнения в виде одного матричного соотношения. Для этого необходимо транспонировать матри-

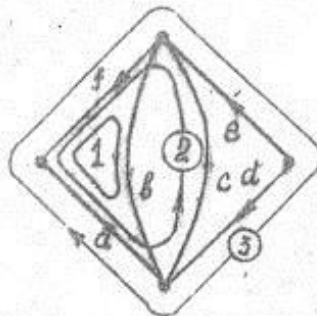


Рис.14

цу контуров и взять произведение матрицы $[B_f]^t$ на матрицу-столбец контурных токов $[\mathcal{J}_k]$, приравняв это произведение матрице-столбцу токов ветвей $[\mathcal{J}_b]$. Тогда получим, опустив индекс "f" в матрице контуров

$$[y_g] = [B]^t [y_k]. \quad (21)$$

В рассмотренном примере соотношение (21) имеет вид

$$\begin{bmatrix} i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_a \\ i_e \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Выполнив перемножение матриц, получим систему алгебраических соотношений.

2.2. Контурные уравнения

Возьмем компонентное уравнение ветви для синусоидального установившегося режима в форме (16). Подставим в это уравнение вместо матрицы токов ветвей $[y_g]$ ее выражение через матрицу токов контуров из (21). Тогда получим

$$[V_g] = [z_g] [B]^t [y_k] + [E_g].$$

Умножим это равенство слева на матрицу контуров $[B]$.

$$[B] \cdot [V_g] = [B] \cdot [z_g] [B]^t [y_k] + [B] [E_g].$$

В соответствии с законом ЭНК (11) произведение в левой части этого равенства равно нулю. Следовательно,

$$([B] [z_g] [B]^t) [y_k] = -[B] [E_g].$$

Введем следующие обозначения:

$$[Z] = [B] [z_g] [B]^t, \quad (22)$$

$$[E] = -[B] [E_g]. \quad (23)$$

Тогда последнее соотношение можно записать в виде

$$[Z] [y_k] = [E]. \quad (24)$$

Полученное уравнение (24) называется контурным уравнением. В этом уравнении матрица $[Z]$ - квадратная матрица размера $m \times m$, где m - число независимых контуров в графе. В общем виде матрица $[Z]$, называемая матрицей сопротивления электрической цепи, записывается так:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \dots & Z_{mm} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Элементы этой матрицы, как видно из выражения (22), являются линейными комбинациями сопротивлений ветвей. Матрицу-столбец (23) записываем в виде транспонированной матрицы.

$$[E] = [E_1, E_2, \dots, E_m]^t \quad (26)$$

Эта матрица называется матрицей заданных напряжений, а ее элементы служат линейные комбинации заданных напряжений ветвей. Матрицы $[Z]$ и $[E]$ для данной системы независимых контуров определяются значениями параметров ветвей, которые считаются известными. Решая уравнение (24) относительно матрицы-столбца контурных токов, получим значения токов в хордах. Это решение получается умножением обеих частей уравнения (24) на обратную матрицу $[Z]^{-1}$.

$$[Z]^{-1} \cdot [Z][I_k] = [Z]^{-1}[E].$$

Поскольку произведение $[Z]^{-1} \cdot [Z]$ равно единичной матрице, а, в свою очередь, произведение $[I][I_k] = [I_k]$, то получаем решение матричного уравнения (24) в виде

$$[I_{\text{хорд}}] = [I_k] = [Z]^{-1}[E]. \quad (27)$$

Рассмотрим свойства матрицы $[Z]$. Покажем, что матрица $[Z]$ схемы, составленной из двух полусхем элементов - рис. 10, симметрична относительно главной диагонали, т.е. $Z_{ks} = Z_{sk}$. Для этого транспонируем обе части соотношения (22), отчего это равенство не нарушится. При транспонировании произведения матриц, как известно, нужно транспонировать каждую матрицу отдельно и записать произведение в обратном порядке; дважды транспонированная матрица равна исходной. Поэтому

$$[Z]^t = [B][Z_3]^t[B]^t.$$

Но $[\tilde{x}_g]^t = [\tilde{x}_g]$, т.к. матрицы сопротивлений ветвей (17) без зависимых источников и элементов со взаимной индукцией является диагональной и не изменяется при транспонировании. Следовательно, $[\tilde{x}]^t = [\tilde{x}]$, что указывает на то, что при перестановке строк и столбцов матрица $[\tilde{x}]$ не изменяется, следовательно, она симметрична.

Рассмотрим физический смысл элементов матрицы $[\tilde{x}]$ и покажем, что эти элементы действительно являются линейными комбинациями сопротивлений ветвей. Перемножим первые две матрицы в правой части соотношения (22), имея в виду, что типичным элементом матрицы $[B]$ является элемент b_{ij} , который для конкретного графа принимает значения +1, 0 или -1.

$$[B][\tilde{x}_g] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kl} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ml} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{x}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{x}_k \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \tilde{x}_l \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}\tilde{x}_1 & b_{12}\tilde{x}_2 & \dots & b_{1l}\tilde{x}_l \\ b_{21}\tilde{x}_1 & b_{22}\tilde{x}_2 & \dots & b_{2l}\tilde{x}_l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1}\tilde{x}_1 & b_{k2}\tilde{x}_2 & \dots & b_{kl}\tilde{x}_l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}\tilde{x}_1 & b_{m2}\tilde{x}_2 & \dots & b_{ml}\tilde{x}_l \end{bmatrix}$$

Рассмотрим, как получается диагональный элемент \tilde{x}_{kk} матрицы $[\tilde{x}]$. Этот элемент получается в результате умножения k -ой строки произведения $[B][\tilde{x}_g]$ на k -ый столбец матрицы $[B]^t$, т.е.

$$\tilde{x}_{kk} = [b_{k1}\tilde{x}_1, b_{k2}\tilde{x}_2, \dots, b_{kl}\tilde{x}_l] \cdot \begin{bmatrix} b_{k1} \\ \dots \\ b_{kl} \end{bmatrix} = \\ = b_{k1}^2 \tilde{x}_1 + b_{k2}^2 \tilde{x}_2 + \dots + b_{kl}^2 \tilde{x}_l = \sum_{i=1}^{i=l} b_{ki}^2 \tilde{x}_i$$

В этом выражении индекс "k" - номер контура, индекс "i" - номер ветви. Величина b_{ki} отлична от нуля только для значений i , соответствующих ветвям, входящим в k -ый контур. Следовательно, сопротивление \tilde{x}_{kk} равно сумме сопротивлений ветвей, входящих в k -ый

контур. Величина \tilde{z}_{kk} называется собственным сопротивлением k -го контура и всегда положительна, поскольку $b_{ki}^2 > 0$.

Рассуждая аналогично, можно написать выражение для элемента \tilde{z}_{ks} , расположенного на пересечении k -ой строки и s -го столбца матрицы $[Z]$.

$$\tilde{z}_{ks} = b_{ki} b_{si} \tilde{z}_i + b_{k2} b_{s2} \tilde{z}_2 + \dots + b_{kl} b_{sl} \tilde{z}_l = \sum_{i=1}^{i=l} b_{ki} b_{si} \tilde{z}_i.$$

Произведение $b_{ki} b_{si}$ отлично от нуля только для значений i , которые соответствуют ветвям, входящим одновременно в k -ый и s -ый контуры, причем оно равно $+1$, если контуры в данной ветви направлены одинаково, и -1 , если контуры направлены противоположно. Следовательно, элемент \tilde{z}_{ks} равен сумме сопротивлений ветвей, общих для k -го и s -го контуров. Элемент \tilde{z}_{kk} называется взаимным сопротивлением k -го и s -го контуров.

Рассмотрим теперь физический смысл элементов матрицы $[E]$ для этого перемножим матрицу в правой части соотношения (23).

$$[E] = -[B][E_B] = - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kl} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_k \\ \dots \\ E_l \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} b_{11} E_1 + b_{12} E_2 + \dots + b_{1l} E_l \\ b_{21} E_1 + b_{22} E_2 + \dots + b_{2l} E_l \\ \dots \\ b_{k1} E_1 + b_{k2} E_2 + \dots + b_{kl} E_l \\ \dots \\ b_{m1} E_1 + b_{m2} E_2 + \dots + b_{ml} E_l \end{bmatrix}.$$

Таким образом, k -я строка матрицы $[E]$ имеет вид

$$E_k = -(b_{k1} E_1 + b_{k2} E_2 + \dots + b_{kl} E_l) = - \sum_{i=1}^{i=l} b_{ki} E_i.$$

Поскольку k -я строка матрицы $[B]$ указывает на совокупность принадлежащих k -ому контуру ветвей с учетом их направлений относительно направления контура, то k -ая строка матрицы $[E]$ равен алгебра-

ической сумме заданных напряжений ветвей, принадлежащих K -му контуру. Знак минус перед знаком суммы в последнем выражении учитывает тот факт, что принятое условное положительное направление напряжения и Э.Д.С. не независимом источнике напряжения противоположны.

Запишем теперь контурные уравнения в алгебраическом виде, подставив в (24) выражения для соответствующих матриц. Выполним перемножение матриц, получим систему линейных алгебраических контурных уравнений для синусоидального установившегося режима.

$$\begin{cases} \dot{X}_{11} J_1 + \dot{X}_{12} J_2 + \dots + \dot{X}_{1m} J_m = E_1, \\ \dot{X}_{21} J_1 + \dot{X}_{22} J_2 + \dots + \dot{X}_{2m} J_m = E_2, \\ \dots \\ \dot{X}_{m1} J_1 + \dot{X}_{m2} J_2 + \dots + \dot{X}_{mm} J_m = E_m. \end{cases} \quad (28)$$

Для не очень сложных линейных электрических цепей контурные уравнения (28) можно записывать, не прибегая к матричной форме (24) этих уравнений. При записи контурных уравнений по виду электрической цепи необходимо придерживаться следующих правил:

1. Величины E_k ($k=1, 2, \dots, m$) в правой части системы уравнений (28) — алгебраические суммы Э.Д.С., действующих в k -ом контуре, причем Э.Д.С., совпадающие с направлением выбранного контурного тока, берутся со знаком плюс, в направлении встречно — со знаком минус.

2. Величина \dot{X}_{kk} — собственное сопротивление k -го контура; $\dot{X}_{kk} > 0$.

3. Величинам \dot{X}_{ks} — взаимные сопротивления контуров; \dot{X}_{ks} входит в систему уравнений (28) со знаком плюс, если направления контурных токов во взаимном сопротивлении совпадают, и входит со знаком минус, если направления контурных токов во взаимном сопротивлении противоположны. Рассмотрим пример. Для электрической цепи на рис. 15 составить систему контурных уравнений для синусоидального установившегося режима, выбираем произвольное направление контурных токов в

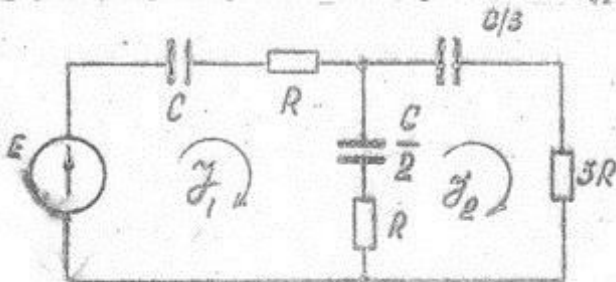


Рис. 15

двух независимых контурах. Запишем 2 контурных уравнения для независимых контуров, используя сформулированные выше правила составления контурных уравнений по виду электрической цепи.

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{j\omega C} + 2R \right) \mathcal{Y}_1 - \left(\frac{2}{j\omega C} + R \right) \mathcal{Y}_2 = E, \\ - \left(\frac{2}{j\omega C} + R \right) \mathcal{Y}_1 + \left(\frac{5}{j\omega C} + 4R \right) \mathcal{Y}_2 = 0. \end{cases}$$

Запишем теперь решение (27) системы линейных контурных уравнений в развернутом виде. Для этого определим обратную матрицу $[\mathcal{Z}]^{-1}$. Находим обратную матрицу $[\mathcal{Z}]^{-1}$ в три этапа.

1. Заменяем элементы матрицы $[\mathcal{Z}]$ алгебраическими дополнениями и получаем матрицу алгебраических дополнений.

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1m} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{m1} & \Delta_{m2} & \dots & \Delta_{mm} \end{bmatrix},$$

где Δ_{ik} - алгебраическое дополнение элемента \mathcal{Z}_{ik} определителя матрицы $[\mathcal{Z}]$, причем

$$\Delta_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik},$$

M_{ik} - минор элемента \mathcal{Z}_{ik} , который образуется из определителя системы исключением из него i -ой строки и k -го столбца;

2. Транспонируем матрицу алгебраических дополнений и получаем

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{m1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1m} & \Delta_{2m} & \dots & \Delta_{mm} \end{bmatrix}.$$

3. Разделив каждый элемент транспонированной матрицы алгебраических дополнений на определитель $\Delta_{\mathcal{Z}}$ исходной матрицы $[\mathcal{Z}]$, получим обратную матрицу.

$$[\mathcal{Z}]^{-1} = \frac{1}{\Delta_{\mathcal{Z}}} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{m1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1m} & \Delta_{2m} & \dots & \Delta_{mm} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Определитель $\Delta_{\mathcal{Z}}$ снабжен индексом " \mathcal{Z} ", т.к. его элементами являются комплексные сопротивления. Подставляя в решение системы кон-

турных уравнений обратную матрицу (29), а также матрицы $[Y_k]$ и $[E]$, получим решение в алгебраическом виде

$$\begin{cases} y_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_z} E_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta_z} E_2 + \dots + \frac{\Delta_{m1}}{\Delta_z} E_m, \\ y_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_z} E_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_z} E_2 + \dots + \frac{\Delta_{m2}}{\Delta_z} E_m, \\ y_m = \frac{\Delta_{1m}}{\Delta_z} E_1 + \frac{\Delta_{2m}}{\Delta_z} E_2 + \dots + \frac{\Delta_{mm}}{\Delta_z} E_m. \end{cases}$$

Сокращенно полученное решение можно записать так:

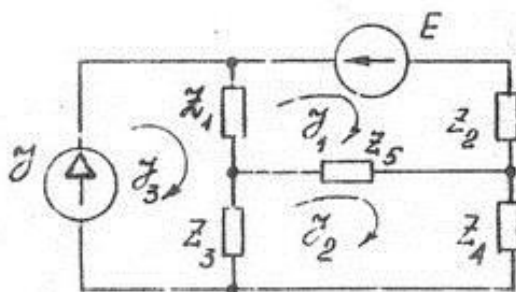
$$y_k = \frac{1}{\Delta_z} \sum_{i=1}^m E_i \cdot \Delta_{ik}. \quad (30)$$

Формула (30) выражает принцип суперпозиции для линейной электрической цепи: ток в любом контуре такой цепи может быть определен как алгебраическая сумма токов, вызываемых в этом контуре каждой из Э.Д.С. в отдельности.

2.3. Контурные уравнения для электрической цепи с источниками тока

Использованное для получения контурных уравнений компонентное уравнение (16) записано в предположении, что источниками электрической энергии являются независимые источники напряжения. Если в электрической цепи имеются независимые источники тока, обладающие конечным внутренним сопротивлением, то такие источники тока можно пересчитать в эквивалентные источники напряжения. Это легко сделать по известным формулам.

Если же в электрической цепи имеются источники тока с бесконечно большим внутренним сопротивлением, то применить формулы пересчета невозможно. Однако задача составления контурных уравнений в этом случае упрощается, поскольку можно выбрать токи источников тока в качестве контурных. Поскольку токи источников тока известны, то число неизвестных контурных токов, подлежащих определению, сократится на число имеющихся источников тока с бесконечно большим внутренним сопротивлением. Рассмотрим пример. Требуется составить систему контурных уравнений для электрической цепи, показанной на рис. 16. Цепь включает в себя источник тока J с бесконечно большим внутренним сопротивлением. Выбираем произвольно направления контурных токов в трех независимых контурах. Составляем 2 контурных уравнения для контуров I и 2.



$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2 + Z_5)J_1 - Z_5J_2 - Z_1J_3 = -E, \\ -Z_5J_1 + (Z_3 + Z_4 + Z_5)J_2 - Z_3J_3 = 0. \end{cases}$$

Рис. 16

Для определения неизвестных контурных токов J_1 и J_2 написанных уравнений вполне достаточно, поскольку контурный ток J_3 равен известному току источника J , т.е. $J_3 = J$.

2.4. Контурные уравнения для электрических цепей с зависимыми источниками

Рассмотрим методику составления контурных уравнений для конкретной цепи с зависимым источником. На рис. 17 представлена малосигнальная управленческая схема катодного повторителя на лампе с добавочной RC -цепочкой в катодной цепи. Эта схема включает в себя зависимый источник напряжения μU_g , управляемый напряжением U_g между сеткой и катодом. Предполагается, что сеточный ток равен нулю.

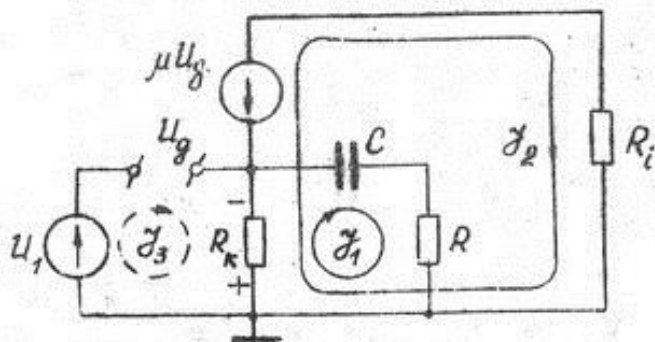


Рис. 17

Выбираем направление контурных токов, как показано на рис. 17. Вообще говоря, здесь имеется 3 независимых контура. Поскольку источник ток равен нулю, то и контурный ток в контуре 3 также равен нулю. Составляем 2 контурных уравнения, считая режим работы установившимся синусоидальным.

$$\begin{cases} (R_k + R + \frac{1}{j\omega C}) J_1 + R_k J_2 = 0, \\ R_k J_1 + (R_k + R_i) J_2 = -\mu U_g. \end{cases}$$

Выразим теперь напряжение зависимого источника μU_g через контурные токи J_1 и J_2 . Для этого запишем уравнение ЗИК для контура 3 с учетом указанной на рис. 17 полярности напряжения, создаваемого на сопротивлении R_k за счет протекания по этому сопротивлению контурных токов J_1 и J_2 .

$$U_g = U_i + (J_1 + J_2) R_k.$$

Подставляя U_g во второе контурное уравнение, приведем подобные члены, получим следующую систему контурных уравнений:

$$\begin{cases} (R_k + R + \frac{1}{j\omega C}) J_1 + R_k J_2 = 0, \\ R_k (1 + \mu) J_1 + [R_k (1 + \mu) + R_i] J_2 = -\mu U_i. \end{cases}$$

Это и есть искомая система контурных уравнений. Заметим, что в полученных уравнениях нет той симметрии, которая имелась при отсутствии зависимых источников. Другими словами, матрица $[Z]$ схемы с зависимым источником получилась несимметричной, о чем уже говорилось.

Наличие в электрической цепи зависимых источников не меняет существенно изложенный выше способ составления контурных уравнений. Появляется дополнительная задача - выразить напряжения или токи зависимых источников через контурные токи, что, как показывает рассмотренный пример, легко сделать.

2.5. Контурные уравнения электрических цепей с взаимной индукцией

Будем считать в общем случае, что все ветви электрической цепи включают в свой состав индуктивности, которые, в свою очередь, все связаны между собой, причем связь между k -ой и s -ой ветвями характеризуется сопротивлением взаимной индукции $Z_{ks}^M = j\omega M_{ks}$ (M_{ks} - коэффициент взаимной индукции). Индекс "M" означает наличие магнитной связи между индуктивностями. Тогда компонентные уравнения (16) запи-

$$\begin{cases} v_1 = \tilde{x}_{11} i_1 + \tilde{x}_{12}^M i_2 + \tilde{x}_{13}^M i_3 + \dots + \tilde{x}_{1l}^M i_l + E_1, \\ v_2 = \tilde{x}_{21}^M i_1 + \tilde{x}_{22} i_2 + \tilde{x}_{23}^M i_3 + \dots + \tilde{x}_{2l}^M i_l + E_2, \\ \dots \\ v_l = \tilde{x}_{l1}^M i_1 + \tilde{x}_{l2}^M i_2 + \tilde{x}_{l3}^M i_3 + \dots + \tilde{x}_{ll} i_l + E_l. \end{cases}$$

В матричной форме эта система запишется так:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12}^M & \dots & \tilde{x}_{1l}^M \\ \tilde{x}_{21}^M & \tilde{x}_{22} & \tilde{x}_{23}^M & \dots & \tilde{x}_{2l}^M \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{x}_{l1}^M & \tilde{x}_{l2}^M & \dots & \dots & \tilde{x}_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_l \end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$[\tilde{x}_b^M] = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12}^M & \dots & \dots & \tilde{x}_{1l}^M \\ \tilde{x}_{21}^M & \tilde{x}_{22} & \tilde{x}_{23}^M & \dots & \tilde{x}_{2l}^M \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{x}_{l1}^M & \tilde{x}_{l2}^M & \dots & \dots & \tilde{x}_{ll} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

где $[\tilde{x}_b^M]$ — матрица сопротивлений ветвей с взаимной индукцией.

Тогда получим компонентное уравнение цепи с взаимной индукцией в следующей форме:

$$[V_b] = [\tilde{x}_b^M][J_b] + [E_b]. \quad (32)$$

В этом уравнении матрица-столбец $[V_b]$, $[J_b]$ и $[E_b]$ имеют тот же вид, что и в компонентном уравнении (16). По своей структуре компонентное уравнение (32) совпадает с компонентным уравнением (16) для цепей без взаимной индукции, но в данном случае матрица сопротивлений ветвей $[\tilde{x}_b^M]$ уже не является диагональной. Ее элементами служат сопротивления ветвей и сопротивления взаимной индукции, причем так как $\tilde{x}_{ks}^M = \tilde{x}_{sk}^M$ матрица $[\tilde{x}_b^M]$ симметрична относительно главной диагонали. Обычно в электрических цепях, встречающихся на практике, индуктивная связь имеет место только между небольшим числом ветвей, поэтому многие взаимные индуктивности оказываются равными нулю.

Контурные уравнения для цепей с взаимной индукцией сохраняют свою форму, причем они могут быть составлены с использованием топологической матрицы контуров, а также и без ее использования, т.е. непосредственно по виду схемы.

Рассмотрим пример составления контурных уравнений с использованием топологической матрицы контуров для цепи с взаимной индукцией - рис.18.

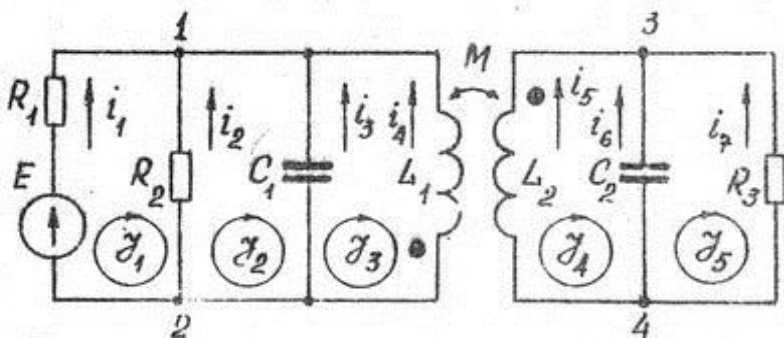


Рис.18

Граф цепи, одно из деревьев и независимые контуры показаны на рис.19.

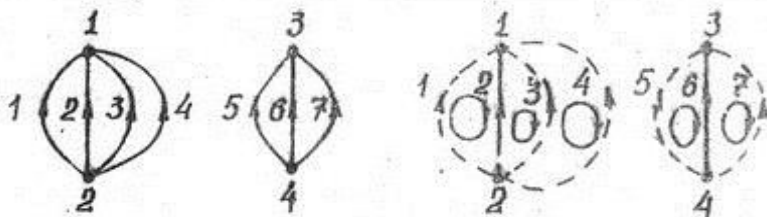


Рис.19

Составим матрицу независимых контуров $[B]$:
 контуры $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \leftarrow N \text{ ветви} \end{matrix}$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Составим матрицу $[\tilde{x}_{ij}^M]$. Для этого запишем компонентные уравнения, обратившись к рис.18.

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 \cdot i_1 - E, & v_5 &= sL_2 i_5 - sM i_4, \\ v_2 &= R_2 \cdot i_2, & v_6 &= \frac{1}{sC_2} \cdot i_6, \\ v_3 &= \frac{1}{sC_1} \cdot i_3, & v_7 &= R_3 \cdot i_7, \text{ где } s = j\omega. \\ v_4 &= sL_1 \cdot i_4 - sM i_5, \end{aligned}$$

С учетом выбранных направлений токов в ветвях и обозначении одноименных зажимов получаем, что $M < 0$, поэтому в компонентных уравнениях появляется знак минус. Записываем компонентные уравнения в матричной форме.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/sC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sL_1 - sM & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sM & sL_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/sC_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Записываем контурные уравнения в виде

$$[\tilde{x}_m][y_k] = [B][\tilde{x}_s^M] - [B]^t[y_k] = -[B][E_s].$$

Находим произведение первых трех матриц в левой части уравнения.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/sC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sL_1 - sM & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sM & sL_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/sC_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2 + \frac{1}{SC_1} & -\frac{1}{SC_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{SC_1} & \frac{1}{SC_1} + SL_1 & SM & 0 \\ 0 & 0 & SM & SL_2 + \frac{1}{SC_2} & -\frac{1}{SC_2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{SC_2} & \frac{1}{SC_2} + R_3 \end{bmatrix} = [Z_M].$$

Находим теперь произведение матриц $[B] \cdot [E_k]$.

$$- \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, получаем систему контурных уравнений в виде

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2 + \frac{1}{SC_1} & -\frac{1}{SC_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{SC_1} & \frac{1}{SC_1} + SL_1 & SM & 0 \\ 0 & 0 & SM & SL_2 + \frac{1}{SC_2} & -\frac{1}{SC_2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{SC_2} & \frac{1}{SC_2} + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в полученной матрице $[Z^M]$ параметр SM вошел со знаком плюс: так и должно быть, ибо при выбранных направлениях контурных токов и обозначенных на рисунке одноименных зажимах коэффициент взаимной индукции имеет знак плюс ($M > 0$).

Для сложных электрических цепей с большим числом независимых контуров целесообразно использовать матричное контурное уравнение (24) и определять входящие в это уравнение матрицы из (22) и (23). В настоящее время разработаны алгоритмы формирования на ЭВМ дерева графа электрической цепи, алгоритмы формирования топологических матриц и компонентных уравнений $[I]$.

РАЗДЕЛ 3

МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Этот метод наряду с методом контурных токов широко используется для расчетов электрических цепей. Ниже будут получены узловые уравнения в двух вариантах: с использованием упрощенной матрицы инцидентий, а также с использованием независимой матрицы сечений; эти уравнения удобно использовать при машинном расчете электрических цепей. В то же время будут сформулированы правила составления узловых уравнений без использования топологических матриц, т.е. по виду электрической цепи.

3.1. Связь между потенциалами в узлах и напряжениями в ветвях в матричной форме

Для нахождения этой связи используем матрицу инцидентий $[A_a]$. Рассмотрим граф - рис.20; его матрица инцидентий $[A_a]$ имеет вид

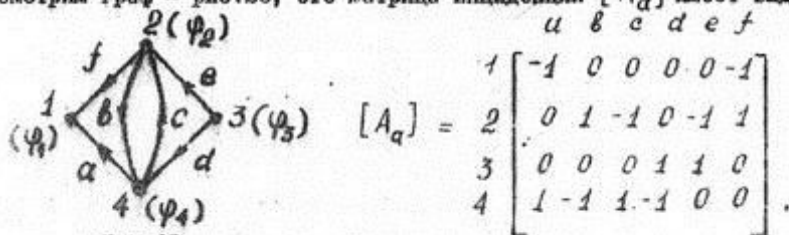


Рис. 20

Обозначим потенциалы в узлах через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, а напряжения в ветвях через $v_a, v_b, v_c, v_d, v_e, v_f$. При этом считаем, что направление тока и напряжения в ветви совпадают. Тогда можно следующим образом обозначить строки и столбцы матрицы инцидентий:

Потенциаль. узлов		напряжения ветвей
		$v_a \quad v_b \quad v_c \quad v_d \quad v_e \quad v_f$
$[A_a]$	=	$\begin{bmatrix} \varphi_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \varphi_2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ \varphi_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \varphi_4 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Прочтя эту матрицу по столбцам, получим связь между напряжениями в ветвях и потенциалами в узлах.

$$v_a = -\varphi_1 + \varphi_4,$$

$$v_d = \varphi_3 - \varphi_4,$$

$$v_b = \varphi_2 - \varphi_4,$$

$$v_e = \varphi_3 - \varphi_2,$$

$$v_c = \varphi_4 - \varphi_2,$$

$$v_f = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Теперь вычеркнем из матрицы $[A_a]$ любую строку, например, 4-ю. При этом автоматически считаем узел 4 опорным узлом, а потенциал этого узла φ_4 принимаем равным нулю, т.е. $\varphi_4 = 0$. Упрощенная матрица инцидентий принимает вид

$$[A] = \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} v_a & v_b & v_c & v_d & v_e & v_f \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если теперь прочитать эту матрицу по столбцам, то получим следующие соотношения:

$$v_a = -\varphi_1, \quad v_c = -\varphi_2, \quad v_e = \varphi_3 - \varphi_2,$$

$$v_b = \varphi_2, \quad v_d = \varphi_3, \quad v_f = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Снова получили связь между напряжениями в ветвях и потенциалами в узлах. Нетрудно видеть, что произведение любой строки транспонированной матрицы $[A]^t$ на матрицу-столбец узловых потенциалов дает напряжение рассматриваемой ветви. Так, например,

$$v_f = [-1 \ 1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}; \quad v_e = [0 \ -1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, связь между напряжениями в ветвях и узловыми потенциалами устанавливается следующим матричным соотношением:

$$[A]^t \cdot [\varphi] = [V_B], \quad (33)$$

где: $[A]^t$ - транспонированная упрощенная матрица инцидентий,

$[\varphi]$ - матрица-столбец узловых потенциалов,

$[V_B]$ - матрица-столбец напряжений ветвей.

Для графа на рис. 20 соотношение (33) записывается в виде

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_d \\ v_e \\ v_f \end{bmatrix}.$$

При получении соотношения (33) были приняты две допущения, которые должны быть оговорены. Во-первых, за начальный узел принимается тот, который опускают при записи независимых уравнений ЭТК. Во-вторых, подразумевается, что сложительные направления напряжений и токов совпадают.

3.2. Узловые уравнения с использованием матрицы инцидентий

Рассмотрим компонентное уравнение (19). Подставим в это уравнение вместо матрицы напряжения ветвей $[V_B]$ ее значение из (33). Тогда получим

$$[J_B] = [V_B] \cdot [A]^t \cdot [\varphi] + [I_B].$$

Умножим это равенство слева на упрощенную матрицу инцидентий.

$$[A] \cdot [J_B] = [A] \cdot [V_B] \cdot [A]^t \cdot [\varphi] + [A] \cdot [I_B].$$

В соответствии с I-м законом Кирхгофа произведение в левой части этого равенства равно нулю. Следовательно,

$$([A][V_B][A]^t) \cdot [\varphi] = -[A][I_B].$$

Введем обозначения

$$[Y] = [A][V_B][A]^t, \tag{34}$$

$$[I] = -[A][I_B]. \tag{35}$$

Тогда получаем узловое уравнение схемы в матричной форме.

$$[Y] \cdot [\varphi] = [I]. \tag{36}$$

Здесь $[Y]$ - квадратная матрица размера $N \times N$, называемая матрицей проводимости электрической цепи.

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Из выражений (34) и (35) видно, что элементы матриц $[Y]$ и $[I]$ являются линейными комбинациями проводимостей ветвей и заданных источников тока, включенных в ветви.

Рассмотрим свойства матрицы $[Y]$. Легко показать, что недиагональные элементы этой матрицы равны между собой, т.е. $Y_{ks} = Y_{sk}$. Для доказательства этого свойства необходимо транспонировать обе части выражения (34) и учесть, что матрица проводимостей ветвей $[Y_B]$ является диагональной.

Рассмотрим физический смысл элементов матрицы $[Y]$. Для этого выполним перемножение двух первых матриц, стоящих в правой части вы-

ражения (34). Тогда получим

$$\begin{aligned}
 [A][y_p] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kl} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nl} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & y_p \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}y_1 & a_{12}y_2 & \dots & a_{1l}y_l \\ a_{21}y_1 & a_{22}y_2 & \dots & a_{2l}y_l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}y_1 & a_{k2}y_2 & \dots & a_{kl}y_l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1}y_1 & a_{N2}y_2 & \dots & a_{Nl}y_l \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Элементы матрицы инцидентий a_{ij} принимают для конкретных графов значения +1, -1 или 0. Рассмотрим диагональный элемент Y_{kk} матрицы $[Y]$. Этот элемент, как следует из выражения (34), получается в результате умножения k -ой строки произведения $[A][y_p]$ на k -ый столбец матрицы $[A]^t$, т.е.

$$\begin{aligned}
 Y_{kk} &= [a_{k1}y_1 \quad a_{k2}y_2 \quad \dots \quad a_{kl}y_l] \cdot \begin{bmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \dots \\ a_{kl} \end{bmatrix} = \\
 &= a_{k1}^2 y_1 + a_{k2}^2 y_2 + \dots + a_{kl}^2 y_l = \sum_{i=1}^{i=l} a_{ki}^2 y_i.
 \end{aligned}$$

В полученной сумме индекс k - номер узла, а индекс i - номер ветви. Величина a_{ki}^2 положительна и отлична от нуля только для значений i , соответствующих ветвям, соединенным с k -м узлом. Следовательно Y_{kk} - сумма проводимостей ветвей, соединенных с k -м узлом. Такой же физический смысл имеют все элементы, расположенные на главной диагонали матрицы $[Y]$. Величина Y_{kk} называется собственной проводимостью k -го узла, причем всегда $Y_{kk} > 0$.

Найдем теперь выражение для элемента Y_{ks} , расположенного на пересечении k -ой строки и s -го столбца матрицы $[Y]$.

$$Y_{ks} = a_{k1} \cdot a_{s1} y_1 + a_{k2} \cdot a_{s2} y_2 + \dots + a_{kl} \cdot a_{sl} y_l = \sum_{i=1}^{i=l} a_{ki} a_{si} y_i$$

Произведение $a_{ki} \cdot a_{si}$ отлично от нуля только в том случае, когда ветвь i одновременно соединена с k -ым и s -ым узлами. Покажем, что произведение $a_{ki} \cdot a_{si}$ всегда меньше нуля. Рассмотрим ветвь i , включенную между узлами k и s - рис.21. Ветвь i выходит из узла k , поэтому в матрице инцидентий появится элемент $a_{ki} = 1$; эта же ветвь заходит в узел s , поэтому в матрице инцидентий появится элемент $a_{si} = -1$. При изменении ориентации ветви получим, наоборот, $a_{ki} = -1$ и $a_{si} = 1$. Других вариантов быть не может. Следовательно, произведение $a_{ki} \cdot a_{si} < 0$, поэтому недиагональный элемент матрицы $[Y]$ всегда отрицателен, т.е. $Y_{ks} < 0$. Итак, Y_{ks} - сумма проводимостей ветвей, соединенных с k -ым и s -ым узлами. Элемент Y_{ks} называется разницей проводимости k -го и s -го узлов.



Рис.21

Рассмотрим свойства элементов матрицы $[I]$.

$$[I] = -[A][I_0] =$$

$$= - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_k \\ \dots \\ I_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11}I_1 + a_{12}I_2 + \dots + a_{1p}I_p \\ a_{21}I_1 + a_{22}I_2 + \dots + a_{2p}I_p \\ \dots \\ a_{k1}I_1 + a_{k2}I_2 + \dots + a_{kp}I_p \\ \dots \\ a_{n1}I_1 + a_{n2}I_2 + \dots + a_{np}I_p \end{bmatrix}.$$

Таким образом, k -я строка матрицы $[I]$ равна

$$I_k = -(a_{k1}I_1 + a_{k2}I_2 + \dots + a_{kp}I_p) = -\sum_{i=1}^p a_{ki}I_i.$$

Поскольку k -я строка матрицы $[A]$ указывает на совокупность инцидентных k -му узлу ветвей, то k -я строка матрицы $[I]$ равна алгебраической сумме заданных источников тока, соединенных с k -ым узлом. Если источник тока I_i направлен к узлу k , как на рис.22,

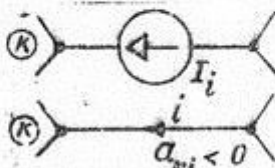


Рис.22

то соответствующая ветвь графа будет ориентирована к узлу и в матрице инцидентий появится элемент $a_{ki} < 0$. Это, в свою очередь, означает, что соответствующий элемент I_k в матрице $[I]$ будет положительным, поскольку перед знаком суммы в последнем выражении стоит знак минус. Если же, наоборот, ток источника тока I_i ориентирован от узла k , то соответствующий элемент войдет в матрицу $[I]$ со знаком минус.

Решим теперь узловое уравнение (36) относительно матрицы-столбца неизвестных потенциалов $[\varphi]$. Решение записываем в виде

$$[\varphi] = [Y]^{-1} \cdot [I], \quad (38)$$

где $[Y]^{-1}$ - обратная матрица. Определим матрицу $[Y]^{-1}$ и подставим в решение матрицы $[\varphi]$ и $[I]$, получим

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_N \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_Y} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{N1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1N} & \Delta_{2N} & \dots & \Delta_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_N \end{bmatrix},$$

где Δ_Y - определитель матрицы (37); индекс "Y" в определителе означает, что его элементами являются проводимости; Δ_{ik} - алгебраическое дополнение элемента Y_{ik} определителя. Выполним перемножение матриц в последнем соотношении, получим решение для неизвестных потенциалов в узлах в алгебраическом виде.

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Y} I_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Y} I_2 + \dots + \frac{\Delta_{N1}}{\Delta_Y} I_N, \\ \varphi_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Y} I_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Y} I_2 + \dots + \frac{\Delta_{N2}}{\Delta_Y} I_N, \\ \dots \\ \varphi_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_Y} I_1 + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_Y} I_2 + \dots + \frac{\Delta_{Nk}}{\Delta_Y} I_N, \\ \dots \\ \varphi_N = \frac{\Delta_{1N}}{\Delta_Y} I_1 + \frac{\Delta_{2N}}{\Delta_Y} I_2 + \dots + \frac{\Delta_{NN}}{\Delta_Y} I_N. \end{cases}$$

В общем виде для потенциала в узле k можно записать решение в следующем компактном виде:

$$\varphi_k = \frac{1}{\Delta_Y} \cdot \sum_{i=1}^N \Delta_{ik} I_i.$$

Это соотношение выражает принцип суперпозиции для линейной электрической цепи: потенциал любого узла может быть получен как алгебраическая сумма потенциалов, вызываемых в этом узле каждым из источников тока в отдельности.

Необходимо помнить, что в конкретных задачах ее решение не заканчивается после того, как потенциалы в узлах найдены. Обычно требуется определить падения напряжений на элементах или токи в ветвях. После того, как неизвестные потенциалы в узлах найдены, для определения неизвестных напряжений необходимо воспользоваться соотношением (33), а затем определить, если это требуется, неизвестные токи в ветвях.

Оформулируем теперь правила, которыми следует руководствоваться при составлении системы узловых уравнений без использования топологических матриц, т.е. по виду электрической цепи. Для этого запишем систему узловых уравнений в алгебраическом виде, раскрыв матричное узловое уравнение (36). Подставив в (36) необходимые матрицы и выполнив их перемножение, получим

$$\begin{cases} Y_{11}\varphi_1 + Y_{12}\varphi_2 + \dots + Y_{1N}\varphi_N = I_1, \\ Y_{21}\varphi_1 + Y_{22}\varphi_2 + \dots + Y_{2N}\varphi_N = I_2, \\ \dots \\ Y_{N1}\varphi_1 + Y_{N2}\varphi_2 + \dots + Y_{NN}\varphi_N = I_N. \end{cases} \quad (39)$$

При составлении системы узловых уравнений по виду электрической цепи необходимо придерживаться следующих правил, являющихся следствием установленных выше свойств матричных узловых уравнений:

1. Токи, стоящие в правой части системы уравнений (39), есть алгебраическая сумма токов источников тока, соединенных с K -ым узлом, причем ток I_K источника тока, приходящий к узлу K , берется со знаком "плюс", а отходящий от узла — со знаком "минус";
2. Величина Y_{kk} — собственная проводимость всех ветвей, соединенных с узлом k ; величина Y_{kk} берется в системе узловых уравнений (39) со знаком "плюс";
3. Величина Y_{ks} — взаимная проводимость между узлами k и s ; эта величина берется в системе узловых уравнений со знаком "минус".

Составим, например, систему узловых уравнений для мостовой схемы — рис. 23 — по виду этой схемы. Схема содержит 4 узла, следовательно, можно составить 3 независимых узловых уравнения, выберем, например, узел 4 в качестве базисного, т.е. положим $\varphi_4 = 0$. В соответствии с

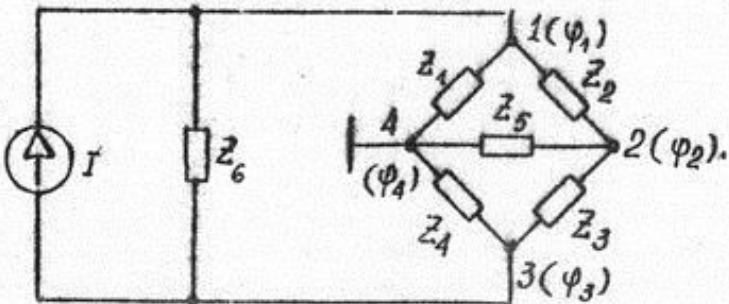


Рис. 23

правилами составления узловых уравнений по виду схемы получим:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_6}\right)\varphi_1 - \frac{1}{z_2}\varphi_2 - \frac{1}{z_6}\varphi_3 = I, \\ -\frac{1}{z_2}\varphi_1 + \left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_5}\right)\varphi_2 - \frac{1}{z_3}\varphi_3 = 0, \\ -\frac{1}{z_6}\varphi_1 - \frac{1}{z_3}\varphi_2 + \left(\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} + \frac{1}{z_6}\right)\varphi_3 = -I. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь пример составления узловых уравнений с использованием топологической матрицы инцидентий. Рассмотрим электрическую цепь на рис. 24. Ветви этой цепи пронумерованы, а узлы помечены цифрами в кружках.

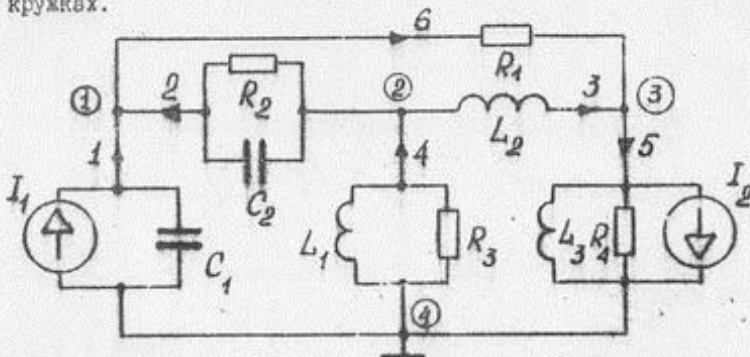


Рис. 24

Выбираем произвольное направление токов в ветвях, считая, что ветви образованы параллельным соединением элементов: например, ветвь № 1 — есть параллельное соединение емкости C_1 и источника тока I_1 , ветвь № 2 — параллельное соединение емкости C_2 и сопротивления R_2 и т.д. Граф этой цепи представлен на рис. 25. Его матрица инцидентий имеет вид

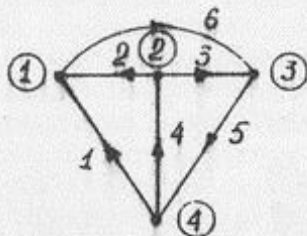


Рис. 25

$$[A_a] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Вычеркнув четвертую строку, получим упрощенную матрицу инцидентий

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Запишем систему компонентных уравнений.

$$\begin{aligned} i_1 &= Y_1 v_1 + I_1 = sC_1 v_1 + I_1, \\ i_2 &= Y_2 v_2 = (sC_2 + \frac{1}{R_2}) v_2, \\ i_3 &= Y_3 v_3 = \frac{1}{sL_2} v_3, \\ i_4 &= Y_4 v_4 = (\frac{1}{sL_1} + \frac{1}{R_3}) v_4, \\ i_5 &= Y_5 v_5 + I_2 = (\frac{1}{sL_3} + \frac{1}{R_4}) v_5 + I_2, \\ i_6 &= \frac{1}{R_1} v_6. \end{aligned}$$

Запишем алгебраическую систему компонентных уравнений в матричной форме.

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sC_2 + \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{sL_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL_1} + \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL_3} + \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Получили диагональную матрицу проводимостей, поскольку в схеме нет зависимых источников и элементов с взаимной индукцией. Запишем систему узловых уравнений, используя матрицу инцидент. Для этого воспользуемся уравнением (36), подставив в него найденные значения матриц $[A]$, $[Y_8]$, $[I_8]$.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} sC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sC_2 + \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{sL_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL_1} + \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{sL_3} + \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ I_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Выполнив перемножение матриц, получим

$$\begin{bmatrix} sC_1 + sC_2 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -(sC_2 + \frac{1}{R_2}) & -\frac{1}{R_1} \\ -(sC_2 + \frac{1}{R_2}) & sC_2 + \frac{1}{sL_1} + \frac{1}{sL_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{sL_2} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{sL_2} & \frac{1}{sL_2} + \frac{1}{sL_3} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Запишем это матричное соотношение в алгебраическом виде:

$$\begin{aligned} (sC_1 + sC_2 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})\varphi_1 - (sC_2 + \frac{1}{R_2})\varphi_2 - \frac{1}{R_1}\varphi_3 &= I_1, \\ -(sC_2 + \frac{1}{R_2})\varphi_1 + (sC_2 + \frac{1}{sL_1} + \frac{1}{sL_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})\varphi_2 - \frac{1}{sL_2}\varphi_3 &= 0, \\ -\frac{1}{R_1}\varphi_1 - \frac{1}{sL_2}\varphi_2 + (\frac{1}{sL_2} + \frac{1}{sL_3} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4})\varphi_3 &= -I_2. \end{aligned}$$

Получили искомую систему узловых уравнений.

3.3. Узловые уравнения для электрических цепей с источниками Э.Д.С. и зависимыми источниками

Узловые уравнения были получены в предположении, что источниками энергии являлись источники тока. Пусть теперь в электрической цепи имеются источники Э.Д.С., имеющие конечные внутренние сопротивления. Чтобы в этом случае записать систему узловых уравнений, необходимо источники Э.Д.С. пересчитать в эквивалентные им источники тока, воспользовавшись для этой цели известными формулами.

Предположим, что в цепи имеются источники Э.Д.С., имеющие нулевые внутренние сопротивления. В этом случае число узловых уравнений, которое требуется составить для определения неизвестных потенциалов в узлах, уменьшается на число имеющихся в схеме источников Э.Д.С. с нулевым внутренним сопротивлением. Действительно, при наличии в схеме таких источников - рис.26 - напряжение между парой узлов k и l , к которым подключен источник E_{kl} , известно. Следовательно, потенциал одного из этих узлов, например, φ_k равен алгебраической сумме известной Э.Д.С. источника напряжения E_{kl} и потенциала другого уз-

да, т.е. $\varphi_{\kappa} = \varphi_S + E_{\kappa S}$.



Рис. 26

Пусть теперь в электрической цепи имеются зависимые источники. Рассмотрим особенности составления узловых уравнений в этом случае. Пусть в электрической цепи имеется зависимый источник тока, который включен между узлами κ и ℓ - рис. 27 - и пусть ток этого источни-

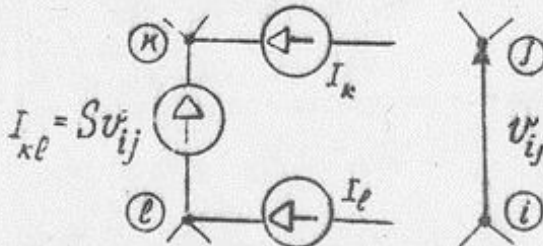


Рис. 27

ке зависит от управляющего напряжения v_{ij} между узлами i и j схемы, т.е.

$$I_{\kappa\ell} = S \cdot v_{ij} = S(\varphi_i - \varphi_j),$$

где S - управляющий параметр, имеющий размерность проводимости, а φ_i и φ_j - потенциалы в узлах i и j . Систему узловых уравнений можно записать и в этом случае по изложенным выше правилам. При этом ток зависимого источника $I_{\kappa\ell}$ войдет в 2 уравнения: один раз этот ток войдет в правую часть уравнения для κ -го узла со знаком "плюс" (с учетом показанного на рис. 27 направления этого источника); второй раз ток зависимого источника войдет в правую часть уравнения для ℓ -го узла со знаком "минус". Итак, узловые уравнения для κ -го и ℓ -го узлов примут соответственно вид:

$$Y_{\kappa 1} \varphi_1 + Y_{\kappa 2} \varphi_2 + \dots + Y_{\kappa n} \varphi_n = I_{\kappa} + S(\varphi_i - \varphi_j),$$

$$Y_{\ell 1} \varphi_1 + Y_{\ell 2} \varphi_2 + \dots + Y_{\ell n} \varphi_n = I_{\ell} - S(\varphi_i - \varphi_j).$$

На остальные уравнения зависимый источник, действующий между узлами κ и ℓ , не оказывает влияния. Перенеся зависимые источники в левую часть уравнений, получим

$$Y_{k1} \varphi_1 + Y_{k2} \varphi_2 + \dots + (Y_{ki} - S) \varphi_i + \dots + (Y_{kj} + S) \varphi_j + \dots + Y_{kN} \varphi_N = I_k,$$

$$Y_{l1} \varphi_1 + Y_{l2} \varphi_2 + \dots + (Y_{li} + S) \varphi_i + \dots + (Y_{lj} - S) \varphi_j + \dots + Y_{lN} \varphi_N = I_l.$$

Таким образом, при наличии в схеме зависимого источника тока между узлами k и l , управляемого напряжением между узлами i и j , изменятся лишь 2 узловых уравнения, записанных для узла k и l ; при этом меняются лишь коэффициенты при узловых потенциалах φ_i и φ_j .

3.4. Связь между напряжениями ветвей графа и напряжениями ветвей дерева

Эта связь необходима для получения узловых уравнений с помощью матрицы сечений.

Рассмотрим электрическую цепь, оргграф которой представлен на рис. 26а. На рис. 26б показано дерево этого графа и построены независимые сечения.

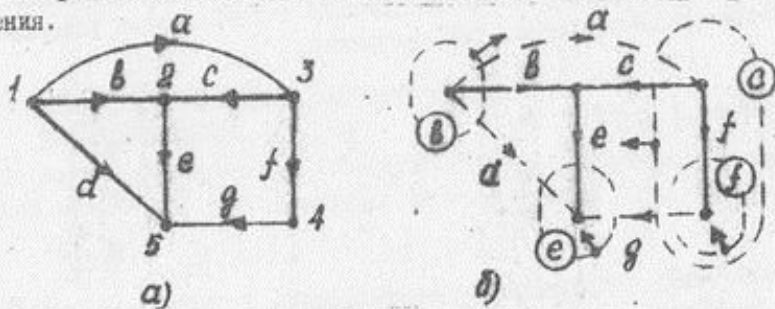


Рис. 26

Составим матрицу независимых сечений:

сечения	b	c	e	f	a	d	g	← ветви
$[M]$	b	c	e	f	a	d	g	
	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$							

Будем отождествлять строки матрицы сечений с напряжениями ветвей дерева, а столбцы - с напряжениями ветвей графа. Тогда можно следующим образом обозначить строки и столбцы матрицы $[\Pi]$:

$$[\Pi] = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{напряжения} \\ \text{ветвей} \\ \text{дерева} \end{matrix} & \begin{matrix} v_b & v_c & v_e & v_f & v_a & v_d & v_g \end{matrix} & \begin{matrix} \text{напряжения} \\ \text{ветвей} \\ \text{графа} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_b \\ v_c \\ v_e \\ v_f \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

Читая эту матрицу по столбцам, получим, что напряжения ветвей графа выражаются через напряжения ветвей дерева.

$$\begin{aligned} v_b &= v_b, & v_e &= v_e, & v_a &= v_b - v_c, & v_g &= v_c + v_e - v_f. \\ v_c &= v_c, & v_f &= v_f, & v_d &= v_b + v_e, \end{aligned}$$

Последняя система из трех уравнений выражает 2-й закон Кирхгофа для контуров, образованных ветвями дерева и хордами. Поскольку напряжения всех ветвей графа выражаются через напряжения ветвей дерева, то напряжения ветвей дерева являются независимыми.

Нетрудно видеть, что произведение строки транспонированной матрицы $[\Pi]^t$ на матрицу-столбец напряжений ветвей дерева равно напряжению рассматриваемой ветви; так, например,

$$v_a = [1 \ -1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} v_b \\ v_c \\ v_e \\ v_f \end{bmatrix}, \quad v_f = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} v_b \\ v_c \\ v_e \\ v_f \end{bmatrix} \quad \text{и т.д.}$$

Связь между напряжениями ветвей графа и напряжениями ветвей дерева графа выражается следующим матричным соотношением:

$$[V_g] = [\Pi]^t [V_{b,d}], \quad (40)$$

где $[V_g]$ - матрица-столбец напряжений ветвей графа (размер этой матрицы, как отмечалось ранее, $l \times 1$); в рассмотренном примере (рис. 28) эта матрица имеет вид $[V_g] = [v_b \ v_c \ v_e \ v_f \ v_a \ v_d \ v_g]^t$;

$[V_{b,d}]$ - матрица-столбец напряжений ветвей дерева (размер этой матрицы $N \times 1$, N - число ветвей дерева); в рассмотренном примере

$$[V_{b,d}] = [v_b \ v_c \ v_e \ v_f]^t.$$

Разобьем матрицу $[\Pi]$ на две подматрицы, как это сделано в рассмотренном примере и в главе I - соотношение (8). Запишем соотношение (8) еще раз.

$$[\Pi] = [I, \mathcal{X}] \quad (8)$$

Матрицу-столбец напряжений ветвей $[V_b]$ также разобьем на две подматрицы.

$$[V_b] = \begin{bmatrix} V_{b,A} \\ V_x \end{bmatrix}, \quad (4I)$$

где $[V_x]$ - матрица-столбец напряжений в хордах (для графа на рис. 38) $[V_x] = [v_a \ v_d \ v_g]^t$. Подставим (8) и (4I) в выражение (40).

$$\begin{bmatrix} V_{b,A} \\ V_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ \mathcal{X}^t \end{bmatrix} \cdot [V_{b,A}].$$

Выполнив умножение матриц в правой части, получим

$$\begin{bmatrix} V_{b,A} \\ V_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{b,A} \\ \mathcal{X}^t V_{b,A} \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует справедливость следующего соотношения:

$$[V_x] = [\mathcal{X}]^t [V_{b,A}]. \quad (42)$$

Это соотношение показывает, что напряжения хорд выражаются через напряжения ветвей дерева с помощью транспонированной матрицы сечений для хорд. Соотношение (42) называется вторым топологическим уравнением.

3.5. Узловые уравнения с использованием матрицы сечений

Подставим в компонентное уравнение (19) вместо матрицы-столбца напряжений ветвей $[V_b]$ ее выражение из соотношения (40). Тогда получим

$$[Y_b] = [Y_b][\Pi]^t [V_{b,A}] + [I_b].$$

Умножим это уравнение слева на матрицу $[\Pi]$.

$$[\Pi][Y_b] = [\Pi][Y_b] \cdot [\Pi]^t [V_{b,A}] + [\Pi][I_b].$$

В соответствии с I-м законом Кирхгофа - соотношение (?) - произведение матриц в правой части последнего соотношения равно нулю, поэтому

$$([\Pi][Y_b][\Pi]^t)[V_{b,A}] = -[\Pi][I_b].$$

Введем следующие обозначения:

$$[\Pi][Y_b][\Pi]^t = [Y], \quad (43)$$

$$-[\Pi] \cdot [I_B] = [I]. \quad (44)$$

С учетом введенных обозначений запишем последнее матричное уравнение в виде

$$[V][V_{B,A}] = [I]. \quad (45)$$

Полученное уравнение (45) также называют узловым уравнением. Заметим, что системе узловых уравнений с использованием матрицы сечений широко используется при машинном анализе электронных схем [1]. Эта система дает решение для напряжений, а не потенциалов (в случае использования матрицы инцидентий), что очень удобно.

По своей структуре узловые уравнения (36) и (45) совпадают; матрица $[Y]$, входящая в узловое уравнение (45), также может быть записана в форме (37), однако, как будет сейчас показано, входящие в матрицу $[Y]$ величины Y_{KK} и Y_{KS} интерпретируются иначе, чем в узловом уравнении (36).

Легко показать, транспонируя обе части уравнения (43), что матрица $[Y]$ симметрична относительно главной диагонали, т.е. ее недиагональные элементы $Y_{KS} = Y_{SK}$.

Найдем теперь диагональный элемент Y_{KK} матрицы $[Y]$, получившийся в результате умножения K -ой строки произведения матриц $[\Pi][V_B]$ на K -ый столбец матрицы $[\Pi]^t$. Учитывая, что матрица проводимостей ветвей $[V_B]$ является диагональной - выражение (20), получим в результате такого умножения

$$Y_{KK} = [\pi_{K1} \cdot V_1 \quad \pi_{K2} V_2, \dots, \pi_{Kl} V_l] \cdot \begin{bmatrix} \pi_{K1} \\ \pi_{K2} \\ \dots \\ \pi_{Kl} \end{bmatrix} = \\ = \pi_{K1}^2 V_1 + \pi_{K2}^2 V_2 + \dots + \pi_{Kl}^2 V_l = \sum_{i=1}^l \pi_{Ki}^2 V_i,$$

где π_{Ki} - типичный элемент матрицы $[\Pi]$, принимающий в конкретных задачах значения +1, -1 или 0; K - номер независимого сечения, i - номер ветви.

Величина π_{Ki}^2 может быть только положительной; эта величина отлична от нуля лишь в случае, когда ветвь i принадлежит K -му сечению. Следовательно, по физическому смыслу величина Y_{KK} - сумма проводимостей ветвей, инцидентных K -му сечению. Величину Y_{KK} называют собственной проводимостью K -го сечения, причем $Y_{KK} > 0$.

Выражение для недиагонального элемента Y_{KS} матрицы $[Y]$ имеет

вид
$$Y_{KS} = \pi_{K1} \pi_{S1} Y_1 + \pi_{K2} \pi_{S2} Y_2 + \dots + \pi_{K\ell} \pi_{S\ell} Y_\ell = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_{Ki} \pi_{Si} Y_i.$$

Произведение $\pi_{Ki} \pi_{Si}$ отлично от нуля только для значений соответствующих ветвям, инцидентным одновременно K -му и S -му сечениям. Таким образом, элемент Y_{KS} называет взаимной проводимостью K -го и S -го сечений. Рассмотрим знаки, с которыми элементы Y_{KS} входят в матрицу $[Y]$. Произведение $\pi_{Ki} \pi_{Si}$ равно $+1$, если K -ое и S -ое сечения по отношению к ветви i направлены одинаково, и равно -1 , если эти сечения по отношению к ветви i направлены противоположно. Таким образом, часть недиагональных элементов матрицы $[Y]$ войдут в эту матрицу со знаком "плюс", а часть - со знаком "минус". Так как взаимное направление двух сечений одинаково относительно всех инцидентных им ветвей, то и все слагаемые взаимной проводимости имеют один и тот же знак.

Рассмотрим теперь K -ю строку матрицы-столбца $[I]$ - формула (44).

$$I_K = -[\pi_{K1} \pi_{K2} \dots \pi_{K\ell}] \cdot \begin{bmatrix} I_{\delta 1} \\ I_{\delta 2} \\ \dots \\ I_{\delta \ell} \end{bmatrix} =$$

$$= -(\pi_{K1} I_{\delta 1} + \pi_{K2} I_{\delta 2} + \dots + \pi_{K\ell} I_{\delta \ell}) = - \sum_{i=1}^{\ell} \pi_{Ki} I_{\delta i}.$$

Поскольку K -я строка матрицы $[I]$ указывает на совокупность принадлежащих K -му сечению ветвей с учетом их направлений относительно направления сечения, то элемент I_K равен алгебраической сумме заданных токов ветвей, принадлежащих K -му сечению. При этом K -я компонента матрицы $[I]$ войдет в эту матрицу со знаком "плюс", если ток $I_{\delta i}$ под знаком суммы противоположен направлению сечения.

Рассмотрим пример составления узловых уравнений с использованием матрицы сечений. Пусть имеется электрическая цепь - рис. 29.

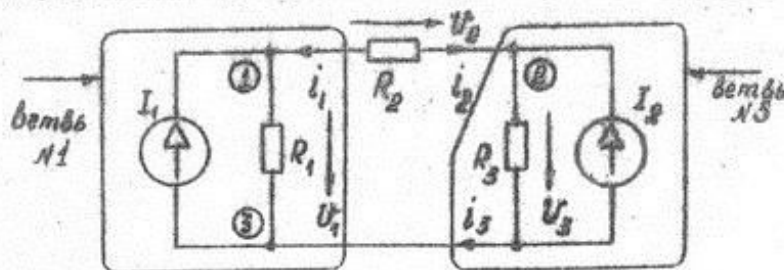


Рис. 29

Выбираем произвольно направления токов и напряжений в ветвях. Граф цепи показан на рис.30а, а дерево графа и независимые сечения на рис.30б.

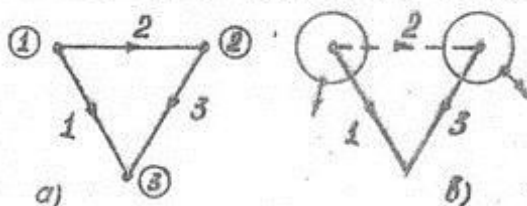


Рис. 30

Матрица сечений имеет вид

$$\begin{array}{c} \text{сечения} \quad \uparrow \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \left[\Pi \right] = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \end{array} \quad \leftarrow \text{ветви}$$

Составим компонентные уравнения.

$$\begin{cases} i_1 = v_1/R_1 - I_1, \\ i_2 = v_2/R_2, \\ i_3 = v_3/R_3 - I_2. \end{cases}$$

Запишем компонентные уравнения в матричной форме.

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ -I_2 \end{bmatrix}.$$

Составим систему узловых уравнений. Для этого вычислим сначала матрицу $[Y]$ по формуле (43). Подставив в (43) найденные матрицы $[\Pi]$ и $[Y_0]$, получим

$$\begin{aligned} [Y] &= [\Pi][Y_0][\Pi]^t = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_1 + 1/R_2 & -1/R_2 \\ -1/R_2 & 1/R_2 + 1/R_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Матрица-столбец напряжений ветвей дерева графа имеет вид

$$[V_{\delta, A}] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Находим теперь по формуле (44) матрицу-столбец $[I]$.

$$[I] = -[\Gamma][I_{\delta}] = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Подставляя в (45) найденные значения входящих в это уравнение матриц, получаем

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

РАЗДЕЛ 4

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Выше были рассмотрены два метода анализа электрических цепей — метод контурных токов и метод узловых потенциалов. Совокупность независимых контуров, а также совокупность независимых сечений можно рассматривать в виде некоторой системы координат в многомерном пространстве, а величины контурных токов и величины узловых потенциалов — как некоторые координаты, характеризующие состояние электрической цепи при заданных значениях параметров ее элементов. Матрицы-столбцы (или многомерные векторы) контурных токов и узловых потенциалов можно назвать векторами состояния электрической цепи. Однако в качестве переменных состояния могут выступать не только контурные токи или узловые потенциалы. В настоящей главе рассматривается метод получения дифференциальных уравнений электрической цепи, когда в качестве переменных состояния выбираются токи во всех индуктивностях и напряжения на всех емкостях.

4.1: Определение состояния. Примеры составления уравнений в пространстве состояний для простых цепей

Если уравнения электрической цепи записаны в форме [2], [4]

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = f\{\vec{x}(t), \vec{x}_{\delta N}(t)\}, \\ V(t) = \psi\{\vec{x}(t), \vec{x}_{\delta N}(t)\}, \end{cases} \quad (46)$$

где f и ψ — некоторые непрерывные функции, то говорят, что эти уравнения имеют форму уравнений состояния. Входящие в первое уравнение системы (46) матрицы-столбцы $\vec{x}(t)$ и $\vec{x}_{\delta N}(t)$ имеют следующий смысл:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \vec{i}_L(t) \\ \vec{v}_C(t) \end{bmatrix} \quad \text{— матрица-столбец или многомерный вектор, компонентами которого являются подматрица-столбец } \vec{i}_L(t) \text{ токов во всех индуктивностях и подматрица-столбец } \vec{v}_C(t) \text{ напряжений на всех емкостях (здесь и}$$

далее стрелка над некоторым индексом означает, что имеем дело с матрицей-столбцом);

$$\vec{x}_{\delta N}(t) = \begin{bmatrix} \vec{I}(t) \\ \vec{E}(t) \end{bmatrix} \quad \text{— матрица-столбец или многомерный вектор, компонентами которого являются подматрица-столбец } \vec{I}(t) \text{ независимых источников тока и подматрица-столбец } \vec{E}(t) \text{ независимых источников Э.Д.С. Матрица или}$$

вектор $\vec{x}(t)$ характеризует состояние электрической цепи, а вектор $\vec{x}_{\delta N}(t)$ определяет вход электрической

цепи. Таким образом, векторное дифференциальное уравнение состояния (46) связывает первую производную вектора состояния с самим вектором состояния и вектором, определяющим вход электрической цепи.

Входящий во второе уравнение системы (45) вектор $\vec{V}(t)$, называемый выходом электрической цепи, представляет собой матрицу-столбец, компонентами которой являются токи или напряжения на некоторых элементах электрической цепи. Следовательно, второе уравнение системы (46) есть векторное алгебраическое уравнение, связывающее вектор выхода электрической цепи с вектором состояния и входа.

Попытаемся ответить на два вопроса.

1. Для какой цели составляются уравнения электрической цепи в пространстве состояний?

2. Почему в качестве переменных состояния выбираются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях?

Имеется две основные причины использования уравнений в форме (46). Оказывается, во-первых, что такая форма уравнений наиболее просто поддается цифровому программированию [2], [4]. Во-вторых, имеется возможность распространить анализ с помощью уравнений в пространстве состояний на нелинейные и параметрические цепи, что трудно сделать, используя метод контурных токов или узловых потенциалов.

Чтобы ответить на второй вопрос, заметим, что если в некоторый момент времени $t = t_1$ отключить все источники от электрической цепи, т.е. положить $\vec{x}_{BN}(t) = 0$ при $t > t_1$, то выход $\vec{V}(t)$ цепи для всех последующих моментов времени $t > t_1$ будет определяться только вектором состояния $\vec{x}(t_1)$.

$$\vec{x}(t_1) = \begin{bmatrix} i_L(t_1) \\ \varphi_C(t_1) \end{bmatrix}.$$

Другими словами, выход $\vec{V}(t)$ электрической цепи при $t > t_1$ будет зависеть от поведения токов в индуктивностях и напряжениях на емкостях. Индуктивности и емкости являются элементами "памяти" в электрической цепи и не могут мгновенно изменить свое состояние: известно, что ток через индуктивность и напряжение на емкости не могут мгновенно измениться. Поэтому за состояние электрической цепи выбирают матрицу-столбец, компонентами которой (переменными состояния) являются токи в индуктивностях и напряжения на емкостях в данный момент времени.

Оказывается, что для широкого класса линейных электрических цепей общая форма уравнений (46) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}(t)}{dt} &= \bar{A} \vec{x}(t) + \bar{B} \vec{x}_{\text{вн}}(t), \\ \vec{Y}(t) &= \bar{C} \vec{x}(t) + \bar{D} \vec{x}_{\text{вн}}(t). \end{aligned} \quad (47)$$

В уравнении (47) \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} и \bar{D} — некоторые матрицы, зависящие от топологии (структуры) электрической цепи и от величин параметров R , L и C , образующих цепь.

Нашей задачей является теперь разработать систематизированный способ построения по виду схемы матриц \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} и \bar{D} и, следовательно, уравнений в пространстве состояний в форме (47). Прежде чем приступить к решению этой задачи, рассмотрим несколько простых примеров, позволяющих установить некоторые закономерности и выйти из сути задачи.

Пример 1. Имеется простейшая RC -цепочка, подключенная к источнику ЭДС — рис.31. Составим для такой цепи уравнения в пространстве состояний.

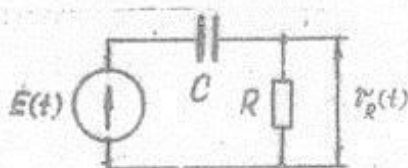


Рис.31

Вектор, определяющий вход цепи, равен

$$\vec{x}_{\text{вн}}(t) = E(t).$$

Уравнения в пространстве состояний записываются непосредственно по виду схемы и имеют простой вид.

$$\begin{cases} \frac{dU_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} U_C(t) + \frac{1}{RC} E(t), \\ \vec{Y}(t) = v_R(t) = -U_C(t) + E(t). \end{cases}$$

Получили уравнения, форма которых полностью удовлетворяет уравнениям (47).

Пример 2. Условим цепь на рис.31, добавив последовательно с RC -цепочкой индуктивность L — рис 32а. Составим для этой цепи уравнения в пространстве состояний.

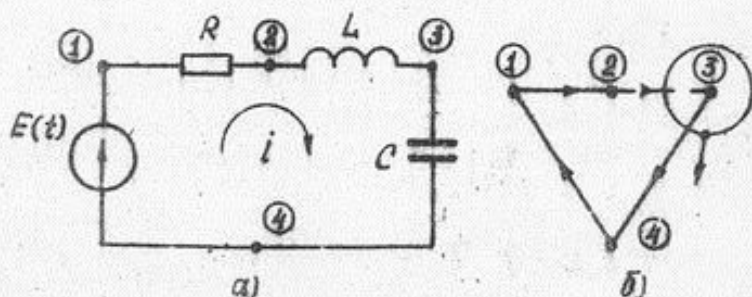


Рис. 32

Вектор состояния принимает для этого примера следующий вид:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix},$$

где i_L - ток через индуктивность, v_C - напряжение на емкости. Первое уравнение в пространстве состояний получим, если приравняем ток через индуктивность току через емкость, т.е. $i_L = i_C = i$, откуда

$$\frac{d}{dt} v_C = \frac{1}{C} i_L. \quad (48)$$

Замечем, что это уравнение можно получить, записав ЗК для сечения, показанного на рис. 32б. Применительно к этому сечению условие $i_L = i_C$ выражает связь между током в ветви дерева и током в хорде. Для получения второго уравнения в пространстве состояний запишем уравнение ЗК для контура.

$$L \frac{d}{dt} i_L = E - v_R - v_C,$$

где v_R - падение напряжения на сопротивлении R . Полученное уравнение еще не является уравнением в пространстве состояний, поскольку входящая в правую часть этого уравнения величина v_R не является переменным состоянием. Выразив по формуле $v_R = R i_L$ напряжение v_R через ток i_L , который является переменным состоянием, и подставив v_R в последнее выражение, получим второе уравнение в пространстве состояний.

$$\frac{d}{dt} i_L = -\frac{R}{L} i_L - \frac{1}{L} v_C + \frac{1}{L} E. \quad (49)$$

Объединив полученные уравнения (48) и (49) в одно матричное уравнение, получим

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot E$$

Пример 3. Рассмотрим теперь более сложную электрическую цепь - рис. 33. Составим для этой цепи уравнения в пространстве состояний.

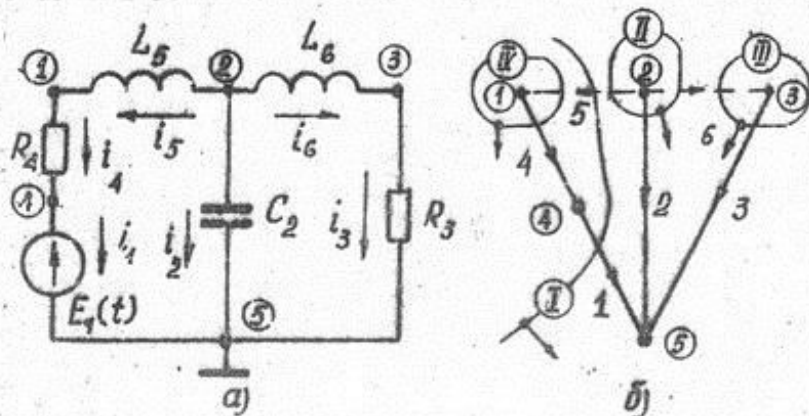


Рис. 33

Выбираем произвольно направления токов в ветвях схемы; эти направления показаны стрелками на рис. 33. В качестве переменных состояний выберем токи в индуктивностях L_5 и L_6 , а также напряжение на емкости C_2 , обозначим эти величины соответственно i_5 , i_6 , v_C . Таким образом, вектор состояния $\vec{x}(t)$ принимает вид

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ v_C \end{bmatrix}$$

Итак, требуется составить векторное дифференциальное уравнение в пространстве состояний в виде

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ v_C \end{bmatrix} = \bar{A} \vec{x}(t) + \bar{B} \vec{x}_{вн}(t)$$

Рассмотрим подробнее производные, стоящие в левой части этого уравнения. Величины $L_5 \cdot \frac{di_5}{dt}$, $L_6 \cdot \frac{di_6}{dt}$ и $C_2 \cdot \frac{dv_C}{dt}$ - есть соответственно падения напряжений на индуктивностях L_5 и L_6 , а также ток в емкости C_2 . Чтобы определить ток через емкость C_2 , выразим его

через переменные величины состояния, необходимо, как это уже было отмечено в предыдущей задаче, написать уравнение ЭТК для сечения. Чтобы определить напряжения на индуктивностях L_5 и L_6 , выразив эти величины через переменные величины состояния, необходимо записать уравнения ЭТК для контуров. Выявленная необходимость записи уравнений с использованием независимых сечений и контуров предполагает, что емкость рассматриваемой электрической цепи должна входить в состав дерева графа, а индуктивности — в состав хорд. На рис. 346 показан граф цепи, дерево графа (сплошные линии) и показаны независимые сечения. Дерево этого графа составлено таким образом, что емкость C_2 входит в состав дерева, а индуктивности L_5 и L_6 входят в состав хорд. Составим матрицу сечений для хорд $[X]$.

$$[X] = \begin{matrix} \text{сечения} & \begin{matrix} I(E_1) & L_5 & L_6 & \leftarrow \text{хорды} \end{matrix} \\ \begin{matrix} II(C_2) \\ III(R_3) \\ IV(R_4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Используем теперь первое топологическое уравнение (10). В рассматриваемом примере уравнение (10) принимает вид

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}.$$

Выполнив умножение матриц, получим

$$\begin{aligned} i_1 &= i_5, & i_4 &= i_5, \\ i_3 &= i_6, & i_2 &= -i_5 - i_6. \end{aligned}$$

Запишем последнее уравнение в виде

$$i_2 = C_2 \frac{d}{dt} \psi_c = -i_5 - i_6. \quad (50)$$

Получим первое уравнение в пространстве состояний: все входящие в это уравнение величины являются переменными состояниями. Для определения падения напряжения на индуктивностях воспользуемся вторым топологическим уравнением (42), которое для нашей задачи запишется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ v_c \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}.$$

Выполнив умножение матриц, получим следующие дифференциальные уравнения:

$$v_5 = L_5 \frac{di_5}{dt} = -E_1 + v_c - v_4,$$

$$v_6 = L_6 \frac{di_6}{dt} = v_c - v_3.$$

Полученные дифференциальные уравнения пока еще не являются уравнениями в пространстве состояний, ибо содержат переменные, не являющиеся переменными состояния: в первое уравнение входит величина v_4 , а во второе - величина v_3 . Выразим эти величины через переменные состояния, воспользовавшись законом Ома.

$$v_3 = R_3 i_6, \quad v_4 = R_4 i_5.$$

Подставив v_3 и v_4 в полученные дифференциальные уравнения, будем иметь

$$L_5 \frac{d}{dt} i_5 = v_c - R_4 i_5 - E_1,$$

$$L_6 \frac{d}{dt} i_6 = v_c - R_3 i_6.$$

Получили уравнения в пространстве состояний; объединим эти два уравнения с уравнением (50), получим следующее векторное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_4}{L_5} & 0 & \frac{1}{L_5} \\ 0 & -\frac{R_3}{L_6} & \frac{1}{L_6} \\ -\frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/L_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot E_1.$$

Приведенные примеры показывают, что для сравнительно простых электрических цепей уравнения в пространстве состояний можно записать по виду схемы. При усложнении цепи требуется уже систематизированный подход к составлению таких уравнений.

4.2. Алгоритм составления уравнений в пространстве состояний

За основу решения задачи составления уравнений в пространстве состояний для электрической цепи без независимых источников возьмем первое и второе топологические уравнения (10) и (42), которые можно объединить в одно матричное уравнение.

$$\begin{bmatrix} \vec{y}_A \\ \vec{V}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{x}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{J}_x \\ \vec{V}_A \end{bmatrix} \quad (51)$$

Назовем это уравнение матричным топологическим уравнением цепи. В этом уравнении черта над индексами означает, что имеем дело с подматрицей или, как говорят, блоком, а стрелка над индексом означает, что имеем дело с подматрицей-столбцом (вектором). Топологическое уравнение цепи (51) связывает токи и напряжения во всех ветвях электрической цепи в произвольный момент времени. Важно отметить, что при выводе первого и второго топологических уравнений (10), (42) и соответственно топологического уравнения цепи (51) не учитывался характер элементов, включенных в ветвях: это могут быть в принципе линейные и нелинейные элементы, постоянные и изменяющиеся во времени и т.п. При выводе этих уравнений учитывался лишь способ соединения элементов, т.е. топология электрической цепи. На следующем этапе анализа необходимо учитывать характер каждого из элементов, связав ток и напряжение на этих элементах законом Ома.

Примем, как это отмечалось выше, за состояние электрической цепи набор токов в индуктивностях i_L и набор напряжений на емкостях v_C этой цепи, т.е. вектор состояния будем записывать в виде выражения

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \vec{i}_L(t) \\ \vec{v}_C(t) \end{bmatrix} \quad (52)$$

Выберем дерево графа электрической цепи с таким приоритетом в порядке следования ветвей, чтобы ветви с источниками Э.Д.С. и ветви с емкостями входили в состав дерева, а ветви с источниками тока и ветви с индуктивностями входили в состав хорд. При выбранном способе образования дерева окажется, что для получения полного дерева необходимо часть сопротивлений схемы включить в состав ветвей дерева, а часть - в состав хорд. Обозначим сопротивления, входящие в состав ветвей дерева, через R_A , а сопротивления, входящие в состав хорд - через R_x .

Строки и столбцы матрицы независимых сечений [A] будем нумеровать в следующей последовательности:

$$[\Pi] = \begin{array}{c} \text{сечения} \\ E \\ C \\ R_A \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \text{ветви дерева} & & & \text{хорды} & & \\ E & C & R_A & R_x & L & I \\ \hline 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline \underbrace{\hspace{10em}}_{[1]} & & & \underbrace{\hspace{10em}}_{[x]} & & \end{array} \right] = [1, x]. \quad \leftarrow \text{ветви}$$

Таким образом, принят следующий порядок нумерации столбцов матрицы сечений $[\Pi]$: источники ЭДС E - емкости C - сопротивления ветвей дерева R_A - сопротивления хорд R_x - индуктивности L - источники тока I . Строки матрицы сечений пронумерованы так: источники ЭДС E - емкости C - сопротивления ветвей дерева R_A . При этом матрица независимых сечений $[\Pi]$ может быть разбита на две подматрицы в соответствии с соотношением (8).

Составим теперь следующие матрицы-столбцы (многомерные векторы):

- \vec{i}_E - вектор токов в ветвях, содержащих источники ЭДС E ;
- \vec{v}_E - вектор напряжений ветвей, содержащих источники ЭДС E ;
- \vec{i}_C, \vec{v}_C - векторы токов и напряжений ветвей, содержащих емкости C ;
- $\vec{i}_{R_A}, \vec{v}_{R_A}$ - вектор токов и напряжений сопротивлений, входящих в состав дерева графа;
- $\vec{i}_{R_x}, \vec{v}_{R_x}$ - векторы токов и напряжений сопротивлений, входящих в хорды;
- \vec{i}_L, \vec{v}_L - векторы токов и напряжений ветвей, содержащих индуктивности L ;
- \vec{I}, \vec{v}_I - векторы токов источников тока и напряжений на зажимах источников тока.

Элементы всех введенных многомерных векторов являются функциями времени. С учетом введенных векторов составим следующие матрицы-столбцы, которые также являются многомерными векторами:

$$\vec{J}_A = [\vec{i}_E \quad \vec{i}_C \quad \vec{i}_{R_A}]^t \text{ - вектор токов в ветвях дерева;}$$

$$\vec{J}_x = [\vec{i}_{R_x} \quad \vec{i}_L \quad \vec{I}]^t \text{ - вектор токов в хордах;}$$

$$\vec{v}_A = [\vec{v}_E \quad \vec{v}_C \quad \vec{v}_{R_A}]^t \text{ - вектор напряжений в ветвях дерева;}$$

$$\vec{v}_x = [\vec{v}_{R_x} \quad \vec{v}_L \quad \vec{v}_I]^t \text{ - вектор напряжений в хордах.}$$

Запишем матрицу сечений для хорд $[X]$ следующим образом:

$$[X] = C \begin{matrix} \begin{matrix} \text{сечения} \\ \downarrow E \\ R_x \\ R_A \end{matrix} & \begin{matrix} R_x & L & I \end{matrix} & \begin{matrix} \leftarrow \\ \text{хорды} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{\pi}_{ERx} & \overline{\pi}_{EL} & \overline{\pi}_{EI} \\ \overline{\pi}_{CRx} & \overline{\pi}_{CL} & \overline{\pi}_{CI} \\ \overline{\pi}_{RARx} & \overline{\pi}_{RAL} & \overline{\pi}_{RAI} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (53)$$

Введенная система индексов позволяет легко составлять входящие в матрицу $[X]$ подматрицы и определять их размерность. Так число строк каждой подматрицы $\overline{\pi}_{ks}$ равно числу элементов, тип которых указан в первом индексе, а число столбцов - числу элементов, тип которых указан во втором индексе. Например, подматрица $\overline{\pi}_{CL}$ имеет число строк равных числу емкостей, входящих в состав дерева графа, и число столбцов, равных числу индуктивностей, входящих в состав хорд.

Подставим в уравнение (51) введенные выше подматрицы \overline{J}_A , \overline{J}_x , \overline{V}_A и \overline{V}_x , а также матрицу сечений для хорд в форме (53).

$$\begin{bmatrix} \overline{i}_E \\ \overline{i}_C \\ \overline{i}_{RA} \\ \overline{V}_{Rx} \\ \overline{V}_L \\ \overline{V}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\overline{\pi}_{ERx} & -\overline{\pi}_{EL} & -\overline{\pi}_{EI} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ -\overline{\pi}_{CRx} & -\overline{\pi}_{CL} & -\overline{\pi}_{CI} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ -\overline{\pi}_{RARx} & -\overline{\pi}_{RAL} & -\overline{\pi}_{RAI} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{\pi}_{ERx}^t & \overline{\pi}_{CRx}^t & \overline{\pi}_{RARx}^t \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{\pi}_{EL}^t & \overline{\pi}_{CL}^t & \overline{\pi}_{RAL}^t \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{\pi}_{EI}^t & \overline{\pi}_{CI}^t & \overline{\pi}_{RAI}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{i}_{Rx} \\ \overline{i}_L \\ \overline{I} \\ \overline{E} \\ \overline{V}_C \\ \overline{V}_{RA} \end{bmatrix}$$

Исключим из рассмотрения токи через источники ЭДС \overline{i}_E и напряжения на зажимах источников тока \overline{V}_I , поскольку эти величины обычно не представляют интереса. Исключение указанных величин из последней матрицы выполняется следующим образом: производится перемножение матриц, в результате чего получается система алгебраических уравнений; затем из системы алгебраических уравнений исключают-

ся два уравнения для величин \vec{i}_E и \vec{v}_I , а оставшиеся 4 уравнения записываются в матричном виде. В результате получаем

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_{RA} \\ \vec{v}_{Rx} \\ \vec{v}_L \\ \vec{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{R}_{RA} R_x & -\bar{\pi}_{RA, L} & \bar{0} & -\bar{\pi}_{RA, I} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{\pi}_{CRx}^t & \bar{0} & \bar{\pi}_{ERx}^t & \bar{\pi}_{RA, Rx}^t \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{\pi}_{CL}^t & \bar{0} & \bar{\pi}_{EL}^t & \bar{\pi}_{RA, L}^t \\ -\bar{\pi}_{CRx} & -\bar{\pi}_{CL} & \bar{0} & -\bar{\pi}_{CI} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_{Rx} \\ \vec{i}_L \\ \vec{v}_c \\ \vec{i}_{RA} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Исключим из этого уравнения переменные, не являющиеся переменными состояниями. Для этого воспользуемся законом Ома и получаем

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Rx} &= \bar{R}_x \vec{i}_{Rx}, & \vec{v}_{RA} &= \bar{R}_A \vec{i}_{RA}, \\ \vec{v}_L &= \bar{L} \frac{di_L}{dt}, & \vec{i}_c &= \bar{C} \frac{dv_c}{dt}. \end{aligned} \quad (55)$$

Уравнения (55) являются по существу компонентными уравнениями электрической цепи, состоящей из ветвей, в состав каждой из которых входит один элемент. Входящие в состав уравнений (55) матрицы \bar{R}_x , \bar{R}_A , \bar{L} и \bar{C} являются диагональными матрицами:

$$\bar{R}_x = \begin{bmatrix} R_{x1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{x2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{xp} \end{bmatrix}$$

- матрица сопротивлений, входящих в состав хорд; размер этой матрицы $p \times p$ определяется числом p сопротивлений, входящих в состав хорд;

$$\bar{R}_A = \begin{bmatrix} R_{A1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{A2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{Ak} \end{bmatrix}$$

- матрица сопротивлений, входящих в состав дерева; размер матрицы $k \times k$ определяется числом k сопротивлений, входящих в состав дерева;

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_q \end{bmatrix}$$

- матрица индуктивностей, входящих в состав хорд; размер матрицы $q \times q$ определяется числом q индуктивностей, входящих в состав хорд;

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_\mu \end{bmatrix} \quad \text{- матрица емкостей, входящих в состав}$$

дерева; размер матрицы $\mu \times \mu$ определяется числом μ емкостей, входящих в состав дерева.

Подставим соотношения (55) в матричное уравнение (54). Для этого записываем уравнение (54) в алгебраическом виде, затем подставляем в алгебраические уравнения соотношения (55) и записываем полученные уравнения в матричном виде. В результате получаем следующее матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{\pi}_{R_A R_x} & \bar{0} & \bar{0} \\ -\bar{\pi}_{R_A R_x}^t \bar{R}_A & \bar{R}_x & \bar{0} & \bar{0} \\ -\bar{\pi}_{R_A L}^t \bar{R}_A & \bar{0} & \bar{L} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{\pi}_{C R_x} & \bar{0} & \bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_{R_A} \\ \bar{i}_{R_x} \\ \frac{d}{dt} \bar{i}_L \\ \frac{d}{dt} \bar{i}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\pi}_{R_A L} & \bar{0} & -\bar{\pi}_{R_A I} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{\pi}_{C R_x}^t & \bar{0} & \bar{\pi}_{E R_x}^t \\ \bar{0} & \bar{\pi}_{C L}^t & \bar{0} & \bar{\pi}_{E L}^t \\ -\bar{\pi}_{C L} & \bar{0} & -\bar{\pi}_{C I} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_L \\ \bar{i}_C \\ \bar{I} \\ \bar{E} \end{bmatrix}$$

Проведем разбиение матриц в последнем соотношении на подматрицы (блоки) так, как показано пунктиром. Тогда последнее матричное уравнение можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{i}_R \\ \frac{d}{dt} \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_{bN} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

где входящие в это уравнение матрицы записываются следующим образом:

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{\pi}_{R_A R_x} \\ -\bar{\pi}_{R_A R_x}^t \bar{R}_A & \bar{R}_x \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{A}_{21}] = \begin{bmatrix} -\bar{\pi}_{RAI}^t \cdot R_A & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{\pi}_{CRx} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{22} = \begin{bmatrix} \bar{L} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{C} \end{bmatrix},$$

$$\vec{i}_R = \begin{bmatrix} \vec{i}_{RA} \\ \vec{i}_{Rx} \end{bmatrix} \quad \text{-- вектор токов в сопротивлениях электрической цепи,}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{i}_L \\ \vec{p}_C \end{bmatrix} \quad \text{-- вектор состояния электрической цепи,}$$

$$\bar{B}_{11} = \begin{bmatrix} -\bar{\pi}_{RAI} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{\pi}_{CRx}^t \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{12} = \begin{bmatrix} -\bar{\pi}_{RAI} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{\pi}_{ERx}^t \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_{21} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{\pi}_{Cb}^t \\ -\bar{\pi}_{CL} & \bar{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{22} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{\pi}_{EL}^t \\ -\bar{\pi}_{CL} & \bar{0} \end{bmatrix},$$

$$\vec{x}_{bN} = \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{E} \end{bmatrix} \quad \text{-- вектор входа электрической цепи.}$$

Выполнив умножение матриц в уравнении (56) с учетом того, что элементами подматрицы \bar{A}_{12} являются нули, получим

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} \vec{i}_R &= \bar{B}_{11} \vec{x} + \bar{B}_{12} \vec{x}_{bN}, \\ \bar{A}_{21} \vec{i}_R + \bar{A}_{22} \frac{d\vec{x}}{dt} &= \bar{B}_{21} \vec{x} + \bar{B}_{22} \vec{x}_{bN}. \end{aligned} \quad (57)$$

Умножая первое из этих уравнений на обратную матрицу \bar{A}_{11}^{-1} получим

$$\bar{i}_R = \bar{A}_{11}^{-1} \cdot \bar{B}_{11} \cdot \bar{x} + \bar{A}_{11}^{-1} \cdot \bar{B}_{12} \cdot \bar{x}_{\delta n}.$$

Умножив теперь второе уравнение системы (57) на обратную матрицу \bar{A}_{22}^{-1} и подставив в полученное уравнение величину \bar{i}_R , будем иметь

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{A}_{22}^{-1} (\bar{B}_{21} - \bar{A}_{21} \bar{A}_{11}^{-1} \bar{B}_{11}) \bar{x} + \bar{A}_{22}^{-1} (\bar{B}_{22} - \bar{A}_{21} \bar{A}_{11}^{-1} \bar{B}_{12}) \bar{x}_{\delta n},$$

$$\bar{i}_R = \bar{A}_{11}^{-1} \bar{B}_{11} \bar{x} + \bar{A}_{11}^{-1} \bar{B}_{12} \bar{x}_{\delta n}. \quad (58)$$

Первое уравнение системы (58) описывает изменение состояния $\bar{x}(t)$ цепи под воздействием внешних источников $\bar{x}_{\delta n}(t)$. Второе уравнение этой системы показывает, как при этом изменяются токи в сопротивлениях электрической цепи. Таким образом, дифференциально-векторное уравнение (58) представляет собой уравнение электрической цепи в пространстве состояний. Для получения уравнений типа (58) для электрической цепи без зависимых источников необходимо выполнить ряд стандартных приемов для построения матриц \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , которые, как следует из сравнения уравнений (47) и (58), имеют вид

$$\bar{A} = \bar{A}_{22}^{-1} (\bar{B}_{21} - \bar{A}_{21} \bar{A}_{11}^{-1} \bar{B}_{11}), \quad \bar{C} = \bar{A}_{11}^{-1} \cdot \bar{B}_{11},$$

$$\bar{B} = \bar{A}_{22}^{-1} (\bar{B}_{22} - \bar{A}_{21} \bar{A}_{11}^{-1} \bar{B}_{12}), \quad \bar{D} = \bar{A}_{11}^{-1} \cdot \bar{B}_{12}.$$

Алгоритм формирования уравнений в пространстве состояний для электрических цепей без зависимых источников можно сформулировать следующим образом:

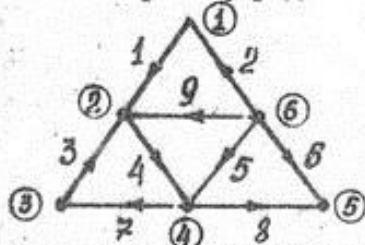
1. Строится граф электрической цепи.
2. Выбирается дерево графа, причем в состав дерева включаются: все источники ЭДС, все емкости и часть сопротивлений, если это необходимо для получения полного дерева. В состав хорд включаются индуктивности, источники тока и часть сопротивлений.
3. Строится матрица сечений для хорд $[X]$ по формуле (53).
4. По известной матрице сечений для хорд $[X]$ определяются все элементы матриц \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} .

ЗАДАЧИ

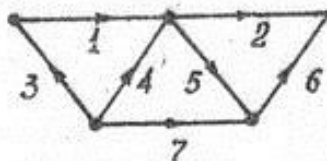
1. Нарисовать граф, у которого упрощенная матрица инцидентий имеет вид

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

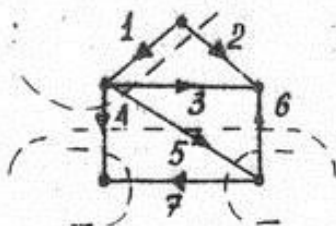
2. Рассмотрите орграф, показанный на рисунке. Составьте матрицу инцидентий. Точно установите, какие из следующих множеств ветвей являются множествами сечения: (1,9,5,8), (1,9,4), (6,8), (1,9,4,7,6), (3,4,5,6).



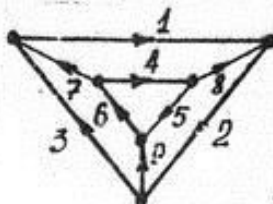
3. Найти системы независимых сечений для эл.цепи, граф которой имеет вид



4. Рассмотрите орграф, показанный на рисунке. Напишите уравнения, соответствующие обозначенным множествам сечения. Являются ли обозначенные множества сечения линейно независимыми?



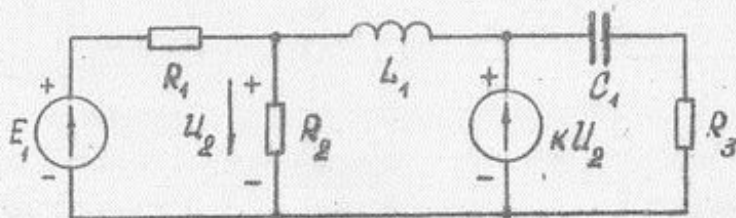
5. Установите разницу между основными контурами и неосновными независимыми контурами для представленного на рисунке орграфа.



6. Докажите [3], что если матрицы $[A_a]$ и $[B_a]$ составлены так, что их столбцы соответствуют одним и тем же элементам к пронумерованы в одинаковом порядке, то имеет место соотношение

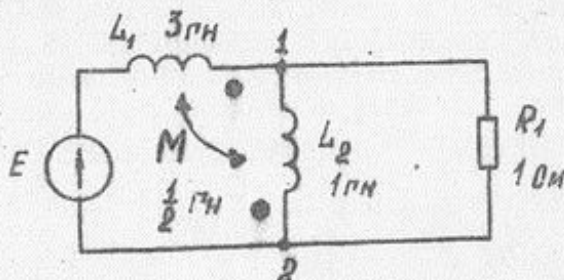
$$[A_a][B_a]^t = [0] \quad \text{и} \quad [B_a][A_a]^t = [0].$$

7. Составить компонентные уравнения для схемы, представленной на рисунке. Получить матрицу сопротивлений ветвей $[Z_B]$.

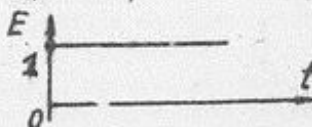


8. На рисунке показана электрическая цепь и обозначены величины ее элементов.

Требуется составить граф цепи, выбрать направления токов в ветвях, выбрать дерево; записать контурные уравнения с использованием топологической матрицы контуров:



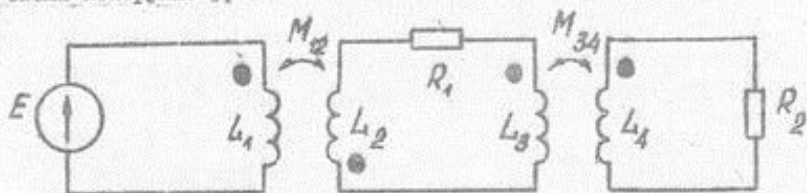
9. Определите ток в сопротивлении $3R$ в схеме на рис. 15, если напряжение источника изменяется во времени по закону $E = 1(t \geq 0)$, $E = 0(t < 0)$.



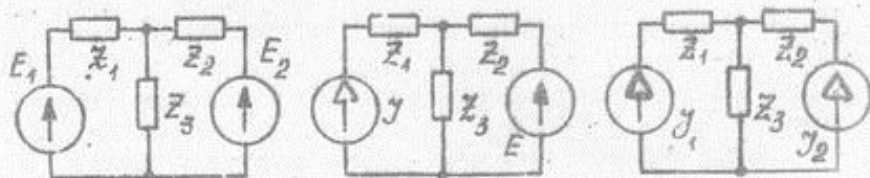
Указание: используйте для решения задачи преобразование Лапласа.

10. Получите систему интегро-дифференциальных контурных и узловых уравнений, используя компонентные уравнения (14) и (16).

11. Составьте без использования топологических матриц по виду схемы контурные уравнения и запишите их в матричном виде.

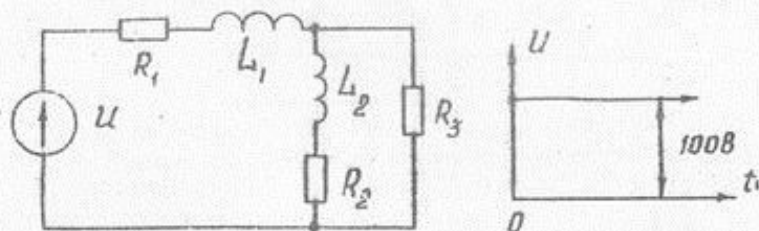


12. Методом контурных токов определите ток в сопротивлении \bar{z}_3 в следующих трех схемах:



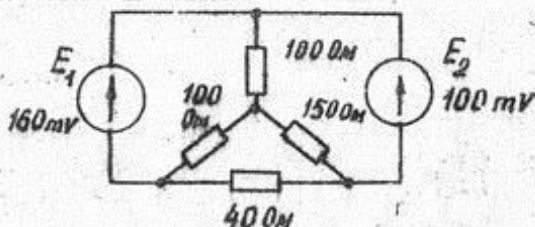
13. В представленной на рисунке схеме начальные токи в индуктивностях равны нулю. Найдите токи в сопротивлениях R_1 и R_2 , если $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = R_3 = 200 \Omega$, $L_1 = 1 \text{ мГн}$, $L_2 = 2 \text{ мГн}$, $u = 100 \text{ В}$ ($t \geq 0$) и $u = 0$ ($t < 0$).

Постройте графики зависимости найденных токов от времени.



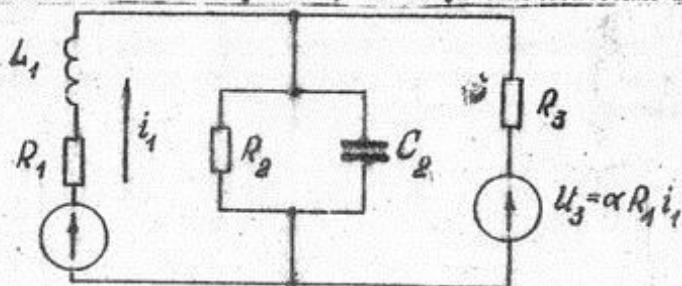
Указание: используйте для решения задачи преобразование Лапласа.

14. Методом узловых потенциалов рассчитать токи в ветвях схемы, представленной на рисунке.

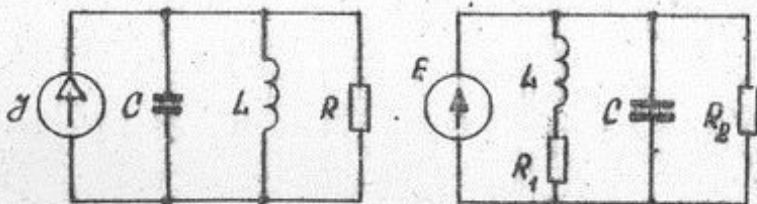


15. Найдите условие равновесия мостовой схемы, представленной на рис.23.

16. Записать контурные и узловые уравнения для цепи, содержащей зависимый источник напряжения, используя топологические матрицы.



17. Составьте уравнения в пространстве состояний для электрических цепей, изображенных на рисунке.

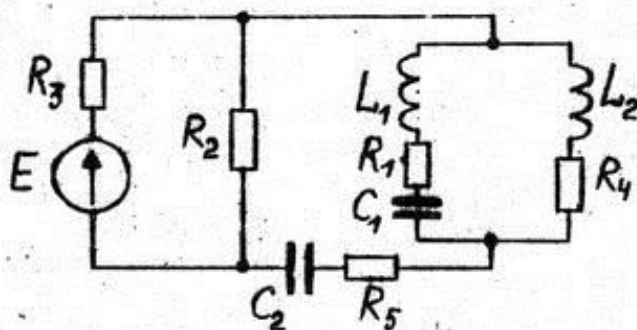


Используйте в качестве переменных состояния

а) токи в индуктивностях и напряжения в емкостях;

б) заряды на емкостях и потоки индукции в индуктивностях.

18. Составьте уравнения в пространстве состояний для электрической цепи, представленной на рисунке [2]. Запишите полученные уравнения в матричной форме.



19. Приведите примеры электрических схем /схем с особенностями/, для которых нельзя составить уравнения в пространстве состояний по рассмотренному в §4.2 алгоритму [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сигорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем. М., Советское радио, 1976.
2. Дезоер Ч.А., Ку Э.С. Основы теории цепей. Пер. с англ. под ред. проф. В.А.Смирнова. М., Связь, 1976.
3. Сешу С., Балебанян Н. Анализ линейных цепей. М.-Л., Госэнергоиздат, 1963.
4. Андриянов А.В., Крылов В.В. Анализ электрических цепей на ЭВМ, Учебное пособие. Горький, Горьковский политехнический институт им. А.А.Еданова, 1979.