

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования**

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В.И. Кривошеев

Спектральные представления сигналов

Учебно-методическое пособие

Нижний Новгород

2005

УДК 621.391.828

Спектральные представления сигналов / Сост. В.И.Кривошеев. - Н.Новгород: ННГУ, 2005. - 34 с.

Учебно-методическое пособие содержит методические указания к практическим занятиям, разработанные в соответствии с программой курса "Основы радиоэлектроники" для студентов, обучающихся по специальностям "Радиофизика и электроника" и "Информационные системы". Указания содержат основные теоретические сведения по рядам Фурье и преобразованию Фурье, примеры решения задач спектрального анализа радиотехнических сигналов, задачи для самостоятельной работы.

Составитель доцент В. И. Кривошеев

Рецензент доцент В.Д.Пикулин

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, 2005

1. РЯДЫ ФУРЬЕ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

1.1. Основные теоретические сведения

Понятие ряда Фурье связано с именем французского инженера Жана Батиста Жозефа де Фурье (1768 – 1830 г.г.), который 21 декабря 1807 г. на заседании Французской академии выступил с утверждением о том, что произвольную функцию, заданную на некотором конечном интервале любой негладкой и даже разрывной кривой, можно представить бесконечной суммой косинусоидальных и синусоидальных функций. Эта теорема, воспринятая поначалу математиками как совершенно невероятная, стала предметом их пристального внимания в течение столетия и в настоящее время признается как одно из величайших достижений в истории математики.

Итак, пусть на интервале времени (t_1, t_2) задана бесконечная система действительных функций $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), \dots$ взаимно ортогональных друг другу, т.е.

$$\int_{t_1}^{t_2} u_i(t)u_j(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ k_i \neq 0, (k_i < \infty), & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Обобщенным рядом Фурье называют следующее соотношение, представляющее произвольную детерминированную функцию времени $s(t)$:

$$s(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + \dots + c_nu_n(t) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} c_iu_i(t), \quad (1.1)$$

где $c_i = \frac{1}{k_i} \int_{t_1}^{t_2} s(t)u_i(t)dt.$

Совокупность коэффициентов $\{c_i\}$ носит название спектра сигнала $s(t)$, а произведение $c_iu_i(t)$ определяется как спектральная составляющая сигнала. Таким образом, обобщенный ряд Фурье представляет функцию в виде суммы

спектральных составляющих. Для множества комплексных функций $\{u_i(t)\}$, взаимно ортогональных на интервале (t_1, t_2) , т.е. для которых справедливо соотношение:

$$\int_{t_1}^{t_2} u_i(t)u_j^*(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ k_i, & \text{при } i = j. \end{cases}$$

ряд (1.1) представляется в виде:

$$s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(t), \quad (1.2)$$

где $c_i = \frac{1}{k_i} \int_{t_1}^{t_2} s(t)u_i^*(t)dt$, * - знак комплексного сопряжения.

Таким образом, для одной и той же функции можно написать много рядов Фурье, различающихся выбором ортогональных систем функций. Какому из рядов отдать предпочтение? Решение зависит от целей, поставленных при представлении сложной функции рядом Фурье. Так для радиофизических применений наибольшее распространение получили представления сигналов тригонометрическим и эквивалентным ему комплексным экспоненциальным рядами Фурье, поскольку именно такие представления позволяют существенно упростить решение задач прохождения сигналов через линейные стационарные (с постоянными параметрами) системы. Действительно, целесообразность представления сложного сигнала суммой простых (элементарных) связана со справедливостью для линейных систем принципа суперпозиции, позволяющего находить реакцию системы на сумму воздействий как сумму реакций на элементарные компоненты входного сигнала. Выбор же в качестве элементарных сигналов ортогональной системы синусоидальных и косинусоидальных функций объясняется тем обстоятельством, что среди действительных функций времени только гармонические колебания сохраняют свою форму при прохождении через линейные стационарные системы, изменяя лишь амплитуду и фазу. Поэтому для анализа передачи гармонических колебаний через линейные цепи разработаны весьма простые методы (метод комплексных амплитуд или символический метод).

Поскольку система тригонометрических функций кратных аргументов $\{\sin n\Omega t, \cos n\Omega t\}$ является полной и ортогональной на интервале времени (t_0, t_0+T) , где t_0 - произвольная величина, а $T=2\pi/\Omega$ - период базисных функций, то произвольный сигнал $s(t)$ с конечной энергией на интервале (t_0, t_0+T) представим рядом

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t), t_0 \leq t \leq t_0 + T. \quad (1.3)$$

Коэффициенты a_0, a_n и b_n определяются соотношениями:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos n\Omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin n\Omega t dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

Соотношения (1.3) и (1.4) определяют *тригонометрический ряд Фурье*, который также можно записать в виде:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n), t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad (1.5)$$

$$\text{где } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \varphi_n = -\arctg(b_n / a_n). \quad (1.6)$$

Для множества комплексных экспоненциальных функций $\{e^{jn\Omega t}\}$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), взаимно ортогональных на интервале (t_0, t_0+T) при любом t_0 и $T=2\pi/\Omega$, соотношения (1.2) определяют *экспоненциальный ряд Фурье*:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\Omega t}, t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad (1.7)$$

$$\text{где } \dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-jn\Omega t} dt. \quad (1.8)$$

Заметим, что тригонометрический (1.3) и экспоненциальный (1.7) ряды Фурье не являются двумя различными типами рядов, а представляют два способа выражения одного ряда. Действительно, формулы (1.4) и (1.8) позволяют убедиться в справедливости выражений, связывающих коэффициенты рядов (1.3) и (1.7):

$$\dot{C}_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad a_0 = C_0, \quad a_n = \dot{C}_n + \dot{C}_{-n}, \quad b_n = j(\dot{C}_n - \dot{C}_{-n}). \quad (1.9)$$

До сих пор речь шла о представлении функции $s(t)$ рядом Фурье на конечном интервале (t_0, t_0+T) . Вне этого интервала функция $s(t)$ и соответствующий ей ряд Фурье могут не совпадать. Однако, если $s(t)$ - периодическая с периодом T функция, то представление ее рядом Фурье справедливо на всем бесконечном интервале времени $(-\infty, \infty)$. Действительно, для периодической функции $s(t)$ справедливо: $s(t) = s(t+mT)$, $m=\pm 1, \pm 2, \dots$. Очевидно, что правая часть (1.7) есть периодическая функция (с периодом $T=2\pi/\Omega$), поскольку $e^{jn\Omega t} = e^{jn\Omega(t+mT)}$. Таким образом, для периодической функции $s(t)$ с периодом T ряды (1.3), (1.4) и (1.7), (1.8) справедливы для всего интервала $(-\infty, \infty)$, причем величина t_0 произвольная.

1.2. Спектр периодического сигнала

Тригонометрический ряд Фурье (1.8) представляет периодический сигнал $s(t)$ с периодом T суммой постоянной составляющей и гармонических колебаний (гармоник) $A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$), с частотами $n\Omega$, образующими гармоническую последовательность (т.е. кратными основной частоте $\Omega=2\pi/T$), амплитудами A_n и фазами φ_n . Компоненты $A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)$ называют спектральными или частотными составляющими. Зависимости амплитуд гармонических компонент от частоты называют *амплитудным спектром*, а фаз от частоты – *фазовым спектром*. Для периодической функции спектр существует только на частотах $\omega = \Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots$, т.е. он *дискретный*. Графически такой спектр изображают вертикальными линиями на частотах $\omega = \Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots$, высота которых пропорциональна амплитуде (фазе) соответствующей частотной составляющей. Такой спектр называют иногда *линейчатым*.

При использовании экспоненциального ряда Фурье (1.7) периодическая функция представляется суммой постоянной составляющей и спектральных составляющих вида $\dot{C}_n e^{jn\Omega t}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) с частотами $\pm\Omega, \pm 2\Omega, \pm 3\Omega, \dots$, и комплексными амплитудами \dot{C}_n . Появление отрицательных частот связано с

представлением действительных гармонических колебаний в форме: $2 \cos \Omega t = e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}$, а потому отрицательные частоты – понятие математическое, а не физическое. С этой точки зрения спектр, построенный на основе коэффициентов \dot{C}_n комплексного ряда Фурье (1.7), иногда называют математическим в отличие от физического спектра, представленного коэффициентами A_n и φ_n тригонометрического ряда Фурье (1.5). Выражая комплексную амплитуду в форме $\dot{C}_n = C_n e^{j\psi_n}$, приходим к выводу, что для спектрального представления периодической функции необходимо иметь два линейчатых спектра: спектр амплитуд, отображающий зависимость C_n , и спектр фаз, отображающий зависимость ψ_n от частоты, принимающей дискретные значения $\omega = n\Omega$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Из соотношений (1.6) и (1.9) следует, что $C_n = A_n/2$, $\psi_n = \varphi_n$, а также $C_{-n} = C_n$, $\varphi_{-n} = -\varphi_n$, поэтому амплитудный спектр действительной функции представляется четной функцией частоты, а фазовый спектр – нечетной функцией частоты. Не следует думать, что только периодические функции обладают дискретным спектром. Например, колебание вида $s(t) = A \cos \Omega t + B \cos \sqrt{2} \Omega t$ представляет собой непериодическое колебание со спектром, состоящим из двух спектральных линий на частотах Ω и $\sqrt{2} \Omega$.

1.3. Примеры нахождения спектров периодических сигналов

1. Представим рядом Фурье периодическую последовательность прямоугольных видеоимпульсов, изображенную на рис. 1.

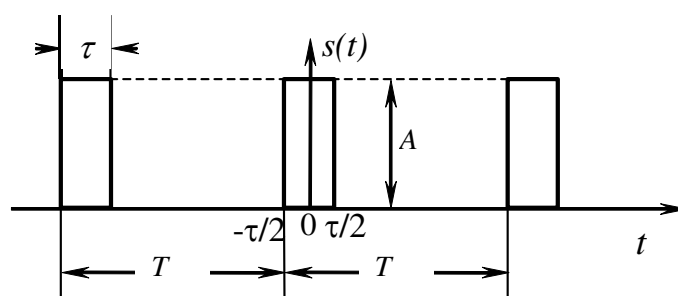


Рис.1

Аналитическая запись этого сигнала на интервале в один период имеет вид:

$$s(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & \tau/2 < t < T - \tau/2. \end{cases}$$

Для нахождения коэффициентов \dot{C}_n экспоненциального ряда Фурье выберем

$t_0 = -\tau/2$:

$$\begin{aligned} \dot{C}_n &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{-\tau/2+T} s(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jn\Omega t} dt = -\frac{A}{jn\Omega T} e^{-jn\Omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{2A}{2jn\Omega T} (e^{jn\Omega\tau/2} - e^{-jn\Omega\tau/2}) = \frac{2A}{n\Omega T} \sin\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega\tau/2)}{(n\Omega\tau/2)} = \\ &= \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(n\pi\tau/T)}{(n\pi\tau/T)} = \frac{A}{q} \frac{\sin(n\pi/q)}{(n\pi/q)}, \end{aligned}$$

где введено обозначение скважности импульсной последовательности $q=T/\tau$ и учтено, что $\Omega=2\pi/T$.

Итак, экспоненциальный (комплексный) ряд Фурье имеет вид:

$$s(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T} e^{jn\Omega t}. \quad (1.10)$$

С учетом действительности коэффициентов $\dot{C}_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ имеем для коэффициентов тригонометрического ряда соотношения:

$$b_n = 0, \quad a_n = 2\dot{C}_n = 2 \frac{A\tau}{T} \frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T}, \quad a_0 = C_0 = \frac{A\tau}{T}.$$

Поэтому тригонометрический ряд Фурье принимает форму:

$$s(t) = \frac{A\tau}{T} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T} \cos n\Omega t \right]. \quad (1.11)$$

При действительных коэффициентах \dot{C}_n для графического представления частотного спектра достаточно одного графика (рис.2).

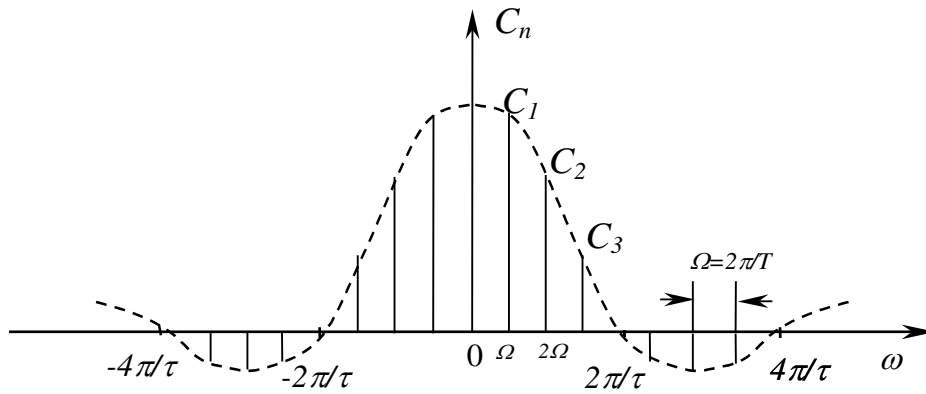


Рис.2

На рис. 3а и 3б представлены физические амплитудный

$A_n = 2 \frac{A\tau}{T} \left| \frac{\sin(n\Omega\tau/2)}{n\Omega\tau/2} \right|, n = 1, 2, \dots$ и фазовый $\varphi_n(\omega)$ спектры соответственно. При

построении фазового спектра изменение знака функции $\frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T}$ отнесено к

скачку ее фазы на π с учетом соотношений $e^{\pm j2k\pi} = 1, e^{\pm j(2k+1)\pi} = -1$, где $k = 0, 1, 2, \dots$.

Полезно изучить изменения, происходящие в спектре последовательности при изменении длительности импульсов τ и периода их повторения T , построив спектры для конкретных значений указанных параметров, как это предложено в задаче 1.

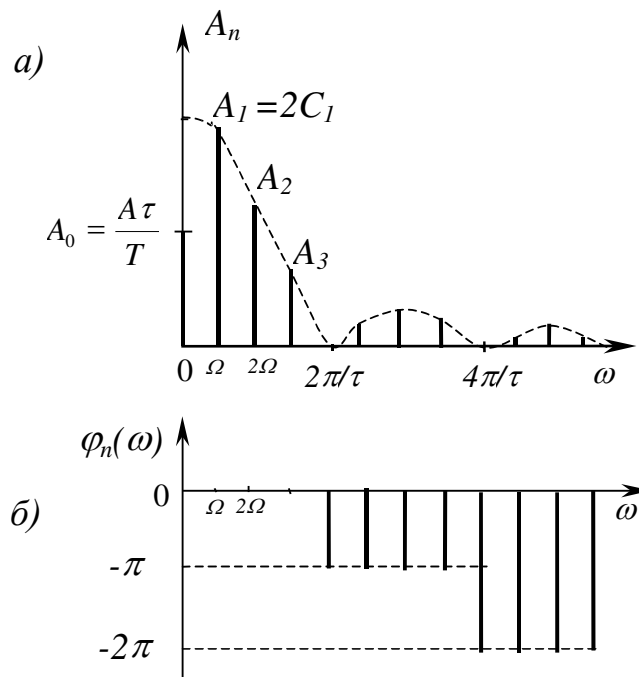


Рис.3

2. Представим экспоненциальным рядом Фурье «выпрямленное» синусоидальное колебание $s(t) = A|\sin\Omega_1 t|$, $-\infty < t < \infty$, изображенное на рис.4.

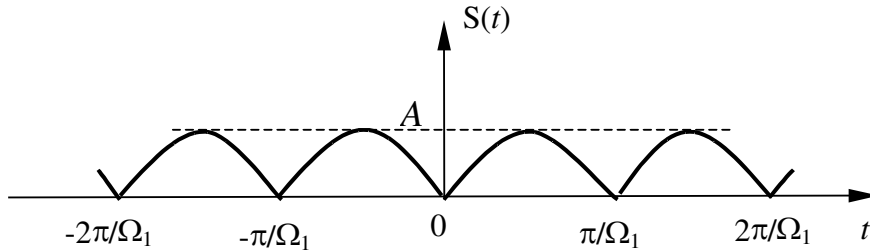


Рис.4

Для этой функции $T = \pi/\Omega_1$, $\Omega = 2\Omega_1$. Выбрав $t_0 = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} \dot{C}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{A\Omega_1}{\pi} \int_0^{\pi/\Omega_1} \sin(\Omega_1 t) e^{-j2\Omega_1 n t} dt = \\ &= \frac{A\Omega_1}{\pi} \int_0^{\pi/\Omega_1} \frac{e^{j\Omega_1 t} - e^{-j\Omega_1 t}}{2j} e^{-j2\Omega_1 n t} dt = \frac{A\Omega_1}{2j\pi} \int_0^{\pi/\Omega_1} e^{-j\Omega_1(2n-1)t} dt - \\ &- \frac{A\Omega_1}{2j\pi} \int_0^{\pi/\Omega_1} e^{-j\Omega_1(2n+1)t} dt = \frac{A}{2\pi(2n-1)} e^{-j\Omega_1(2n-1)t} \Big|_0^{\pi/\Omega_1} - \\ &- \frac{A}{2\pi(2n+1)} e^{-j\Omega_1(2n+1)t} \Big|_0^{\pi/\Omega_1} = -\frac{A}{\pi(2n-1)} + \frac{A}{\pi(2n+1)} = -\frac{2A}{\pi(4n^2-1)}. \end{aligned}$$

Экспоненциальный ряд Фурье имеет вид: $s(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} e^{j2\Omega_1 n t}$,

а спектр представлен на рис.5.

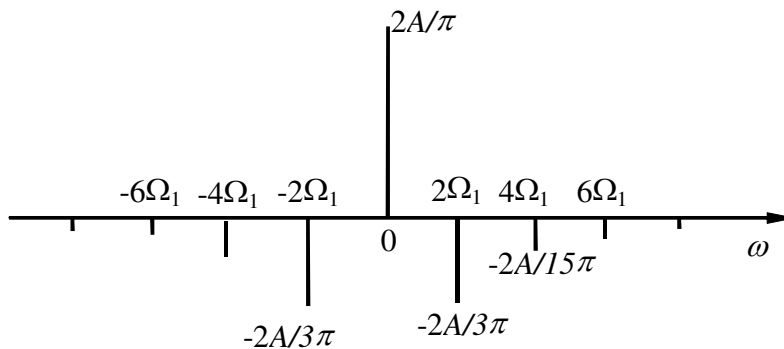


Рис.5

Обратите внимание на обогащение спектра синусоидального сигнала после его нелинейного преобразования.

3. Представим тригонометрическим рядом Фурье периодическую последовательность импульсов, образованную сигналом $U_m \cos \Omega t$, ограниченным на уровне U_0 ($|U_0| < U_m$) и изображенном на рис.6. Период последовательности $T = 2\pi/\Omega$. Для характеристики такого сигнала вводят специальный параметр - угол отсечки θ , определяемый из соотношения $U_m \cos \theta = U_0$, т.е. $\theta = \arccos(U_0/U_m)$. Величина 2θ определяет длительность импульсов, выраженную в угловых единицах.

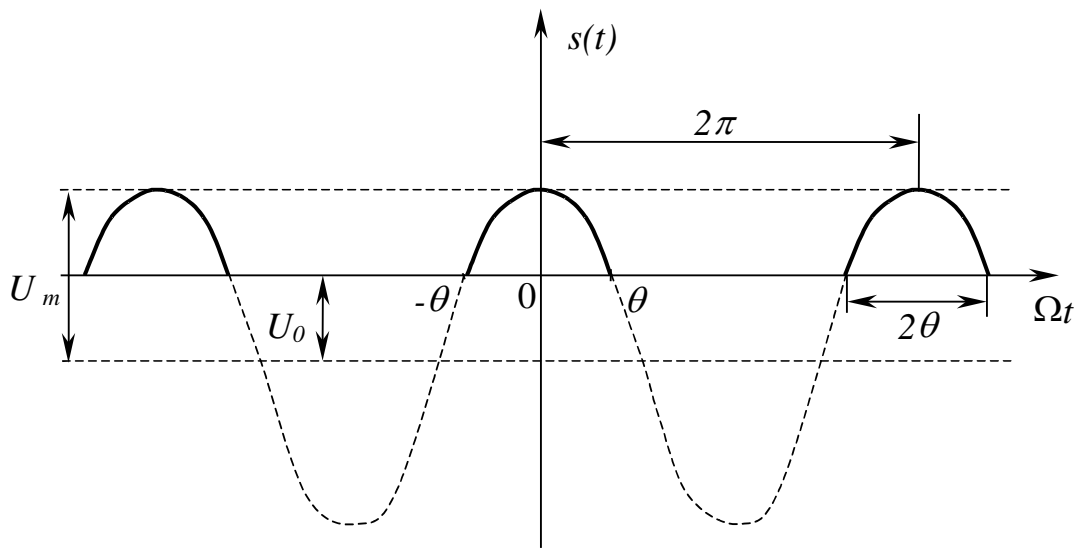


Рис.6

Из рис.6 очевидна аналитическая запись одного импульса рассматриваемой последовательности:

$$s(t) = U_m \cos \Omega t - U_0, \quad -\theta < \Omega t < \theta.$$

В силу четности $s(t)$ коэффициенты

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} s(t) \sin n\Omega t d\Omega t = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

поэтому ряд Фурье принимает вид:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t.$$

Постоянная составляющая последовательности:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} (U_m \cos \Omega t - U_0) d\Omega t = \frac{U_m}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta).$$

Амплитудный коэффициент первой гармоники:

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} (U_m \cos \Omega t - U_0) \cos \Omega t d\Omega t = \frac{U_m}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta).$$

Аналогичные вычисления приводят к следующему соотношению для амплитудных коэффициентов a_n гармонических составляющих при $n = 2, 3, 4, \dots$:

$$a_n = \frac{2U_m}{\pi} \frac{\sin n\theta \cos \theta - n \cos n\theta \sin \theta}{n(n^2 - 1)}.$$

Результат записывают в виде:

$a_0 = U_m \gamma_0(\theta), \dots, a_n = U_m \gamma_n(\theta)$, где $\gamma_0(\theta), \gamma_1(\theta), \dots, \gamma_n(\theta), \dots$ - так называемые функции Берга:

$$\gamma_0(\theta) = \frac{1}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta), \quad \gamma_1(\theta) = \frac{1}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta), \quad \dots,$$

$$\gamma_n(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin n\theta \cos \theta - n \cos n\theta \sin \theta}{n(n^2 - 1)}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Выбор режима работы (угла отсечки) нелинейного устройства, формирующего импульсы из гармонического колебания, весьма важен при усилении колебаний, умножении частоты и других преобразованиях. Графики функций Берга, таблица и программа для расчета их на ЭВМ приведены в [2].

1.4. Задачи для самостоятельной работы

1. Постройте амплитудные спектры периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов при следующих значениях параметров: $A=1$ в, $\tau = 0,05$ с, а) $T= 0,1$ с, б) $T= 0,25$ с, в) $T= 0,5$ с, г) $T=1,0$ с.

2. Покажите, что для сдвинутой во времени на t_3 периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов (рис.7) ряд Фурье можно записать в виде:

$$s(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\tau / T)}{n\pi\tau / T} e^{-jn\Omega t_3} e^{jn\Omega t}.$$

Постройте амплитудный и фазовый спектры. Сделайте вывод о влиянии сдвига во времени последовательности на ее спектр.

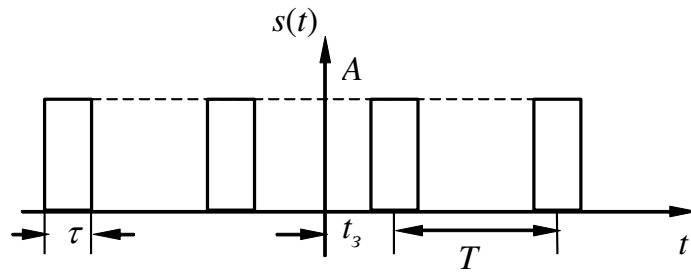


Рис.7

3. Покажите, что для «выпрямленного» однопериодным выпрямителем гармонического колебания с частотой Ω , изображенного на рис. 8, ряд Фурье имеет

$$\text{вид: } s(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \Omega t - \frac{2A}{\pi} \left(\frac{\cos 2\Omega t}{3} + \frac{\cos 4\Omega t}{15} + \dots + \frac{\cos 2n\Omega t}{4n^2 - 1} + \dots \right)$$

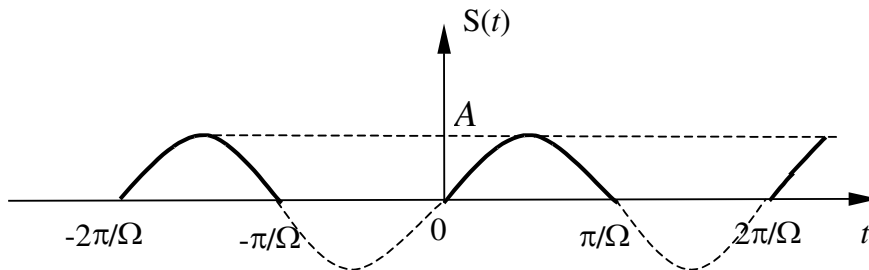


Рис.8

Постройте амплитудный спектр, сравните его со случаем двухполупериодного выпрямления (пример 2).

4. Представьте рядом Фурье периодические последовательности импульсов, изображенные на рис. 9, и постройте их спектры.

$$\text{Ответ: } s_1(t) = \frac{A}{2} + A \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \right]^2 \cos \frac{2\pi n}{T} t; \quad s_2(t) = \frac{A}{4} + \frac{A}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4} \right]^2 \cos \frac{\pi n}{T} t;$$

$$s_3(t) = \frac{A}{2} - A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin \frac{2\pi n}{T} t.$$

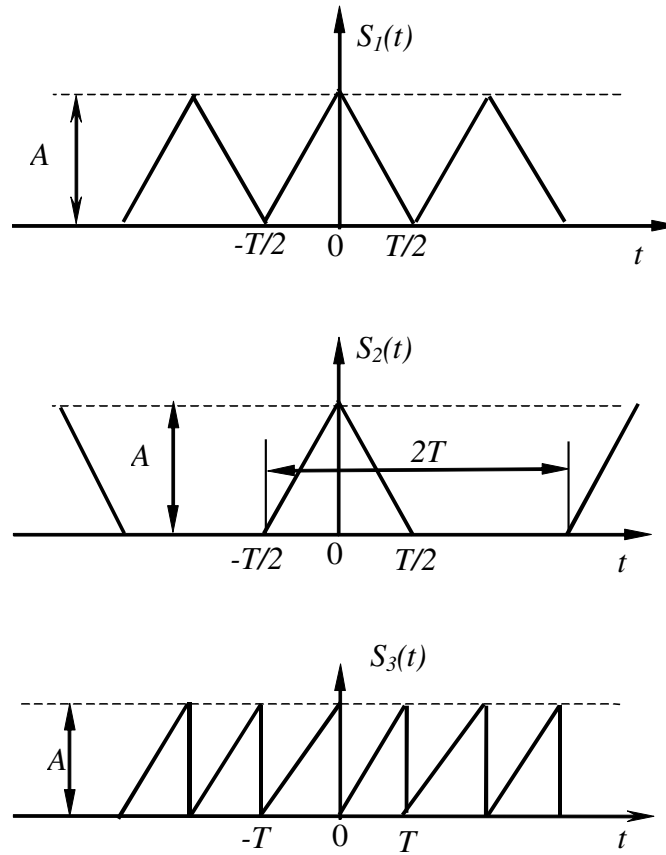


Рис.9

5. Периодическая функция $s(t)$ образована удалением ряда периодов гармонического колебания (см. рис. 10).

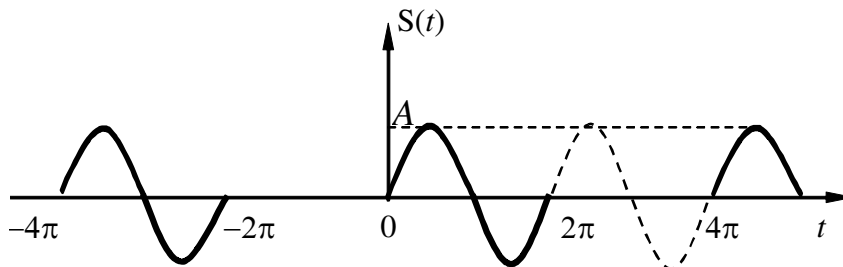


Рис.10

Напишите тригонометрический и экспоненциальный ряды Фурье путем непосредственного вычисления их коэффициентов. Найдите ряд Фурье для функции $s(t+\pi)$, т.е. при сдвиге на π влево.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

2.1. Основные теоретические сведения

Для непериодических сигналов, в частности, импульсных, локализованных в конечном временном интервале, ряд Фурье допускает плодотворное обобщение, позволяющее получить их спектральные характеристики.

Для непериодического сигнала $s(t)$, заданного на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$, такой характеристикой является функция *спектральной плотности* сигнала $\dot{S}(\omega)$, определяемая соотношением:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.1)$$

которая также называется *преобразованием Фурье* данного сигнала. Спектральная характеристика позволяет представить сигнал в виде

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.2)$$

т.е. непрерывной суммой экспоненциальных функций $e^{j\omega t}$ с частотами в интервале $(-\infty < \omega < \infty)$. Комплексная амплитуда составляющей на любой частоте бесконечно мала и равна $\frac{1}{2\pi} \dot{S}(\omega)d\omega$, поэтому $\dot{S}(\omega)$ имеет смысл спектральной (частотной) плотности комплексной амплитуды.

Соотношения (2.1) и (2.2) известны как пара преобразований Фурье, причем (2.1) называют *прямым*, а (2.2) – *обратным преобразованием Фурье*. Взаимно однозначное соответствие $s(t)$ и $\dot{S}(\omega)$ отображают символически: $s(t) \leftrightarrow \dot{S}(\omega)$. Итак, сигнал может иметь временное и частотное представление функциями $s(t)$ и $\dot{S}(\omega)$ соответственно. Любое из этих представлений полностью определяет сигнал.

Из сравнения соотношений (1.8) и (2.1) следует, что спектральная плотность обладает всеми свойствами коэффициентов ряда Фурье. Так, в частности, можно написать соотношение

$$\dot{S}(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = S(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.3)$$

где

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt, \quad S(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}. \quad (2.4)$$

Модуль $S(\omega)$ и аргумент $\varphi(\omega)$ спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$ как функции частоты называют соответственно *амплитудно-частотной (АЧХ)* и *фазо-частотной (ФЧХ)* характеристиками непрерывного (сплошного) спектра непериодического сигнала $s(t)$. Из (2.4) очевидно, что для действительного сигнала АЧХ $S(\omega)$ - четная функция ω , а ФЧХ $\varphi(\omega)$ - нечетная функция.

Комплексное представление действительного сигнала (2.2) через спектральную плотность можно привести к тригонометрической форме:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega +$$

$$+ \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega, \quad (2.5)$$

где при получении окончательного выражения использованы свойства четности $S(\omega)$ и нечетности $\varphi(\omega)$.

Для практических приложений важна связь между преобразованием сигнала как функции времени и соответствующим ему изменением спектральной плотности. Эти соотношения называют *свойствами преобразования Фурье*. Приведем некоторые наиболее важные из них [1].

1. Если $s_1(t) \leftrightarrow \dot{S}_1(\omega)$, $s_2(t) \leftrightarrow \dot{S}_2(\omega)$, то для $s_2(t) = s_1(t - t_0)$ имеем

$$\dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_1(\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (2.6)$$

При этом $S_2(\omega) = S_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega) = \varphi_1(\omega) - \omega t_0$.

Итак, при сдвиге сигнала во времени на t_0 амплитудно-частотный спектр не изменяется, а к фазо-частотному спектру добавляется слагаемое $(-\omega t_0)$, линейно зависящее от частоты ω .

С другой стороны, если $s_2(t) = s_1(t)e^{j\omega_0 t}$, то

$$\dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_1(\omega - \omega_0), \quad (2.7)$$

т.е. сдвиг спектра по оси частот на ω_0 происходит при умножении сигнала на функцию $e^{j\omega_0 t}$.

2. Пусть $s_2(t) = s_1(kt)$, т.е. $k > 1$ соответствует сжатию, а $0 < k < 1$ - растяжению сигнала во времени. При этом

$$\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{k} \dot{S}_1(\omega/k). \quad (2.8)$$

Итак, в частности, сжатие сигнала в k раз на временной оси во столько же раз расширяет его спектр и уменьшает интенсивность спектральной плотности.

3. Если $s_2(t) = \frac{ds_1(t)}{dt}$, то

$$\dot{S}_2(\omega) = j\omega \dot{S}_1(\omega) \quad (2.9)$$

При $s_2(t) = \int_{-\infty}^t s_1(x) dx$,

$$\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{j\omega} \dot{S}_1(\omega). \quad (2.10)$$

4. Пусть $s(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$.

При этом

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(x) \dot{S}_2(\omega - x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_2(x) \dot{S}_1(\omega - x) dx. \quad (2.11)$$

Итак, спектральная плотность произведения двух сигналов находится операцией свертки с множителем $1/2\pi$ спектральных плотностей сомножителей.

5. Пусть $s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(x)s_2(t-x)dx$, т.е. сигнал $s(t)$ образован сверткой сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$. При этом

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_1(\omega)\dot{S}_2(\omega). \quad (2.12)$$

Спектральная плотность сигнала $s(t)$ в этом случае находится перемножением спектральных плотностей свертываемых компонент.

6. Преобразование Фурье – линейная операция, следовательно, для нее справедлив принцип суперпозиции. Если $s(t) = \sum_i r_i s_i(t)$, где r_i - числовые коэффициенты, а

$s_i(t) \leftrightarrow \dot{S}_i(\omega)$, то

$$\dot{S}(\omega) = \sum_i r_i \dot{S}_i(\omega). \quad (2.13)$$

7. Преобразование Фурье обладает свойством симметрии по переменным t и ω , т.е., если $s(t) \leftrightarrow \dot{S}(\omega)$, то

$$\dot{S}(t) \leftrightarrow 2\pi s(-\omega). \quad (2.14)$$

Перечисленные свойства широко используются при нахождении спектральных плотностей сигналов, представляемых некоторыми комбинациями других более простых сигналов, спектральные плотности которых известны.

Важным параметром импульсного сигнала является его энергия, определяемая соотношением $E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$. Сигналы с конечной энергией называют *энергетическими*. С использованием соотношения (2.11) при $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$ несложно выразить энергию действительного $s(t)$ сигнала в форме:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega)d\omega. \quad (2.15)$$

Соотношение (2.15) известно как *равенство Парсеваля (Релея)* и выражает энергию как интеграл от квадрата амплитудно-частотного спектра сигнала. При этом функцию $S^2(\omega)$ в (2.15) можно трактовать как *спектральную плотность энергии*,

определяющую величину энергии, приходящейся на единицу полосы частот. Функцию $S^2(\omega)$ называют *энергетическим спектром* сигнала.

Автокорреляционная функция детерминированного действительного сигнала, вводимая соотношением $K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt$, и энергетический спектр $S^2(\omega)$ сигнала связаны между собой как пара преобразований Фурье:

$$S^2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.16)$$

$$K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.17)$$

В заключение заметим, что преобразование Фурье (2.1) существует для функций, удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.$$

Однако с использованием обобщенных функций, в частности, дельта-

функции $\delta(t)$ появляется возможность выражать спектральные плотности неинтегрируемых сигналов, к числу которых относятся и периодические сигналы. Таким образом, преобразование Фурье становится единым инструментом для нахождения спектральных характеристик как периодических, так и непериодических сигналов.

2.2. Примеры нахождения спектральных плотностей некоторых сигналов

1. Прямоугольный видеоимпульс (рис.11а):

$$s(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & \tau/2 < t < -\tau/2. \end{cases}$$

Спектральная плотность импульса в соответствии с (2.1):

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2A}{2j\omega} (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}) = \\ &= \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)} = \dot{S}(0) \frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\dot{S}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = A\tau$.

На рис. 11б действительная спектральная плотность представлена одним графиком

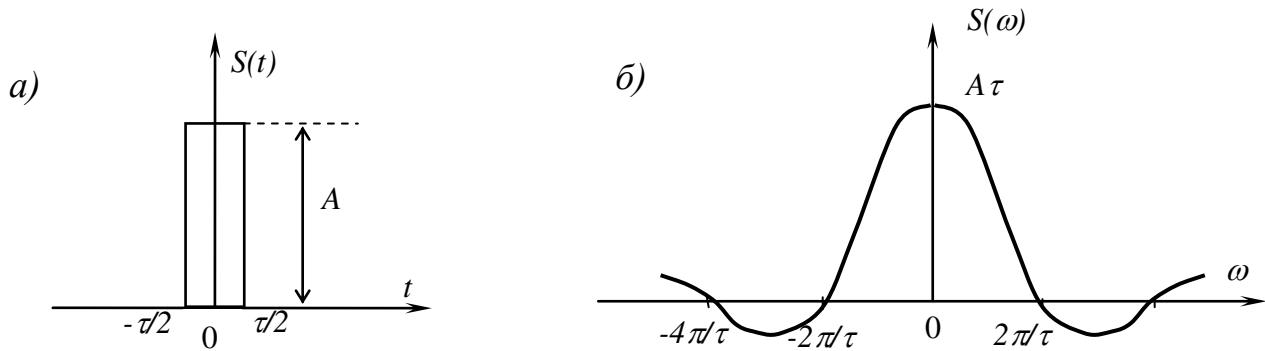


Рис. 11

По аналогии с примером 1 в п.1.3 постройте самостоятельно амплитудно-частотный и фазо-частотный спектры прямоугольного видеоимпульса для различных значений τ .

2. Экспоненциальный видеоимпульс: $s(t) = Ae^{-\alpha t} 1(t)$,

где $\alpha > 0$, единичная функция $1(t)$ определяется соотношением: $1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

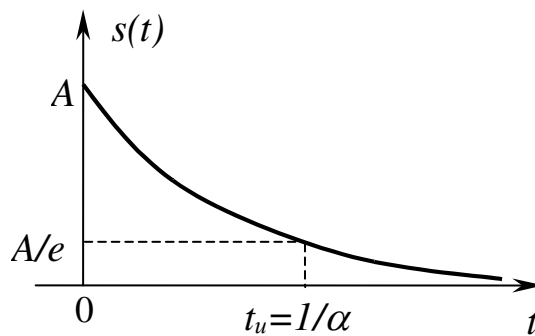


Рис.12

Спектральная плотность

$$\dot{S}(\omega) = A \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{A}{\alpha + j\omega} = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-j \arctg(\omega/\alpha)}. \quad (2.19)$$

Из (2.19) следуют соотношения для АЧХ и ФЧХ:

$$S(\omega) = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg(\omega/\alpha),$$

которые представлены графически на рис. 13а и б.

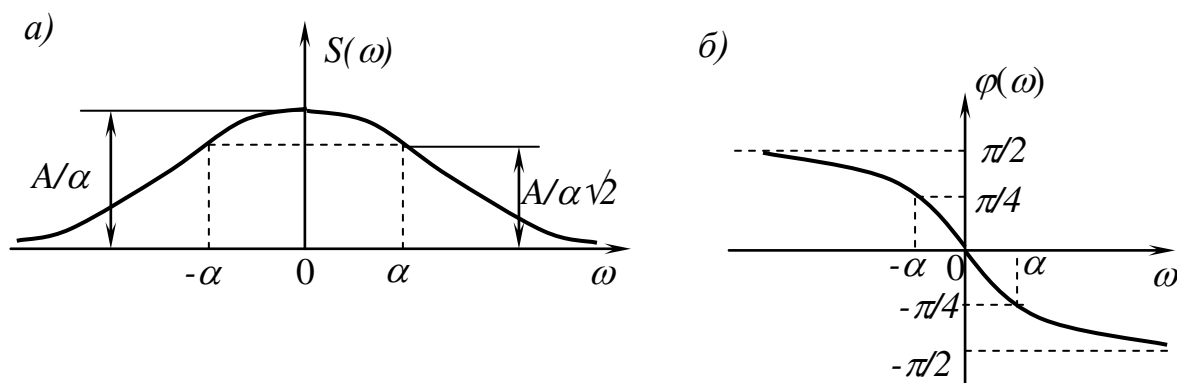


Рис.13

3. Колоколообразный (гауссовский) импульс (рис.14а):

$$s(t) = Ae^{-\beta t^2}, \beta > 0.$$

Спектральная плотность

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\beta t^2 + j\omega t)} dt = Ae^{-\omega^2/4\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\beta}t + j\frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}\right)^2} dt = \\ &= \frac{A}{\sqrt{\beta}} e^{-\omega^2/4\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = A\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\omega^2/4\beta}, \end{aligned}$$

где использовано соотношение: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Спектральная плотность колоколообразного импульса также имеет колоколообразную форму (рис.14б).

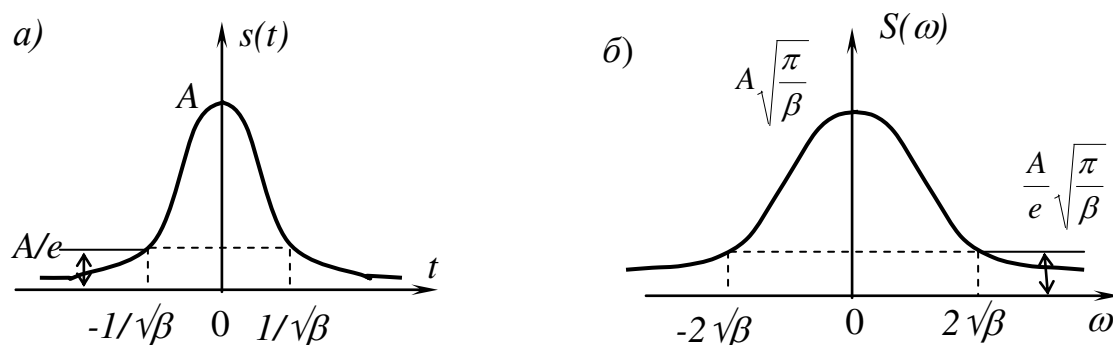


Рис.14

4. Единичный импульс (дельта-функция).

Функция $\delta(t)$ равна нулю везде за исключением точки $t=0$, где она имеет бесконечно большое значение, при этом площадь импульса равна 1.

Итак,

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Графически $\delta(t)$ будем отображать линией со стрелкой, длина которой равна единице – площади импульса (рис. 15а).

Заметим здесь, что $\delta(t)$ относится к так называемым обобщенным функциям, т.е. определяется как предел последовательности регулярных функций, например, последовательности прямоугольных (колоколообразных) импульсов с единичной площадью при уменьшении длительности их до нуля. Справедливо соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-t_0)dt = s(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = s(t_0), \quad (2.20)$$

известное как фильтрующее свойство единичного импульса. С использованием

(2.20) спектральная плотность принимает вид $\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = e^0 = 1$.

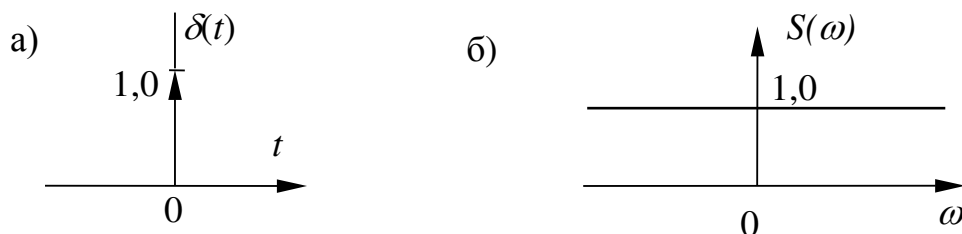


Рис. 15

Единичный импульс имеет равномерный спектр единичной интенсивности (рис.15б). Из свойства преобразования Фурье (2.6) следует, что

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}. \quad (2.21)$$

Запишем обратное преобразование Фурье:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\omega t d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\omega t d\omega.$$

Итак, справедливо соотношение:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\omega t d\omega, \quad (2.22)$$

которое иногда считают интегральным определением функции $\delta(t)$.

Соотношение (2.22) позволяет, в частности, найти спектральную плотность сигнала в виде постоянной величины: $s(t)=A$.

Имеем

$$\dot{S}(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = A2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi A \delta(\omega). \quad (2.23)$$

5. Найдем спектральную плотность трапецеидального импульса, представленного на рис. 16а. Для этого воспользуемся свойством преобразования Фурье (2.9), связанным с дифференцированием функции $s(t)$.

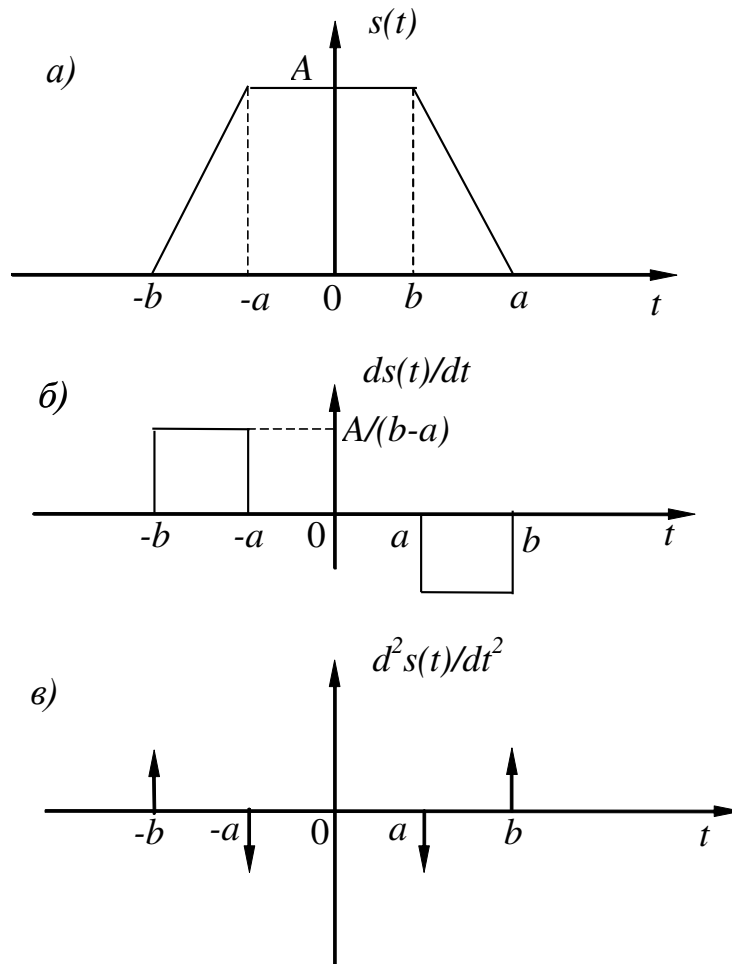


Рис.16

Дважды продифференцировав $s(t)$, получим:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{A}{b-a} [\delta(t+b) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-b)].$$

Поскольку $\frac{d^2 s}{dt^2} \leftrightarrow (j\omega)^2 \dot{S}(\omega)$, то с учетом (2.21) имеем

$$(j\omega)^2 \dot{S}(\omega) = \frac{A}{b-a} \left[e^{j\omega b} - e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} + e^{-j\omega b} \right],$$

откуда следует

$$\dot{S}(\omega) = \frac{2A}{(b-a)\omega^2} \left(\frac{e^{j\omega a} + e^{-j\omega a}}{2} - \frac{e^{j\omega b} + e^{-j\omega b}}{2} \right) = \frac{2A}{b-a} \frac{\cos\omega a - \cos\omega b}{\omega^2}. \quad (2.24)$$

Положив в (2.24) $a = 0$, $b = \tau/2$, получим спектральную плотность треугольного импульса длительностью τ в виде:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{4A}{\tau} \frac{1 - \cos(\omega\tau/2)}{\omega^2} = \frac{8A}{\tau} \frac{\sin^2(\omega\tau/4)}{\omega^2} = \frac{A\tau}{2} \left[\frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} \right]^2,$$

которая изображена на рис. 17б.

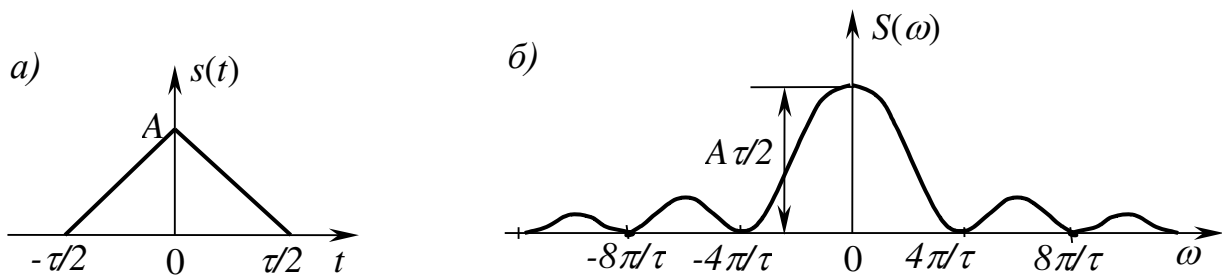


Рис.17

6. Найдем спектральную плотность $\dot{S}(\omega)$ единичной ступенчатой функции:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Для этого представим $1(t)$ в форме: $1(t) = 1/2 + (1/2)\text{sign}(t)$,

где $\text{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases}$ и найдем спектральную плотность $\dot{S}1(\omega)$ сигнум – функции

$\text{sign}(t)$, не имеющей постоянной составляющей, с помощью операции дифференцирования (рис.18).

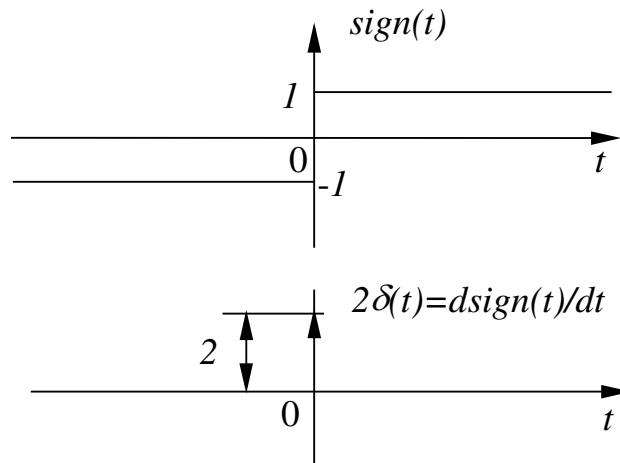


Рис.18

Поскольку $\frac{dsign(t)}{dt} = 2\delta(t)$ то, в соответствии с (2.9) и (2.21), имеем

$$(j\omega)\dot{S}1(\omega) = 2, \dot{S}1(\omega) = 2/j\omega. \quad (2.25)$$

Пользуясь свойством линейности преобразования Фурье и учитывая (2.23) и (2.25), получим искомую спектральную плотность функции $1(t)$:

$$\dot{S}(\omega) = \pi\delta(\omega) + 1/j\omega. \quad (2.26)$$

Итак, несмотря на неинтегрируемость функции $1(t)$, ее спектральная плотность (2.26) найдена с использованием дельта-функции.

7. Найдем спектральную плотность периодического сигнала $s(t)$ с периодом T . Экспоненциальный ряд Фурье (1.7) для $s(t)$:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\Omega t},$$

где $\Omega=2\pi/T$, а коэффициенты \dot{C}_n определяются соотношением (1.8). При этом

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\Omega t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-n\Omega)t} dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \delta(\omega - n\Omega). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Таким образом, спектральная плотность периодического сигнала представлена на оси частот последовательностью дельта-функций, существующих на частотах $\omega=n\Omega$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), интенсивность (площадь) которых равна $2\pi \dot{C}_n$. Так для

периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов (рис. 1), учитывая (1.10), имеем:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{2\pi A \tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\Omega \tau / 2)}{n\Omega \tau / 2} \delta(\omega - n\Omega). \quad (2.28)$$

Графическое изображение спектральной плотности (2.28) представлено на рис.19.

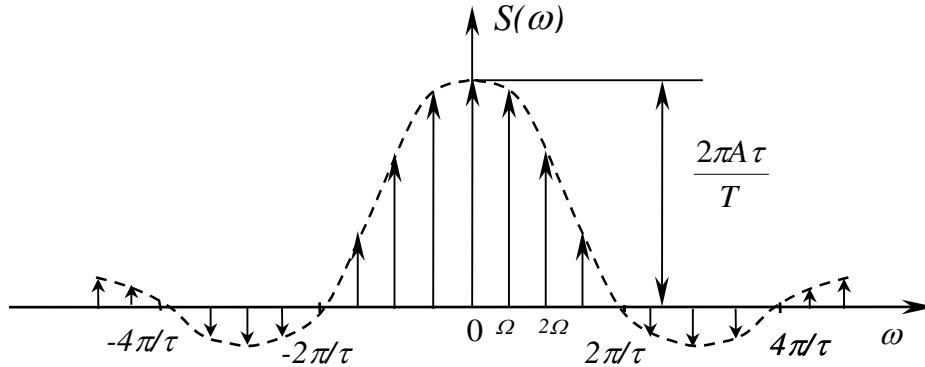


Рис.19

Пусть

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} \left(e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi)} \right) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 t}.$$

Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= 2\pi \frac{A}{2} e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0) = \\ &= A\pi e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0) + A\pi e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0). \end{aligned} \quad (2.29)$$

8. Найдем спектральную плотность $\dot{S}(\omega)$ сигнала $s(t)$, образованного перемножением сигнала $x(t)$ и гармонического колебания:

$$s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Пусть спектральная плотность сигнала $x(t)$ известна и равна $\dot{X}(\omega)$. Тогда в соответствии с (2.11), находя свертку спектров $\dot{X}(\omega)$ и (2.29), а также используя (2.20), получим:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega - \nu) \left[\pi e^{j\varphi} \delta(\nu - \omega_0) + \pi e^{-j\varphi} \delta(\nu + \omega_0) \right] d\nu = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\varphi} \dot{X}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \dot{X}(\omega + \omega_0). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Таким образом, соотношение (2.30) показывает, что умножение $x(t)$ на гармоническое колебание с частотой ω_0 сдвигает спектр $\dot{X}(\omega)$ на частоты $\pm\omega_0$. Эта операция используется в радиотехнике очень широко и называется *преобразованием частоты сигнала*. Так, в частности, получают амплитудно-модулированные колебания. На рис. 20 а, б представлен пример сдвига спектра при модуляции.

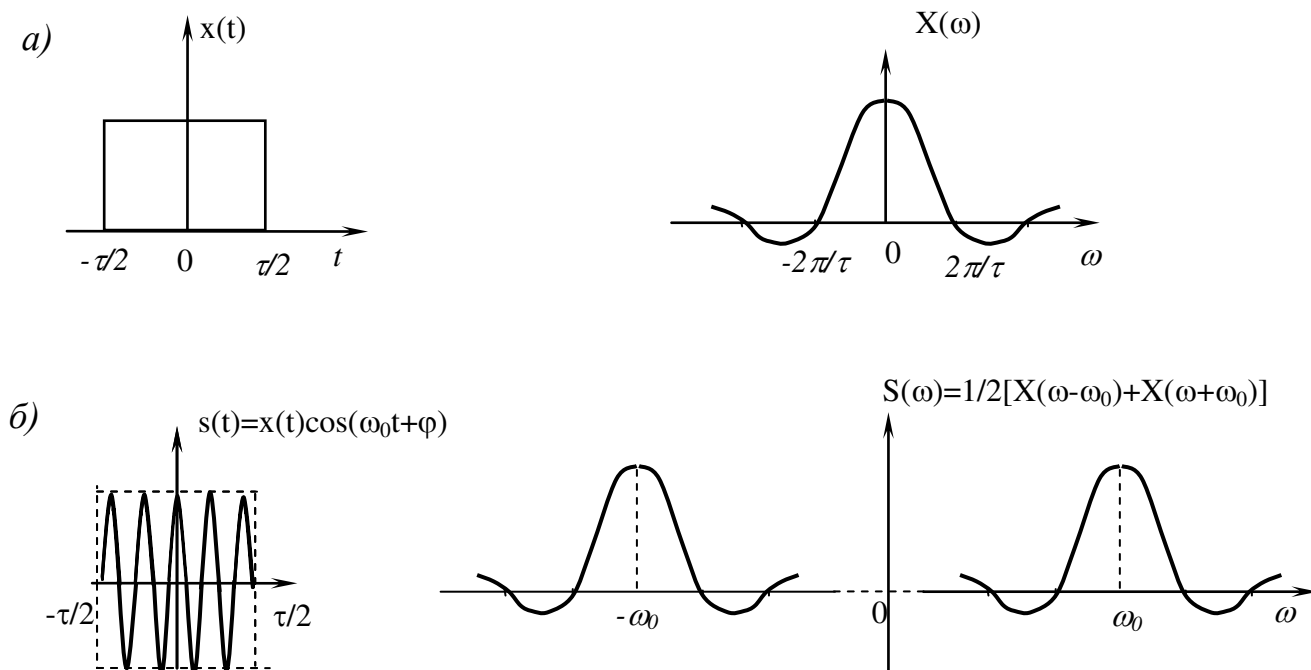


Рис.20

9. Найдем спектральную плотность $\dot{X}_g(\omega)$ функции $x_g(t)$, образованной перемножением сигнала $x(t)$ и периодической с периодом T последовательности единичных импульсов $\delta_T(t)$:

$$x_g(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT).$$

Таким образом, $x_g(t)$ - дискретизованный во времени сигнал (выборка), образованный последовательностью δ -импульсов, следующих через интервал времени T и имеющих интенсивности (площади) равные значениям (отсчетам) $x(t)$ в соответствующие моменты времени.

Пусть $x(t) \leftrightarrow \dot{X}(\omega)$. Найдем спектральную плотность периодической функции

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \text{ В соответствии с (2.27) имеем}$$

$$\delta_T(t) \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \delta(\omega - n\Omega),$$

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T}, \text{ где } \Omega = 2\pi/T.$$

Таким образом,

$$\delta_T(t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \delta_{\Omega}(\omega). \quad (2.31)$$

Для нахождения спектра произведения $x(t)\delta_T(t)$ в соответствии с (2.11) свернем в частотной области спектры $\dot{X}(\omega)$ и $\Omega\delta_{\Omega}(\omega)$:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\epsilon}(\omega) &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega - \nu) \delta_{\Omega}(\nu) d\nu = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega - \nu) \delta(\nu - n\Omega) d\nu = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega - n\Omega). \end{aligned} \quad (2.32)$$

На рис. 21 а, б, в представлены графики сигналов и соответствующих им спектральных плотностей.

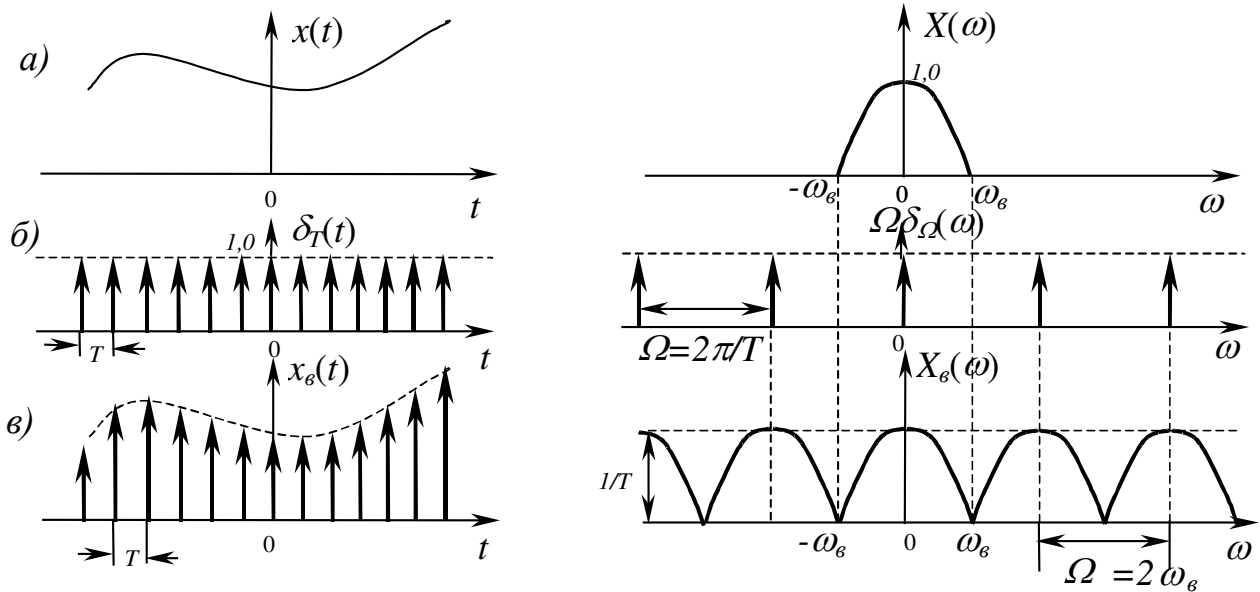


Рис.21

В соответствии с (2.32) спектр $\dot{X}_{\epsilon}(\omega)$ дискретизованного во времени сигнала представляет собой периодически повторяющийся (с периодом $\Omega=2\pi/T$) спектр $\dot{X}(\omega)$, интенсивность которого уменьшена в T раз.

При условии $\Omega \geq 2\omega_g$, где ω_g - верхняя частота в спектре $\dot{X}(\omega)$, повторяющиеся спектральные полосы, образующие $\dot{X}_g(\omega)$, не перекрываются (рис.21в). Поэтому из $\dot{X}_g(\omega)$ можно выделить $\dot{X}(\omega)$, например, пропуская дискретизованный сигнал через идеальный фильтр низких частот и тем самым восстановить $x(t)$ по его выборке $x_g(t)$. Это утверждение составляет содержание известной в радиотехнике *теоремы В.А.Котельникова (теоремы отсчетов)*, которая гласит: если наивысшая частота в спектре функции $x(t)$ не превышает величины $F_g = \omega_g/2\pi$, то функция $x(t)$ полностью определяется последовательностью своих значений в моменты времени, отстоящие друг от друга не более, чем на $T \leq (1/2F_g) = (\pi/\omega_g)$ секунд.

2.3. Задачи для самостоятельной работы

1. Найдите спектральную плотность задержанного прямоугольного видеоимпульса, представленного на рис.22.

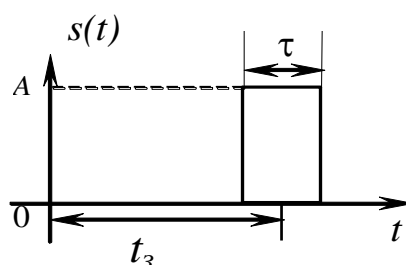


Рис.22

Представьте графически амплитудно-частотный и фазо-частотный спектры.

2. Определите функцию $s(t)$, спектральная плотность которой представлена на рис.23.

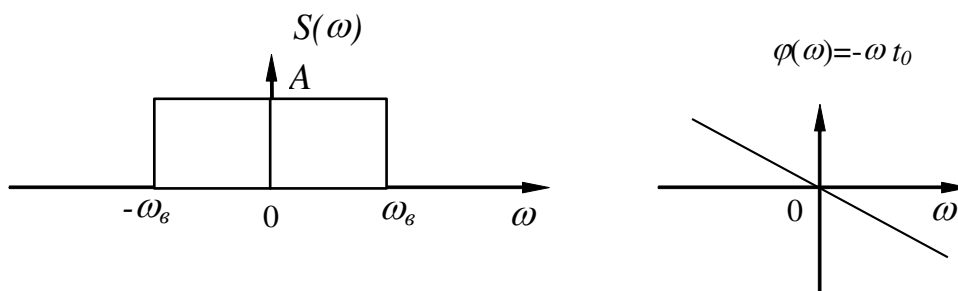


Рис.23

3. Определите функцию, спектральная плотность которой изображена на рис.24, $\varphi(\omega)=0$.

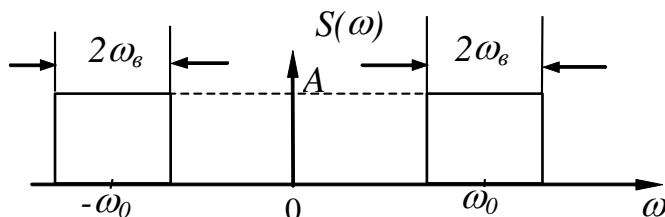


Рис.24

4. Покажите, что, если $s(t) \leftrightarrow \dot{S}(\omega)$, то

$$\frac{1}{2}[s(t+T) + s(t-T)] \leftrightarrow \dot{S}(\omega) \cos \omega T.$$

Сравните с задачей, рассмотренной в примере 8, обратив внимание на двойственность свойств частотного и временного сдвигов. Постройте спектр пары прямоугольных видеоимпульсов, симметрично смещенных относительно точки $t=0$.

5. Найдите спектральную плотность сигнала $s(t) = A(1 - e^{-\alpha t})l(t)$. Изобразите график амплитудно-частотного спектра.

6. Найдите, постройте и сравните спектральные плотности двух последовательностей прямоугольных радиоимпульсов:

$$\text{а) } s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1(t - nT), \quad \text{где } s_1(t) = \begin{cases} A \cos \omega_0 t, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases}$$

$$\text{б) } s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - nT) \cos \omega_0 t, \quad \text{где } x_1(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2, \end{cases}$$

в предположении, что $\omega_0 \gg 2\pi/T = \Omega$, $\tau < T$.

7. Найдите и изобразите графически спектральную плотность периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов, модулированной по амплитуде гармоническим колебанием с частотой Ω_1 :

$$s(t) = A(1 + m \cos \Omega_1 t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t - nT), \quad \text{где } x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2, \end{cases}$$

в предположении, что $\Omega_1 < \pi/T = \Omega/2$, $\tau < T$, $m \leq 1$.

8. Сравните, построив на одном графике, спектральные плотности прямоугольного, треугольного и косинусоидального (полупериод) видеоимпульсов в предположении, что длительности и площади импульсов одинаковы.

9. Постройте амплитудно-частотные спектры прямоугольного радиоимпульса

$$s(t) = \begin{cases} A \cos \omega_0 t, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \quad \text{для случаев: а) } \omega_0 \tau = 20\pi, \quad \text{б) } \omega_0 \tau = 2\pi \text{ (волновой цуг).}$$

10. Решите задачу о вычислении спектральной плотности группы (пачки), состоящей из $(n+1)$ одинаковых видеоимпульсов, изображенных на рис. 25.

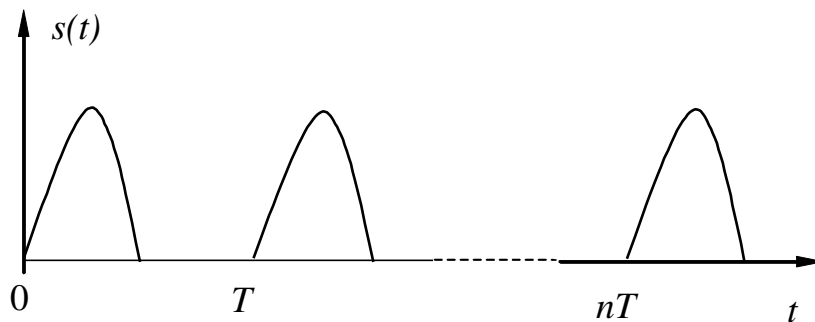


Рис.25

Покажите, что спектральная плотность пачки:

$$\dot{S}(\omega) = \dot{S}_0(\omega) \frac{1 - e^{-j(n+1)\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}},$$

где $\dot{S}_0(\omega)$ - спектр одиночного импульса.

11. Найдите спектральную плотность сигнала, изображенного на рис. 26:

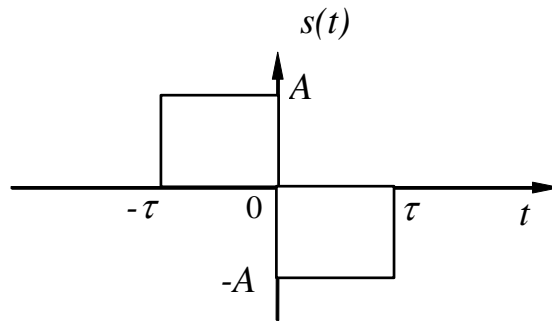


Рис.26

12. Найдите автокорреляционную функцию прямоугольного видеоимпульса с амплитудой A и длительностью τ . $s(t) = A[1(t + \tau/2) - 1(t - \tau/2)]$.

Определите и постройте его энергетический спектр.

13. Найдите автокорреляционную функцию прямоугольного радиоимпульса

$$s(t) = \begin{cases} A \cos \omega_0 t, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases}$$

Определите и постройте его энергетический спектр.

14. Найдите автокорреляционную функцию «пачки» прямоугольных видеоимпульсов, представленной на рис. 27:

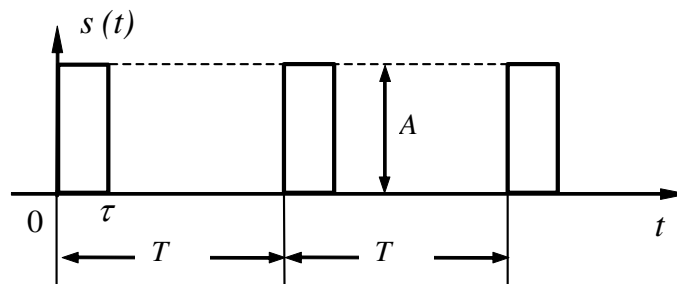


Рис.27

Определите энергетический спектр сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М., Радио и связь, 1986.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М., Высшая школа, 1988.
3. Радиотехнические цепи и сигналы. Под ред. К.А. Самойло. М., Радио и связь, 1982.
4. Жуков И.П., Карташов В.Г., Николаев А.М. Сборник задач по курсу «Радиотехнические цепи и сигналы». М., Сов. Радио, 1972.
5. Латхи Б.П. Системы передачи информации. М., Связь, 1971.
6. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. М., Высшая школа, 1987.
7. Радиотехнические цепи и сигналы. Примеры и задачи. Под ред. И.С.Гоноровского. М., Радио и связь, 1989.

СОДЕРЖАНИЕ

1. РЯДЫ ФУРЬЕ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.....	3
1.1. Основные теоретические сведения.....	3
1.2. Спектр периодического сигнала.....	6
1.3. Примеры нахождения спектров периодических сигналов.....	7
1.4. Задачи для самостоятельной работы.....	12
2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.....	15
2.1. Основные теоретические сведения.....	15
2.2. Примеры нахождения спектральных плотностей некоторых сигналов.....	19
2.3. Задачи для самостоятельной работы.....	29
ЛИТЕРАТУРА.....	33

Валерий Иванович Кривошеев

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

Учебно-методическое пособие

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 2,1. Уч.-изд. л. 2,3.
Заказ № . Тираж 300 экз.

Отпечатано в типографии Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
603600, г. Нижний Новгород, ул. Большая Покровская, 37

Лицензия ПД № 18-0099 от 14.05.01