

С. М. РЫЖАКОВ

**АНАЛИЗ
ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ
В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ**

Учебное пособие

НИЖНИЙ НОВГОРОД 1992

УДК 621.372

Рыжак С.М. Анализ четырехполюсников в частотной области.
Учебное пособие/Нижегородский гос. ун-т. Нижний Новгород, 1992,
72 с.

На базе контурных уравнений рассматриваются свойства линейных четырехполюсников в частотной области.

В пособие включен крупный раздел с задачами для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов специальности 0704 "Радиофизика и электроника"

Ид. 77. Табл. 2. Библиогр. 10 назв.

A 621396001 - 107

M 187(03) - 92

J S B N 5-230-04214-1

© Нижегородский государственный университет
имени Н.И.Лобачевского, 1992.

ВВЕДЕНИЕ

Четырехполюсники представляют из себя широкий класс электрических цепей - фильтры, трансформаторы, длинные линии, транзисторные и ламповые усилители, согласующие устройства и др.

В пособии рассматриваются свойства линейных четырехполюсников в частотной области. Обычно [1] изучение параметров четырехполюсников (Z , y , h и др.) начинают с того, что определяют их как коэффициенты уравнений, связывающие величины токов и напряжений на входе и выходе четырехполюсника. Такой подход, как показывает практика преподавания, малопродуктивен. Ибо не позволяет студентам подойти к решению серьезных задач и понять суть проблемы. Здесь мы отойдем от этого обычая и дадим математическое описание линейных четырехполюсников на базе хорошо изученных контурных уравнений электрической цепи [2]. В этом случае, например,

y - параметры четырехполюсника, а через них и все остальные (Z , $ABCD$, h и g) параметры выражаются через определитель матрицы сопротивлений контурных уравнений и его алгебраические дополнения. Заметим, что с таким же успехом можно использовать в качестве базовых узловые уравнения.

В пособии изложена часть спецкурса по теории электрических цепей, читавшегося автором в течение ряда последних лет для студентов дневного и вечернего отделений радиофака, специализирующихся на кафедре радиотехники. Изучение курса по теории электрических цепей должно сопровождаться решением задач. Без этого невозможно овладеть содержанием курса. В раздел 3 пособия включены задачи из ранее изданных отечественных учебников [1-2] и задачника [3-4], зарубежных источников [5-8], не потерявших и в настоящее время своей актуальности и давно ставших библиографической редкостью. Часть задач составлена автором.

РАЗДЕЛ I. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

I. I. Метод контурных токов

Метод контурных токов Максвелла или метод "фигтивных" токов заключается в том, что вместо токов в ветвях, имеющих простой физический смысл, определяются на основании 2-го закона Кирхгофа так называемые контурные токи - рис. I, замыкающиеся в контурах. Таких токов в действительности нет, и в этом смысле контурные токи - токи "фигтивные".

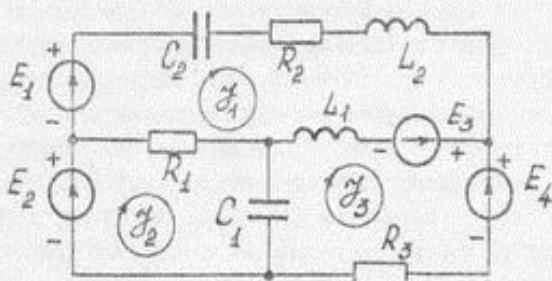


Рис. I

Для линейной электрической цепи в синусоидальном установившемся режиме контурные уравнения записывают в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \bar{z}_{11}(\omega) \dot{J}_1(\omega) + \bar{z}_{12}(\omega) \dot{J}_2(\omega) + \dots + \bar{z}_{1n}(\omega) \dot{J}_n(\omega) &= E_1(\omega), \\ \bar{z}_{21}(\omega) \dot{J}_1(\omega) + \bar{z}_{22}(\omega) \dot{J}_2(\omega) + \dots + \bar{z}_{2n}(\omega) \dot{J}_n(\omega) &= E_2(\omega), \\ \bar{z}_{n1}(\omega) \dot{J}_1(\omega) + \bar{z}_{n2}(\omega) \dot{J}_2(\omega) + \dots + \bar{z}_{nn}(\omega) \dot{J}_n(\omega) &= E_n(\omega). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ω - рабочая частота, $\dot{J}_1(\omega)$, $\dot{J}_2(\omega)$, ..., $\dot{J}_n(\omega)$ - контурные токи, замыкающиеся в контурах. Индекс n в уравнениях - число независимых контуров в схеме. Таким образом, число контурных уравнений равно числу независимых контуров. Стоящие в правой части системы (I) выражения для $E_k(\omega)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) - алгебраические суммы Э.Д.С., действующих в K -ом контуре, причем Э.Д.С., совпадающие по направлению с направлением обхода контура, берутся со знаком "плюс", а направленные встречно - со знаком "минус". Направление обхода любого контура выбирается произвольно. Величина $\bar{z}_{kk}(\omega)$ - собственное сопротивление K -го контура, причем

$$Z_{KK}(\omega) = j\omega L_{KK} + \frac{1}{j\omega C_{KK}} + R_{KK}.$$

где L_{KK} , C_{KK} , R_{KK} - соответственно суммарная собственная индуктивность, емкость и сопротивление K -го контура. Величины $Z_{KK}(\omega)$ входят в систему (I) со знаком "плюс". Величина $Z_{iK}(\omega)$ - общее (взаимное) сопротивление контуров i и K

$$Z_{iK}(\omega) = j\omega L_{iK} + \frac{1}{j\omega C_{iK}} + R_{iK}.$$

где L_{iK} , C_{iK} , R_{iK} - соответственно суммарная взаимная индуктивность, емкость и сопротивление i -го и K -го контуров. Взаимные сопротивления $Z_{iK}(\omega)$ входят в систему уравнений (I) со знаком "плюс", если направления контурных токов \mathcal{I}_i и \mathcal{I}_K в сопротивлении Z_{iK} совпадают, и со знаком "минус", если контурные токи направлены во взаимном сопротивлении встречно.

Любое уравнение системы (I) есть запись 2-го закона Кирхгофа для каждого независимого контура. Действительно, в левой части каждого из уравнений системы (I) записано падение напряжения на собственных и взаимных сопротивлениях контуров за счет протекания по этим сопротивлениям контурных токов с учетом их ориентации, а в правых частях системы (I) записаны алгебраические суммы Э.Д.С., включенных в каждом контуре.

Запишем систему уравнений (I) в матричном виде

$$[\bar{Z}(\omega)][\bar{\mathcal{I}}(\omega)] = [\bar{E}(\omega)], \quad (2)$$

где $[\bar{Z}(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) & \dots & Z_{1n}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) & \dots & Z_{2n}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1}(\omega) & Z_{n2}(\omega) & \dots & Z_{nn}(\omega) \end{bmatrix}$ - квадратная матрица сопротивлений,

в которой вдоль главной диагонали расположены собственные сопротивления контуров со знаком "плюс", а вне главной диагонали - взаимные сопротивления контуров со знаком "плюс" или "минус";

$$[\bar{\mathcal{I}}(\omega)] = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1(\omega) \\ \mathcal{I}_2(\omega) \\ \dots \\ \mathcal{I}_n(\omega) \end{bmatrix} - \text{матрица-столбец контурных токов;}$$

$$[\bar{E}(\omega)] = \begin{bmatrix} E_1(\omega) \\ E_2(\omega) \\ \dots \\ E_n(\omega) \end{bmatrix} - \text{матрица-столбец, элементами которой являются алгебраические суммы источников Э.Д.С. (независимых и зависимых),}$$

включенных в контурах. Для схем без зависимых (управляемых) источников справедливо $Z_{iK} = Z_{Ki}$, т.е. матрица сопротивлений $[Z(\omega)]$ является симметричной относительно главной диагонали.

Если схема задана, то матрицы $[Z(\omega)]$ и $[E(\omega)]$ известны. Незавестным, подлежащим определению, является матрица $[I(\omega)]$.

Решим уравнение (2) относительно неизвестной матрицы контурных токов $[I(\omega)]$, умножив (2) слева на обратную матрицу $[Z(\omega)]^{-1}$:

$$[Z]^{-1} [Z] [I] = [Z]^{-1} [E] \quad \text{Но } [Z]^{-1} [Z] = [I]$$

где $[I]$ - единичная матрица. Поскольку $[I] [I] = [I]$, то решение матричного уравнения (2) и, следовательно, системы алгебраических уравнений (1) принимает вид

$$[I(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} \cdot [E(\omega)] \quad (3)$$

Определив $[Z(\omega)]^{-1}$ по правилам нахождения обратной матрицы и подставив это значение в (3), получим

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix} = [Z]^{-1} \cdot [E] = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

где определитель матрицы $[Z]$

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix} \quad (5)$$

снабжен индексом "Z", т.к. его элементами являются комплексные сопротивления. Входящая в (4) величина Δ_{iK} - алгебраическое дополнение элемента $Z_{iK}(\omega)$ определителя системы, т.е.

$\Delta_{iK} = (-1)^{i+K} \cdot M_{iK}$, где M_{iK} - минор элемента $Z_{iK}(\omega)$, который образуется из определителя системы исключением из него i -ой строки и K -го столбца.

Решение системы уравнений (1) относительно контурных токов можно найти и вторым способом - с помощью определителей. Действительно,

$$I_1(\omega) = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{bmatrix} E_1 & Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1n} \\ E_2 & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_n & Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix}, \quad I_2(\omega) = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{bmatrix} Z_{11} & E_1 & Z_{13} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & E_2 & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & E_n & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix}$$

Решение

Выбираем произвольно направление контурных токов \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2 и \mathcal{I}_3 в трех независимых контурах - рис. 2а. Составляем контурные уравнения

$$(R_1 + R_2 + R_3)\mathcal{I}_1 - R_3\mathcal{I}_2 - R_1\mathcal{I}_3 = E_2,$$

$$-R_3\mathcal{I}_1 + (R_3 + R_4 + R_5)\mathcal{I}_2 - R_4\mathcal{I}_3 = 0,$$

$$-R_1\mathcal{I}_1 - R_4\mathcal{I}_2 + (R_1 + R_4)\mathcal{I}_3 = E_1.$$

Выразим напряжение зависимого источника E_2 через контурные токи. Из рис. 2а следует

$$E_2 = \nu\mathcal{I}_4 - \nu(\mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_2).$$

Подставляя это соотношение в первое контурное уравнение, получим

$$(R_1 + R_2 + R_3)\mathcal{I}_1 + (\nu - R_3)\mathcal{I}_2 - (R_1 + \nu)\mathcal{I}_3 = 0.$$

Система контурных уравнений принимает вид

$$(R_1 + R_2 + R_3)\mathcal{I}_1 + (\nu - R_3)\mathcal{I}_2 - (R_1 + \nu)\mathcal{I}_3 = 0,$$

$$-R_3\mathcal{I}_1 + (R_3 + R_4 + R_5)\mathcal{I}_2 - R_4\mathcal{I}_3 = 0,$$

$$-R_1\mathcal{I}_1 - R_4\mathcal{I}_2 + (R_1 + R_4)\mathcal{I}_3 = E_1.$$

Поскольку в рассматриваемой схеме содержится зависимый источник напряжения, то, как видно из полученных уравнений $Z_{12} = (\nu - R_3) + \neq Z_{21} = -R_3$, $Z_{13} = -(R_1 + \nu) \neq Z_{31} = -R_1$. Решаем систему уравнений с помощью определителей. Находим контурные токи

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \nu - R_3 & -(R_1 + \nu) \\ 0 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ E_1 & -R_4 & R_1 + R_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & \nu - R_3 & -(R_1 + \nu) \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_1 & -R_4 & R_1 + R_4 \end{vmatrix}} = E_1 \frac{-(\nu - R_3)R_4 + (R_3 + R_4 + R_5)(R_1 + \nu)}{\Delta} = 0,177 \text{ A},$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & 0 & -(R_1 + \nu) \\ -R_3 & 0 & -R_4 \\ -R_1 & E_1 & R_1 + R_4 \end{vmatrix}}{\Delta} = E_1 \frac{R_3(R_1 + \nu) + R_4(R_1 + R_2 + R_3)}{\Delta} = 0,169 \text{ A},$$

$$\mathcal{I}_3 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & \nu - R_3 & 0 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 & 0 \\ -R_1 & -R_4 & E_1 \end{vmatrix}}{\Delta} = 0,504 \text{ A}.$$

Располагая величинами контурных токов, находим токи во всех ветвях. Ток I_{R1} в сопротивлении R_1 есть суперпозиция контурных токов I_1 и I_3 , причем ток I_{R1} направлен в сторону большего тока I_3 . Итак, $I_{R1} = I_3 - I_1 = 0,327$ А. Ток $I_{R2} = I_1 = 0,177$ А. Ток I_{R3} в сопротивлении R_3 - суперпозиция контурных токов I_1 и I_2 , т.е. $I_{R3} = I_1 - I_2 = 0,177 - 0,169 = 0,008$ А; $I_{R4} = I_3 - I_2 = 0,335$ А; $I_{R5} = I_2 = 0,169$ А. Найденные величины токов в ветвях и их направления показаны на рис. 26. Легко проверить, что в узлах выполняется I-й закон Кирхгофа.

Пример 2. Дифференциальный ламповый усилитель (рис. 3а) используется для формирования разности двух входных сигналов E_1 и E_2 . Доказать, что напряжение между анодами пропорционально разности сигналов E_1 и E_2 . Предполагается, что лампы работают в линейном режиме без сеточных токов, имеют одинаковые параметры, а нагрузки равны между собой, т.е. $R_{H1} = R_{H2} = R_H$.

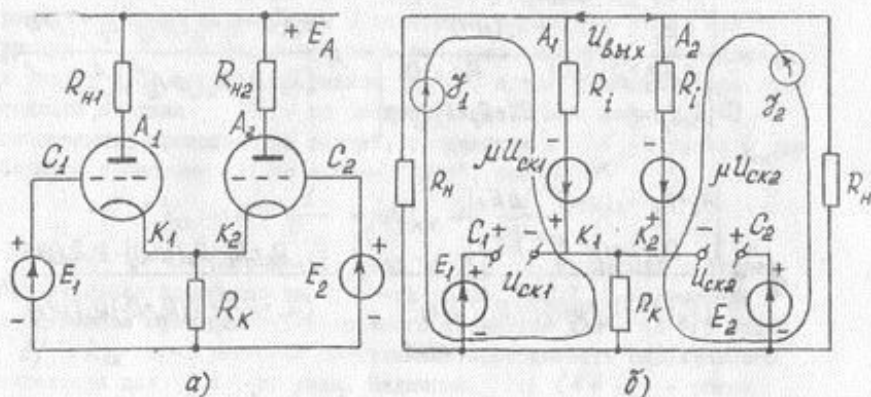


Рис. 3

Решение

Представим усилитель в виде эквивалентной схемы, показанной на рис. 3б и содержащей два зависимых источника напряжения, управляемых напряжением (ЗВН). Выбираем направления контурных токов I_1 и I_2 в двух независимых контурах - рис. 3б.

Записываем контурные уравнения

$$(R_H + R_i + R_k) \mathcal{I}_1 + R_k \mathcal{I}_2 = \mu U_{сх1},$$

$$R_k \mathcal{I}_1 + (R_H + R_i + R_k) \mathcal{I}_2 = \mu U_{сх2}.$$

Выражаем напряжения зависимых источников через контурные токи

$$U_{сх1} = E_1 - R_k (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2),$$

$$U_{сх2} = E_2 - R_k (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2).$$

Подставляем эти соотношения в контурные уравнения и получаем

$$[R_H + R_i + R_k(\mu+1)] \mathcal{I}_1 + R_k(\mu+1) \mathcal{I}_2 = \mu E_1,$$

$$R_k(\mu+1) \mathcal{I}_1 + [R_H + R_i + R_k(\mu+1)] \mathcal{I}_2 = \mu E_2.$$

Определяем контурные токи \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mu E_1 & R_k(\mu+1) \\ \mu E_2 & R_H + R_i + R_k(\mu+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_H + R_i + R_k(\mu+1) & R_k(\mu+1) \\ R_k(\mu+1) & R_H + R_i + R_k(\mu+1) \end{vmatrix}} = \mu \frac{E_1 [R_H + R_i + R_k(\mu+1)] - E_2 R_k(\mu+1)}{[R_H + R_i + R_k(\mu+1)]^2 - R_k^2(\mu+1)^2},$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_H + R_i + R_k(\mu+1) & \mu E_1 \\ R_k(\mu+1) & \mu E_2 \end{vmatrix}}{[R_H + R_i + R_k(\mu+1)]^2 - R_k^2(\mu+1)^2} = \mu \frac{E_2 [R_H + R_i + R_k(\mu+1)] - E_1 R_k(\mu+1)}{(R_H + R_i)^2 + 2(R_H + R_i) R_k(\mu+1)}.$$

Напряжение $U_{вых}$ между анодами A_1 и A_2 равно

$U_{вых} = R_H (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2)$. Подставив сюда контурные токи \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 , получим после преобразований

$$U_{вых} = R_H (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2) = \frac{\mu (E_1 - E_2) R_H}{R_H + R_i}.$$

Из полученного выражения видно, что схема в целом ведёт себя как однокаскадный усилитель с входным сигналом $(E_1 - E_2)$ и нагрузкой R_H .

i - м узлами, суммарная взаимная проводимость индуктивного характера между K - м и i - м узлами. Если электрическая цепь не содержит зависимых источников, то $Y_{ki} = Y_{ik}$. Если в схеме имеются зависимые источники, то $Y_{ki} \neq Y_{ik}$.

Если цепь задана, то известны собственные и взаимные проводимости узлов и источники тока, включенные в узлах. Таким образом, неизвестными, подлежащими определению, являются N узловых потенциалов.

Решение системы узловых уравнений (7) относительно неизвестных узловых потенциалов находим с помощью определителей

$$\varphi_i = \frac{1}{\Delta_y} \begin{vmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & -Y_{13} & \dots & -Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & -Y_{23} & \dots & -Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & -Y_{N2} & -Y_{N3} & \dots & Y_{NN} \end{vmatrix}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{\Delta_y} \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & -Y_{13} & \dots & -Y_{1N} \\ -Y_{21} & Y_{22} & -Y_{23} & \dots & -Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Y_{N1} & Y_{N2} & -Y_{N3} & \dots & Y_{NN} \end{vmatrix}$$

и т.д., где определитель системы

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & \dots & -Y_{1N} \\ -Y_{21} & Y_{22} & \dots & -Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -Y_{N1} & -Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{vmatrix}.$$

Определитель снабжен индексом "y", т.к. его элементами являются комплексные проводимости. Разложив определители по элементам столбца, запишем решение в виде

$$\varphi_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_y} \mathcal{I}_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta_y} \mathcal{I}_2 + \dots + \frac{\Delta_{N1}}{\Delta_y} \mathcal{I}_N,$$

$$\varphi_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_y} \mathcal{I}_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta_y} \mathcal{I}_2 + \dots + \frac{\Delta_{N2}}{\Delta_y} \mathcal{I}_N,$$

$$\varphi_N = \frac{\Delta_{1N}}{\Delta_y} \mathcal{I}_1 + \frac{\Delta_{2N}}{\Delta_y} \mathcal{I}_2 + \dots + \frac{\Delta_{NN}}{\Delta_y} \mathcal{I}_N.$$

Здесь Δ_{ik} - алгебраическое дополнение элемента Y_{ik} определителя системы, т.е. $\Delta_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$, где M_{ik} - минор элемента Y_{ik} , который образуется из определителя системы исключением из него i - ой строки и k - го столбца.

1.4. Примеры решения задач с использованием узловых уравнений

Пример 1. Определить входное сопротивление $Z_{вх} = E_1 / \mathcal{I}_1$ схемы, представленной на рис. 4а, имеющей в своем составе зависимый источник тока, управляемый напряжением (ИТУН).

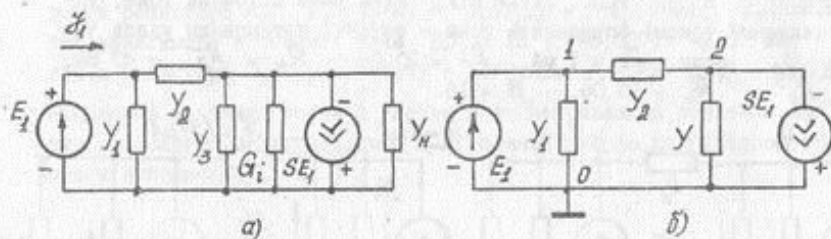


Рис. 4

Решение

На рис. 4б представлена эквивалентная схема, в которой 3 параллельно включенных проводимости заменены одной проводимостью

$Y = Y_3 + G_1 + Y_H$. Для решения задачи используем метод узловых потенциалов. Заземляем узел "0", считая $\varphi_0 = 0$. Поскольку потенциал φ_1 в узле 1 равен E_1 , т.е. $\varphi_1 = E_1$, то нужно составить лишь одно узловое уравнение для узла 2. Это уравнение имеет вид

$$(Y_2 + Y) \varphi_2 - Y_2 \varphi_1 = -SE_1.$$

С учетом $\varphi_1 = E_1$ получим $(Y_2 + Y) \varphi_2 = (Y_2 - S) E_1$, откуда

$$\varphi_2 = \frac{(Y_2 - S) E_1}{Y_2 + Y}.$$

Найдем токи, протекающие через проводимости Y_1 и Y_2

$$\mathcal{I}_{Y1} = E_1 Y_1, \quad \mathcal{I}_{Y2} = (\varphi_1 - \varphi_2) Y_2 = E_1 \left[1 - \frac{(Y_2 - S)}{Y_2 + Y} \right].$$

В соответствии с I-м законом Кирхгофа

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_{Y1} + \mathcal{I}_{Y2} = E_1 Y_1 + E_1 \left[1 - \frac{(Y_2 - S)}{Y_2 + Y} \right] Y_2.$$

Из последнего выражения определяем входное сопротивление схемы

$$Z_{вх} = \frac{E_1}{\mathcal{I}_1} = \frac{1}{Y_1 + [1 - (Y_2 - S)/(Y_2 + Y)]Y_2} = \frac{Y_2 + Y_3 + G_i + Y_H}{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + G_i + Y_H) + (Y_1 + S)Y_2}$$

Пример 2. В цепи (рис. 5а) с ИТУТ (зависимый источник тока, управляемый током) определить токи в ветвях, потенциалы узлов φ_1 и φ_2 , если $\mathcal{I} = 1$ мА, $R_P = 20$ Ом, $R_H = R_2 = 40$ Ом, $R_1 = R_0 = 10$ Ом, $\beta = 10$.

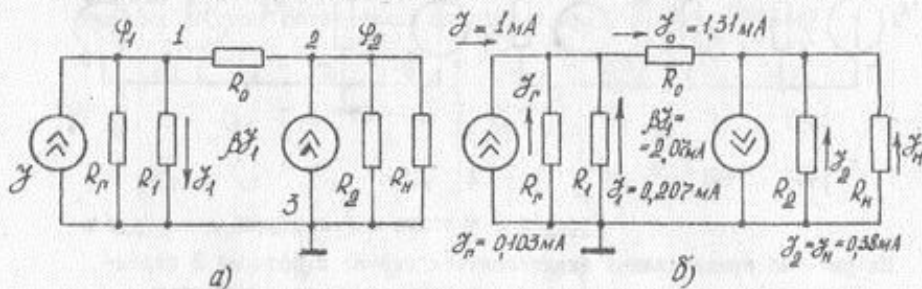


Рис. 5

Решение

Заземляем узел 3, принимая $\varphi_3 = 0$. Составляем узловые уравнения для узлов 1 и 2

$$\left(\frac{1}{R_P} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}\right)\varphi_1 - \frac{1}{R_0}\varphi_2 = \mathcal{I},$$

$$-\frac{1}{R_0}\varphi_1 + \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_H}\right)\varphi_2 = \beta \mathcal{I}_1.$$

Выразим ток зависимого источника тока через узловый потенциал φ_1

$$\beta \mathcal{I}_1 = \beta \varphi_1 / R_1.$$

Подставив последнее соотношение во второе узловое уравнение, получаем

$$\left(\frac{1}{R_P} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}\right)\varphi_1 - \frac{1}{R_0}\varphi_2 = \mathcal{I},$$

$$-\left(\frac{1}{R_0} + \frac{\beta}{R_1}\right)\varphi_1 + \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_H}\right)\varphi_2 = 0.$$

Определив из этой системы уравнений потенциалы узлов φ_1 и φ_2 с учетом числовых значений параметров схемы, получим

$$\varphi_1 = -2,07 \text{ мВ}, \quad \varphi_2 = -15,17 \text{ мВ}.$$

Определяем токи в ветвях. Ток \mathcal{I}_{R_1} в резисторе R_1 $\mathcal{I}_{R_1} = \varphi_1 / R_1 = \frac{-2,07}{10} = -0,207 \text{ мА}$. Знак "минус" означает, что направление

найденного тока (рис. 5б) противоположно направлению, показанному на рис. 5а. Ток в резисторе R_0 $\mathcal{I}_0 = (\varphi_1 - \varphi_2) / R_0 = 1,31 \text{ мА}$;

ток в резисторе R_n $\mathcal{I}_n = \varphi_1 / R_n = -2,07 / 20 = -0,103 \text{ мА}$,

ток зависимого источника тока $\beta \mathcal{I}_1 = 10 \cdot (-0,207) = -2,07 \text{ мА}$;

ток в резисторе R_2 равен току в нагрузке $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_n - \varphi_2 / R_2 \approx 0,38 \text{ мА}$.

Найденные значения токов в ветвях и их направления показаны на рис. 5б. Легко проверить, что I-й закон Кирхгофа для любого узла схемы выполняется.

РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ
ЧЕТЫРЕХПОЛУСНИКОВ

Смысл теории четырехполосников ($2-2$ цепей) состоит в том, что пользуясь некоторыми обобщенными параметрами, можно находить токи и напряжения на его входе и выходе.

2.1. Параметры четырехполосников и
соотношения между ними

Рассмотрим четырехполосник $2-2$ - рис. 6. В общем случае внутри четырехполосника содержатся пассивные элементы (резисторы, индуктивности, емкости) и активные приборы -

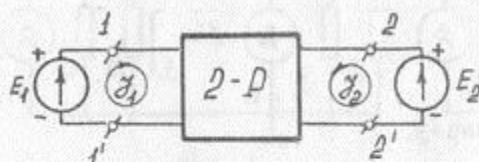


Рис. 6

транзисторы, радиолампы и т.п. На рис. 6 внешние цепи, соединенные с зажимами 1-1' и 2-2', заменены источниками напряжения E_1 и E_2 ; на этом же рисунке показаны

выбранные положительные направления токов I_1 и I_2 . Показанное на рис. 6 положительное направление токов и напряжений наиболее часто используется как в отечественной, так и в зарубежной научно-технической литературе по теории электрических цепей, хотя некоторые авторы выбирают для тока I_2 направление, противоположное указанному на рис. 6. Поэтому при сравнении параметров $2-2$ цепей, имеющих в разных книгах, следует учитывать выбранные положительные направления для токов и напряжений на входе и выходе четырехполосника.

2.1.1. Y и Z - параметры четырехполосников

Запишем контурные уравнения для четырехполосника $2-2$ (рис. 6), полагая, что входная цепь с независимым источником напряжения E_1 образует первый контур, а выходная цепь с независимым источником напряжения E_2 образует второй контур. Считаем, что в остальных контурах, имеющих внутри четырехполосника, независимые источники напряжения и тока отсутствуют.^{*)}

*) Управляемые (зависимые) источники напряжения и тока, вообще говоря, входят в состав четырехполосника.

Положив в общем решении контурных уравнений (4) все $E_n = 0$ (кроме $E_1 \neq 0, E_2 \neq 0$) и взяв решения для двух интересующих нас контурных токов \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 , получим

$$\mathcal{I}_1(\omega) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} E_1(\omega) + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} E_2(\omega), \quad (8)$$

$$\mathcal{I}_2(\omega) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} E_1(\omega) + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} E_2(\omega).$$

Это соотношение устанавливает связь между токами и напряжениями на входе и выходе четырехполюсника. Обозначим

$$Y_{11}(\omega) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \quad Y_{12}(\omega) = \frac{\Delta_{21}}{\Delta}, \quad (9)$$

$$Y_{21}(\omega) = \Delta_{12}/\Delta, \quad Y_{22}(\omega) = \frac{\Delta_{22}}{\Delta}$$

и запишем уравнения (8) в виде

$$\mathcal{I}_1 = Y_{11} E_1 + Y_{12} E_2, \quad (10)$$

$$\mathcal{I}_2 = Y_{21} E_1 + Y_{22} E_2,$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} = [Y]_{k\beta} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где матрица

$$[Y]_{k\beta} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

называется матрицей проводимостей короткого замыкания. Двухзначные индексы Y -параметров матрицы (12) указывают на то, какую пару величин связывает тот или иной Y -параметр. Так, например, параметр Y_{11} связывает величины \mathcal{I}_1 и E_1 , параметр Y_{12} - величины \mathcal{I}_1 и E_2 и т.д. В каждом случае первый индекс указывает на зависимую переменную, а второй - на независимую. Элементы матрицы (12) имеют размерность проводимости, а саму матрицу называют матрицей проводимостей короткого замыкания. Основание для названия "параметры короткого замыкания" станет понятным, если получим из системы уравнений (10)

$$Y_{11} = \mathcal{I}_1/E_1 \Big|_{E_2=0}, \quad Y_{12} = \mathcal{I}_1/E_2 \Big|_{E_1=0}, \quad (13)$$

$$Y_{21} = \mathcal{I}_2/E_1 \Big|_{E_2=0}, \quad Y_{22} = \mathcal{I}_2/E_2 \Big|_{E_1=0}.$$

Напряжения E_1 и E_2 обращаются в нуль при коротком замыкании соответствующих зажимов. Например, чтобы вычислить или изме-

ритель параметр Y_{12} , необходимо замкнуть зажимы I-I' (рис. 6) и подключить источник напряжения к зажимам 2-2'. Параметры Y_{11} и Y_{22} называют соответственно входной и выходной проводимостями короткого замыкания, а параметры Y_{12} и Y_{21} - передаточными проводимостями короткого замыкания. В общем случае $Y_{12} \neq Y_{21}$ и для описания четырехполюсника требуется знать все четыре параметра матрицы $[Y]_{\kappa 3}$.

Рассмотрим подробнее передаточные проводимости короткого замыкания $Y_{12} = \Delta_{21}/\Delta$ и $Y_{21} = \Delta_{12}/\Delta$. В частном случае, когда внутри четырехполюсника отсутствуют зависимые (управляемые) источники, что эквивалентно отсутствию активных приборов (транзисторы, радиолампы и т.п.), определитель Δ системы контурных уравнений является, как указывалось в разделе I, симметричным, т.е. его элементы $Z_{ik} = Z_{ki}$. В силу симметрии определителя Δ миноры элементов Z_{ik} и Z_{ki} также равны между собой ($M_{ik} = M_{ki}$), поэтому равны и алгебраические дополнения $\Delta_{ik} = (-1)^{k+i} M_{ik} = \Delta_{ki} = (-1)^{k+i} M_{ki}$. Отсюда заключаем, что при отсутствии зависимых источников передаточные проводимости короткого замыкания Y_{12} и Y_{21} равны между собой, т.е.

$$Y_{12} = Y_{21}. \quad (14)$$

Четырехполюсники, для которых выполняется условие (14), называются обратимыми или, как иногда говорят, взаимными. Таким образом, если четырехполюсник обратим, то для его описания в системе Y - параметров необходимо знать лишь 3 параметра из 4-х.

Дадим следующую трактовку условия обратимости. Запишем (14) с учетом (13) в виде

$$Y_{12} = \frac{I_1}{E_2} \Big|_{E_1=0} = Y_{21} = \frac{I_2}{E_1} \Big|_{E_2=0}.$$

Положим $E_1 = E_2 = E$. Это означает, что сначала включаем источник напряжения E на выходе четырехполюсника и определяем

Y_{12} ; затем помещаем этот же источник на входе четырехполюсника и определяем Y_{21} . Поскольку $Y_{12} = Y_{21}$, то $I_1/E = I_2/E$ или $I_1 = I_2$. Последнее условие является формулировкой известной теоремы обратимости [1]: если некоторая ЭДС, находящаяся в каком-либо контуре электрической цепи, вызывает ток в другом контуре этой цепи, то та же ЭДС, будучи перенесенной во второй контур, вызывает в первом контурный ток той же величины и фазы.

Рассмотрим порядок определения Y -параметров.

1. Для вычисления Y -параметров четырехполюсника любой сложности следует использовать выражения (9), основанные на контурном анализе; при этом процесс вычислений для многоэлементного четырехполюсника может быть весьма утомительным при ручном счете, но может быть легко выполнен на ЭВМ.

2. Для вычисления Y -параметров элементарных (классических) четырехполюсников, каковыми являются, например, Г, Т, П-образные Q - D цепи, целесообразно использовать соотношения (13).

Рассмотрим пример. Пусть требуется определить матрицу $[Y]_{кз}$ П-образного четырехполюсника - рис. 7. Замкнув зажимы 2-2',

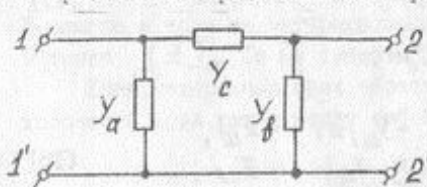


рис. 7

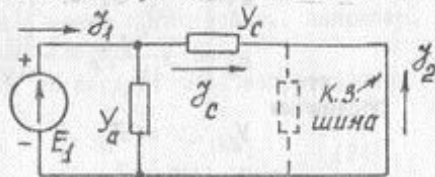


рис. 8

подключив к зажимам 1-1' источник ЭДС E_1 , находим $Y_{11} = I_1/E_1|_{E_2=0} = Y_a + Y_c$. Аналогично, замкнув зажимы 1-1', получим $Y_{22} = I_2/E_2|_{E_1=0} = Y_b + Y_c$.

Поскольку четырехполюсник обратим, то $Y_{12} = Y_{21}$ и необходимо определить один из этих параметров, например, Y_{21} . Изобразим на рис. 8 рассматриваемый четырехполюсник в условиях, при которых определяется параметр Y_{21} : на этом рисунке показано положительное направление токов на входе и выходе четырехполюсника, а также реальное направление тока I_c в проводимости Y_c , создаваемое источником E_1 указанной полярности. Замечаем, что $I_2 = -I_c$. Определив $I_c = E_1 Y_c$, находим $I_2 = -E_1 Y_c$. Тогда

$Y_{21} = I_2/E_1|_{E_2=0} = -E_1 Y_c/E_1 = -Y_c = Y_{12}$. Таким образом, искомая матрица $[Y]_{кз}$ принимает вид

$$[Y]_{кз} = \begin{bmatrix} Y_a + Y_c & -Y_c \\ -Y_c & Y_b + Y_c \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Уравнение (15) связывает между собой токи и напряжения на входе и выходе четырехполюсника. Имея эти уравнения, можно расположить переменные в любом порядке. Выразим, например, напряжения E_1 и E_2 через токи I_1 и I_2 . Для этого, решив матричное

уравнение (II) относительно матрицы $[E_1 \ E_2]^t$, где "штрих" означает транспонированную матрицу, получим

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = [Y]_{кз}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Определив обратную матрицу, запишем (16) в виде

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta Y} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix},$$

где $\Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$ - определитель матрицы $[Y]_{кз}$.
Запишем последнее уравнение в алгебраическом виде

$$E_1 = \frac{Y_{22}}{\Delta Y} \mathcal{I}_1 - \frac{Y_{12}}{\Delta Y} \mathcal{I}_2, \quad (17)$$

$$E_2 = \frac{-Y_{21}}{\Delta Y} \mathcal{I}_1 + \frac{Y_{11}}{\Delta Y} \mathcal{I}_2.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} Y_{22}/\Delta Y &= Z_{11}, & -Y_{12}/\Delta Y &= Z_{12}, \\ -Y_{21}/\Delta Y &= Z_{21}, & Y_{11}/\Delta Y &= Z_{22}. \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом (18) запишем (17) в виде

$$E_1 = Z_{11} \mathcal{I}_1 + Z_{12} \mathcal{I}_2, \quad (19)$$

$$E_2 = Z_{21} \mathcal{I}_1 + Z_{22} \mathcal{I}_2,$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = [Z]_{xx} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где матрица $[Z]_{xx} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$ называется матрицей сопротивлений холостого хода. Таким образом, определили систему Z параметров четырехполюсника, имеющих размерность сопротивления. Эти параметры называют еще параметрами сопротивлений холостого хода. Основание для такого названия следует из уравнений (19)

$$Z_{11} = E_1/\mathcal{I}_1 |_{\mathcal{I}_2=0}, \quad Z_{12} = E_1/\mathcal{I}_2 |_{\mathcal{I}_1=0}, \quad (21)$$

$$Z_{21} = E_2/\mathcal{I}_1 |_{\mathcal{I}_2=0}, \quad Z_{22} = E_2/\mathcal{I}_2 |_{\mathcal{I}_1=0}.$$

Соотношения (21) показывают, что Z -параметры четырехполюсника можно вычислить или измерить на практике в режиме холостого хода по входу ($\mathcal{I}_2 = 0$) или по выходу ($\mathcal{I}_1 = 0$). Токи становятся

равными нулю при размыкании соответствующей пары зажимов. Так, например, чтобы найти Z_{21} , размыкаем зажимы 2-2' и подключаем к зажимам 1-1' (рис. 6) источник напряжения. Параметры Z_{11} и Z_{22} называются соответственно входным и выходным сопротивлениями холостого хода, а параметры Z_{21} и Z_{12} - передаточными сопротивлениями холостого хода. Из сравнения уравнений (16) и (20) следует связь между матрицами $[Y]_{кз}$ и $[Z]_{хх}$

$$[Z]_{хх} = [Y]_{кз}^{-1} \quad (22)$$

Справедливо и обратное соотношение

$$[Y]_{кз} = [Z]_{хх}^{-1} \quad (23)$$

У одного и того же четырехполюсника может существовать, например, матрица $[Z]_{хх}$ и не существовать матрица $[Y]_{кз}$.

Если четырехполюсник обратим, то передаточные сопротивления холостого хода равны между собой, т.е.

$$Z_{12} = Z_{21} \quad (24)$$

Последнее равенство можно доказать аналогично тому, как было доказано равенство (14).

Для вычисления Z -параметров четырехполюсника любой сложности следует исходить из контурного анализа и с этой целью необходимо в соотношение (18), связывающее Z -параметры с Y -параметрами, подставить соотношение (9). Для вычисления Z -параметров ρ - ρ цепи несложной структуры целесообразно использовать соотношения (21).

Рассмотрим пример. Требуется определить Z -параметры четырехполюсника - рис. 9, представляющего собой эквивалентную низкочастотную линейную малосигнальную схему биполярного транзистора. Такой четырехполюсник необратим, поскольку содержит зависимый источник напряжения E_y , управляемый током эмиттера

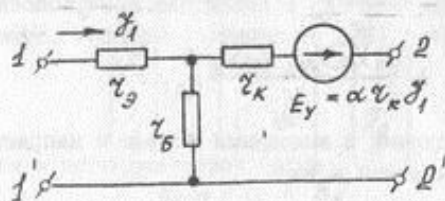


Рис. 9

($\alpha < 1$ - коэффициент усиления по току в схеме с общей базой). Для определения Z -параметров воспользуемся соотношениями (21). Тогда найдем, что

$Z_{11} = r_3 + r_5$, $Z_{22} = r_k + r_5$. Определим передаточное сопротивление Z_{12} . В этом случае разомкнем зажимы I-I' и подключим источник напряжения к зажимам 2-2' - рис. 10а.

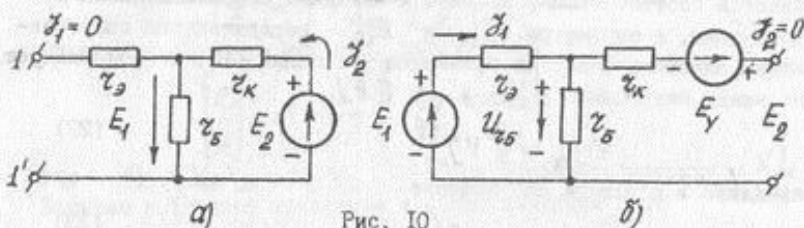


Рис. 10

Находим $E_1 = J_2 \cdot r_5$, поэтому $Z_{12} = E_1 / J_2 |_{J_1=0} = J_2 r_5 / J_2 = r_5$. При определении передаточного сопротивления Z_{21} четырехполюсник принимает вид, представленный на рис. 10б, откуда находим

$$E_2 = \alpha r_k J_1 + r_5 J_1, \text{ поэтому}$$

Матрица $[Z]_{xx}$ четырехполюсника принимает вид

$$[Z]_{xx} = \begin{bmatrix} r_3 + r_5 & r_5 \\ r_5 + \alpha r_k & r_k + r_5 \end{bmatrix}.$$

2.1.2. Цепные параметры четырехполюсников

Параметры, связывающие входные величины (E_1, J_1) с выходными (E_2, J_2), называют цепными параметрами, ABCD - параметрами или α -параметрами. Выразив из 2-го уравнения системы (10) величину E_1 и подставив эту величину в первое уравнение этой системы, получим

$$E_1 = \frac{1}{Y_{21}} J_2 - \frac{Y_{22}}{Y_{21}} E_2,$$

$$J_1 = \frac{Y_{11}}{Y_{21}} J_2 + \frac{Y_{12} Y_{21} - Y_{11} Y_{22}}{Y_{21}} E_2,$$

т.е. требуемую связь между входными и выходными токами и напряжениями. Запишем эту систему уравнений в виде

$$E_1 = A E_2 + B \cdot (-J_2),$$

$$J_1 = C E_2 + D \cdot (-J_2).$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_2 \\ -\mathcal{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где введены следующие обозначения:

$$A = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}, \quad B = -\frac{1}{Y_{21}}, \quad C = \frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}, \quad D = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}. \quad (26)$$

Соотношения (26) устанавливают связь между ABCD - параметрами и Y - параметрами четырехполюсника. Полученная система уравнений (25) исторически была первой системой соотношений между токами и напряжениями на зажимах четырехполюсника, применявшаяся при анализе электрических цепей. Параметры, введенные в системе (25), называются ABCD-параметрами, A - параметрами или цепными параметрами.

Обратим внимание на отрицательный знак тока \mathcal{I}_2 в соотношении (25): при использовании цепных параметров выбирают направление тока \mathcal{I}_2 , противоположное выбранному ранее - рис. II. Это

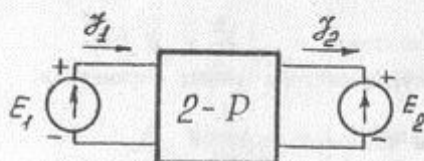


Рис. II

связано с тем, что ABCD-параметры используются для описания каскадного или цепного соединения четырехполюсников, когда, как будет показано ниже, удобно выбрать именно такое положительное направление тока \mathcal{I}_2 . Таким образом, при описании четырехполюсника в терминах Y и Z - параметров выбираем положительное направление токов и напряжений, показанное на рис. 6, а в системе ABCD-параметров используется противоположное направление для тока \mathcal{I}_2 - рис. II. Опустив знак минус, запишем соотношение (25) в виде

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ \mathcal{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_2 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

или в алгебраической форме

$$\begin{aligned} E_1 &= AE_2 + B\mathcal{I}_2, \\ \mathcal{I}_1 &= CE_2 + D\mathcal{I}_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Цепные параметры называют еще смешанными, поскольку два из них вычисляются (или измеряются) в режиме холостого хода, а два

используется для описания каскадного или цепного соединения четырехполюсников, когда, как будет показано ниже, удобно выбрать именно такое положительное направление тока \mathcal{I}_2 . Таким

параметра - в режиме короткого замыкания; кроме того, два параметра (А и D) - безразмерны, один имеет размерность сопротивления (параметр В) и один - размерность проводимости (параметр С). Действительно, как следует из соотношений (28)

$$A = \frac{E_1}{E_2} \Big|_{\mathcal{I}_2=0}, \quad B = \frac{E_1}{\mathcal{I}_2} \Big|_{E_2=0}, \quad (29)$$

$$C = \mathcal{I}_1/E_2 \Big|_{\mathcal{I}_2=0}, \quad D = \mathcal{I}_1/\mathcal{I}_2 \Big|_{E_2=0}.$$

Найдем условие обратимости четырехполюсника в системе ABCD-параметров. С этой целью вычислим определитель матрицы цепных параметров, подставив в него вместо ABCD-параметров их значения из соотношения (26). Тогда получим

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC = \begin{vmatrix} -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & -\frac{1}{Y_{21}} \\ \frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}} & -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{vmatrix} = \frac{Y_{12}}{Y_{21}}.$$

Используя условие обратимости в системе Y-параметров ($Y_{22} = Y_{21}$), получим

$$AD - BC = 1. \quad (30)$$

Это и есть условие обратимости в системе цепных параметров.

2.1.3. *h* и *g* -параметры четырехполюсников

Установим связь между напряжением на входе и током на выходе (E_1, \mathcal{I}_2) с током на входе и напряжением на выходе (E_2, \mathcal{I}_1) четырехполюсника. Для установления этой связи используем соотношение (25), откуда получаем

$$E_1 = \frac{B}{\mathcal{D}} \mathcal{I}_1 + \frac{AD - BC}{\mathcal{D}} E_2,$$

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{1}{\mathcal{D}} \mathcal{I}_1 + \frac{C}{\mathcal{D}} E_2.$$

Запишем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} E_1 &= h_{11} \mathcal{I}_1 + h_{12} E_2, \\ \mathcal{I}_2 &= h_{21} \mathcal{I}_1 + h_{22} E_2, \end{aligned} \quad (31)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

где обозначено

$$h_{11} = \frac{B}{\mathcal{D}}, \quad h_{12} = \frac{AD - BC}{\mathcal{D}}, \quad h_{21} = -\frac{1}{\mathcal{D}}, \quad h_{22} = \frac{C}{\mathcal{D}}. \quad (33)$$

Уравнения (31) и (32) являются уравнениями четырехполюсника в h -параметрах соответственно в алгебраическом и матричном виде. Соотношения (33) устанавливают связь между h -параметрами и пассивными параметрами g - D цепи. Заметим, что поскольку исходным является соотношение (25), то положительным направлением для тока \mathcal{I}_2 является направление, показанное на рис. 6.

Как и цепные параметры, h -параметры четырехполюсника являются смешанными параметрами, поскольку, как следует из соотношения (31), их можно определить по следующим формулам:

$$h_{11} = \left. \frac{E_1}{\mathcal{I}_1} \right|_{E_2=0} - \text{входное сопротивление четырехполюсника в режиме К.З. по выходу};$$

$$h_{12} = \left. \frac{E_1}{E_2} \right|_{\mathcal{I}_1=0} - \text{величина, обратная коэффициенту передачи по напряжению в режиме Х.Х. по входу};$$

$$h_{21} = \left. \frac{\mathcal{I}_2}{\mathcal{I}_1} \right|_{E_2=0} - \text{коэффициент усиления по току в режиме К.З. по выходу};$$

$$h_{22} = \left. \frac{\mathcal{I}_2}{E_2} \right|_{\mathcal{I}_1=0} - \text{выходная проводимость в режиме Х.Х. по входу}.$$

Таким образом, h -параметры четырехполюсника имеют четкий физический смысл и находят широкое применение при расчетах различных радиотехнических цепей и систем.

С учетом соотношения (30), из (33) находим, что условие обратимости в системе h -параметров имеет вид

$$h_{21} = -h_{12}.$$

Рассмотрим кратко g -параметры четырехполюсника. Решив уравнение (32) относительно матрицы $\begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 & E_2 \end{bmatrix}$, получим

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ \mathcal{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Определив обратную матрицу $[h]^{-1}$, получим

$$[h]^{-1} = [g] = \frac{1}{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}} \begin{bmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix}.$$

Последнее соотношение устанавливает связь между h и g -параметрами. Заметим, что g -параметры редко используются при анализе электрических цепей.

2.1.4. Симметричный обратимый четырехполюсник

Четырехполюсник называют симметричным, если перемена местами его входных и выходных зажимов не изменяет токов и напряжений в цепи, с которой он соединен [1]. Симметричные четырехполюсники всегда обратимы.

Для математического описания необратимого четырехполюсника в любой из разобранных выше систем параметров требуется знать 4 величины. Если четырехполюсник обратим, то для его описания требуется 3 параметра. Если же четырехполюсник является симметричным, то для его описания в любой системе параметров необходимо знать лишь 2 величины. Можно показать (см. задачу № 13), что условие симметрии в системе Y, Z и ABCD-параметров выражается следующими соотношениями:

$$Y_{11} = Y_{22}, \quad Z_{11} = Z_{22}, \quad A = D. \quad (34)$$

2.2. Эквивалентность (схемы замещения) четырехполюсников

Установлено, что соотношения между токами и напряжениями на зажимах любого линейного четырехполюсника независимо от числа входящих в него элементов и способа их соединения описываются системой из двух уравнений, содержащих не более четырех независимых коэффициентов. Покажем, что такой системе уравнений всегда можно поставить в соответствие эквивалентную электрическую цепь (схему замещения), содержащую не более четырех элементов, параметры которых выражаются через независимые коэффициенты системы уравнений четырехполюсника. Дадим следующее определение эквивалентности двух четырехполюсников: четырехполюсник $\mathcal{L} - \mathcal{D}_1$ эквивалентен четырехполюснику $\mathcal{L} - \mathcal{D}_2$, если при замене одного другим напряжения и токи на зажимах не изменятся независимо от того,

какие внешние цепи присоединены к зажимам. Из этого определения следует, что два эквивалентных четырехполюсника $\mathcal{L}-\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{L}-\mathcal{P}_2$ имеют одинаковые системы параметров ($Z, Y, ABCD, h, g$). Поэтому, если задан четырехполюсник и требуется найти второй четырехполюсник, эквивалентный первому, необходимо, чтобы у обоих четырехполюсников одна из систем параметров была одинаковой. Выбор наиболее удобной системы параметров зависит от структуры схем и от того, для какой конечной цели они предназначены.

Рассмотрим эквивалентность четырехполюсников в системе Z -параметров.

Возьмем первое уравнение из системы (19) $E = Z_{11}J_1 + Z_{12}J_2$. Правая часть уравнения представляет собой сумму двух напряжений,

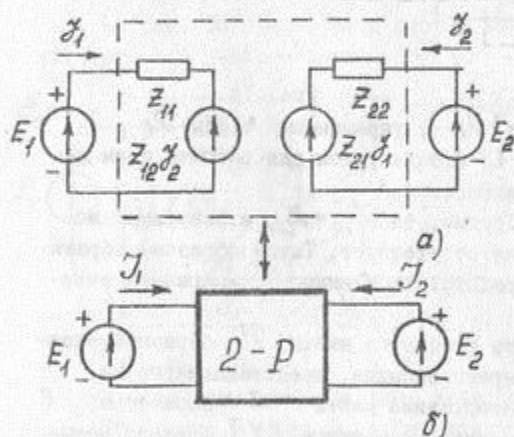


Рис. 12

В результате приходим к эквивалентной схеме, показанной на рис. 12а. На этом рисунке пунктиром показан эквивалент произвольного четырехполюсника $\mathcal{L}-\mathcal{P}$ - рис. 12б.

С другой стороны, если написать 2-й закон Кирхгофа для двух контуров на рис. 12а с контурными токами J_1 и J_2 , то придет к уравнениям (19), что также доказывает правильность нарисованной схемы замещения произвольного четырехполюсника.

поэтому можно считать, что входная часть эквивалентной цепи должна состоять из двух компонентов - сопротивления Z_{11} и зависимого источника напряжения $Z_{12}J_2$, управляемого током J_2 . Аналогично, рассматривая второе уравнение системы (19) $E_2 = Z_{21}J_1 + Z_{22}J_2$, считаем, что выходная часть эквивалентной схемы должна состоять из сопротивления Z_{22} и зависимого источника напряжения $Z_{21}J_1$, управляемого током J_1 .

Рассмотрим 2-й вариант эквивалентной схемы произвольного четырехполюсника в системе Z -параметров - рис. 13. В справедливости этой схемы можно убедиться (см. задачу № 14), если записать контурные уравнения для контуров 1 и 2 с контурными токами \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 . В общем случае, когда четырехполюсник необратим ($Z_{12} \neq Z_{21}$), схема замещения содержит зависимый источник

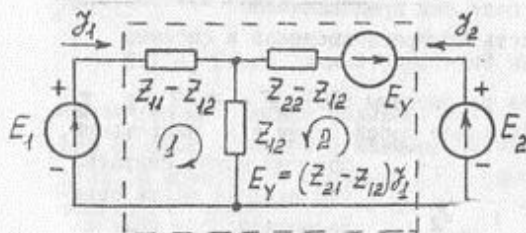


Рис. 13

напряжения $E_Y = (Z_{21} - Z_{12})\mathcal{I}_1$, управляемый ток \mathcal{I}_1 .

Эквивалентная схема на рис. 13 используется для расчета схем на транзисторах и электронных лампах.

Если четырехполюсник обратим, то $Z_{12} = Z_{21}$ и зависимый источник E_Y в схеме замещения отсутствует. Таким образом, обратимый четырехполюсник можно представить в виде Π -образной эквивалентной схемы - рис. 14.

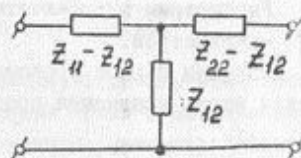
Рассмотрим пример. Пусть требуется найти Π -образный эквивалент Π -образного четырехполюсника, представленного на рис. 7. Для решения задачи необходимо найти Z -параметры Π -образного четырехполюсника. Но матрица $[Y]_{кз}$ этого четырехполюсника найдена (см. выражение (15)), поэтому в соответствии с соотношением (22) получим

$$[Z]_{кк} = [Y]_{кз}^{-1} = \begin{bmatrix} Y_a + Y_c & -Y_c \\ -Y_c & Y_\beta + Y_c \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Y_\beta + Y_c & Y_c \\ Y_c & Y_a + Y_c \end{bmatrix},$$

где $\Delta = Y_a Y_\beta + Y_c Y_\beta + Y_a Y_c$. Следовательно, параметры эквивалентной Π -образной схемы (рис. 14) имеют вид

$$Z_{11} - Z_{12} = Y_\beta / \Delta, \quad Z_{22} - Z_{12} = Y_a / \Delta, \quad Z_{12} = Y_c / \Delta.$$

Рис. 14



Рассмотрим эквивалентность четырехполюсников в системе Y -параметров.

Первый вариант схемы замещения в системе Y -параметров представлен на рис. 15.

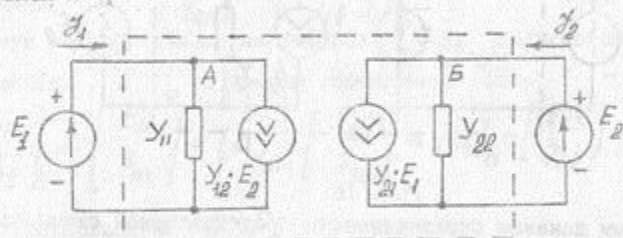


Рис. 15

На рис. 16 представлен второй вариант схемы замещения в системе Y -параметров.

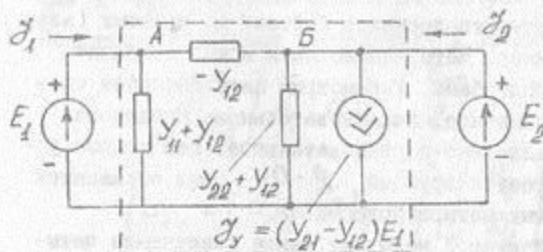


Рис. 16

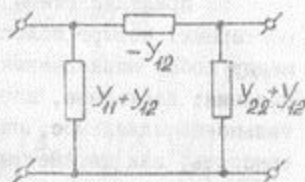


Рис. 17

В справедливости эквивалентных схем, представленных на рис. 15 и рис. 16, можно убедиться, если записать I-й закон Кирхгофа для узлов А и В. Тогда получим систему уравнений четырехполюсника (10) в Y -параметрах. Для обратимого четырехполюсника ($Y_{12} = Y_{21}$) зависимый источник тока $I_y = 0$ и эквивалентная схема на рис. 16 принимает вид, показанный на рис. 17. Таким образом, обратимый четырехполюсник можно представить в виде Π -образной эквивалентной схемы.

Рассмотрим эквивалентную схему четырехполюсника в системе h -параметров, представленную на рис. 18. Если записать уравнение ЗК для входного контура и уравнение ЗК для узла А, то получим систему уравнений (31) четырехполюсника в h -параметрах

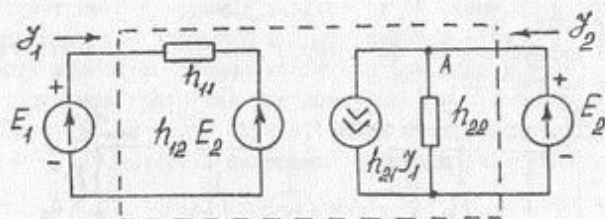


Рис. 18

и тем самым докажем справедливость представленной схемы замещения. Последняя схема замещения наиболее часто используется для описания биполярного транзистора в линейном режиме.

2.3. Соединения четырехполюсников

На практике схемы четырехполюсников состоят из простых (элементарных) четырехполюсников. Четырехполюсники можно соединять между собой несколькими способами. Рассмотрим пять способов соединения: каскадное, параллельное, последовательное, последовательно-параллельное, параллельно-последовательное. Необходимо установить, как параметры результирующей \mathcal{D} - \mathcal{D} цепи выражаются через параметры соединяемых четырехполюсников.

Каскадной или цепной схемой называют такое соединение четырехполюсников, когда выходные зажимы одного являются входными зажимами другого, как показано на рис. 19.

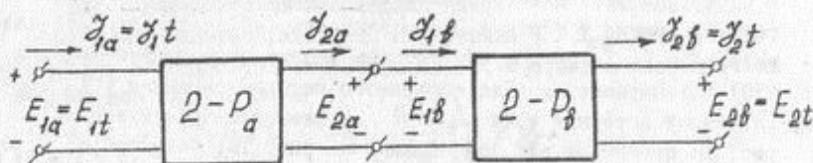


Рис. 19

Заметим, что напряжения и токи в соединяемых цепях имеют индексы "а" и "в"; индекс "т" относится к результирующей \mathcal{D} - \mathcal{D} цепи.

Из рассмотрения рис. 19 следует, что $E_{2a} = E_{1\beta}$, $I_{2a} = I_{1\beta}$ ⁺⁾

Запишем эти равенства в матричной форме

$$\begin{bmatrix} E_{2a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1\beta} \\ I_{1\beta} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Используя матрицу цепных параметров $[a]_a$, записываем для четырехполюсника $\mathcal{D}-P_a$ с учетом соотношения (35)

$$\begin{bmatrix} E_{1t} \\ I_{1t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = [a]_a \cdot \begin{bmatrix} E_{2a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} = [a]_a \cdot \begin{bmatrix} E_{1\beta} \\ I_{1\beta} \end{bmatrix}.$$

Для четырехполюсника $\mathcal{D}-P_\beta$ справедливо

$$\begin{bmatrix} E_{1\beta} \\ I_{1\beta} \end{bmatrix} = [a]_\beta \cdot \begin{bmatrix} E_{2\beta} \\ I_{2\beta} \end{bmatrix} = [a]_\beta \cdot \begin{bmatrix} E_{2t} \\ I_{2t} \end{bmatrix},$$

где $[a]_\beta$ - матрица цепных параметров четырехполюсника $\mathcal{D}-P_\beta$

Подставив последнее соотношение в предыдущее, получим

$$\begin{bmatrix} E_{1t} \\ I_{1t} \end{bmatrix} = [a]_t \cdot \begin{bmatrix} E_{2t} \\ I_{2t} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

где

$$[a]_t = [a]_a \cdot [a]_\beta = \begin{bmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\beta & B_\beta \\ C_\beta & D_\beta \end{bmatrix}. \quad (37)$$

- матрица цепных параметров результирующего четырехполюсника, эквивалентного двум каскадно соединенным четырехполюсникам. Полученный результат показывает, что при каскадном соединении четырехполюсников результирующая матрица цепных параметров $[a]_t$ равна произведению матриц цепных параметров соединяемых цепей. Заметим, что полученный результат справедлив и в том случае, когда каскадно соединяются n четырехполюсников.

Для четырехполюсника называются соединенными параллельно, если их соответствующие зажимы соединены между собой так, как

⁺⁾ Заметим здесь еще раз о целесообразности выбранного положительного направления тока I_2 при введении цепных параметров.

показано на рис. 20. Здесь для простоты использовано параллельное соединение двух четырехполюсников, но последующий вывод можно распространить и на большее их число. Здесь, как и в случае каскадного соединения, напряжения и токи в соединяемых $2-P$ цепях имеют индексы "а" и "в"; индекс "т" относится к результирующей $2-P$ цепи. Из рис. 20 следует справедливость сле-

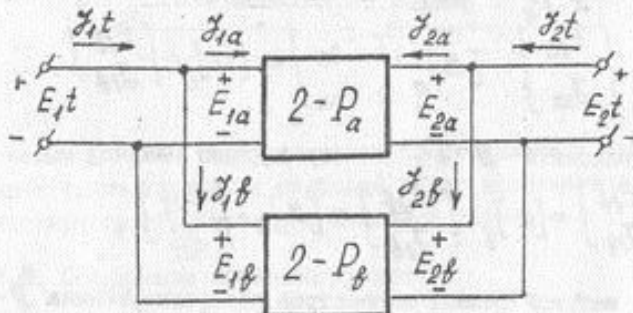


Рис. 20

дующих матричных соотношений:

$$\begin{bmatrix} E_{1t} \\ E_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1a} \\ E_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1b} \\ E_{2b} \end{bmatrix}, \quad (38) \quad \begin{bmatrix} I_{1t} \\ I_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Для четырехполюсников $2-P_a$ и $2-P_b$ можно записать

$$\begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} = [Y]_{\kappa 3 a} \cdot \begin{bmatrix} E_{1a} \\ E_{2a} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} = [Y]_{\kappa 3 b} \cdot \begin{bmatrix} E_{1b} \\ E_{2b} \end{bmatrix}.$$

Подставив последние соотношения в (39) с учетом (38), получим

$$\begin{bmatrix} I_{1t} \\ I_{2t} \end{bmatrix} = [Y]_{\kappa 3 t} \cdot \begin{bmatrix} E_{1t} \\ E_{2t} \end{bmatrix}, \quad \text{где}$$

$$[Y]_{\kappa 3 t} = [Y]_{\kappa 3 a} + [Y]_{\kappa 3 b} = \begin{bmatrix} Y_{11a} + Y_{11b} & Y_{12a} + Y_{12b} \\ Y_{21a} + Y_{21b} & Y_{22a} + Y_{22b} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Таким образом, при параллельном соединении четырехполюсников матрица проводимостей короткого замыкания результирующей цепи равна сумме матриц проводимостей короткого замыкания соединяемых четырехполюсников.

Последовательное соединение четырехполюсников показано на рис. 21. Такое соединение иногда называют этажным. Можно показать (см. задачу 28), что при последовательном соединении четырех-

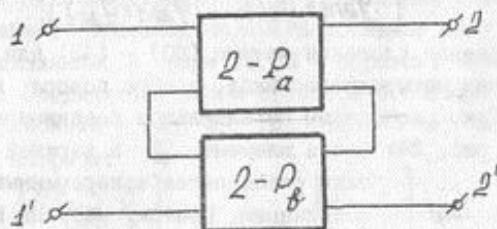


Рис. 21

полюсников матрица сопротивлений холостого хода результирующей цепи равна сумме матриц сопротивлений холостого хода соединяемых цепей, т.е.

$$[Z]_{xx't} = [Z]_{xx'a} + [Z]_{xx'b} = \begin{bmatrix} Z_{11a} + Z_{11b} & Z_{12a} + Z_{12b} \\ Z_{21a} + Z_{21b} & Z_{22a} + Z_{22b} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Рассмотрим последовательно-параллельное (рис. 22) и параллельно-последовательное (рис. 23) соединения четырехполюсников. Такие соединения часто используются в цепях с обратной связью.

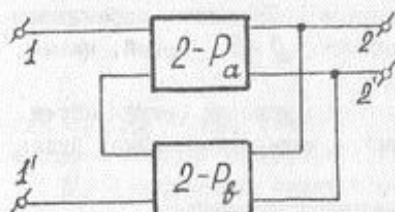


Рис. 22

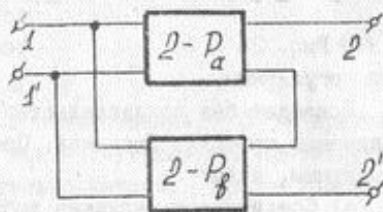


Рис. 23

Можно показать (см. задачу 29), что при последовательно-параллельном соединении четырехполюсников матрица $[h]_t$ результирующей цепи равна сумме $[h]$ - матриц соединяемых цепей, т.е.

$$[h]_t = [h]_a + [h]_b = \begin{bmatrix} h_{11a} + h_{11b} & h_{12a} + h_{12b} \\ h_{21a} + h_{21b} & h_{22a} + h_{22b} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

а при параллельно-последовательном соединении четырехполюсников матрица $[g]_t$ результирующей цепи равна сумме $[g]$ - матриц соединяемых цепей, т.е.

$$[g]_t = [g]_a + [g]_b = \begin{bmatrix} g_{11a} + g_{11b} & g_{12a} + g_{12b} \\ g_{21a} + g_{21b} & g_{22a} + g_{22b} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Установленные правила сложения матриц (40) - (43) для разных способов соединения четырехполюсников, вообще говоря, не всегда справедливы. Так, рассмотрим параллельное соединение двух четырехполюсников на рис. 24: здесь элемент Z в верхней цепи оказывается замкнутым при соединении, поэтому матрица проводимостей короткого замыкания верхней ρ -цепи изменяется и пользоваться правилом сложения матриц $[Y]_{\text{кз}}$ нельзя. Таким образом, в некоторых случаях параметры соединяемых четырехполюсников после их соединения могут отличаться от параметров тех же четырехполюсников до их соединения. Соединение четырехполюсников, при котором сохраняются неизменными параметры соединяемых ρ -цепей, называют регулярным.

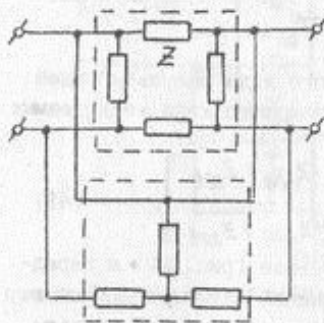


Рис. 24

здесь элемент Z в верхней цепи оказывается замкнутым при соединении, поэтому матрица проводимостей короткого замыкания верхней ρ -цепи изменяется и пользоваться правилом сложения матриц $[Y]_{\text{кз}}$ нельзя. Таким образом, в некоторых случаях параметры соединяемых четырехполюсников после их соединения могут отличаться от параметров тех же четырехполюсников до их соединения. Соединение четырехполюсников, при котором сохраняются неизменными параметры соединяемых ρ -цепей, называют регулярным.

Приведем без доказательства некоторые условия регулярности соединения четырехполюсников. Соединение четырехполюсников будет регулярным, если:

- а) Соединяются каскадно любые четырехполюсники,
- б) Соединяются любым способом уравновешенные четырехполюсники. Уравновешенным называют четырехполюсник, схема которого симметрична относительно продольной оси - рис. 25:

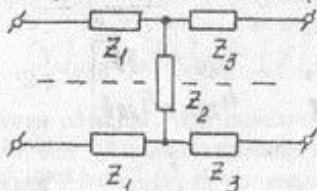


Рис. 25

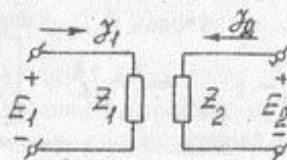


Рис. 26

в) Соединяются параллельно или последовательно треугольные четырехполюсники так, что их нижние зажимы объединяются. Четырехполюсник называют треугольным, если у него один зажим одной пары зажимов непосредственно соединен с одним зажимом другой пары. Примерами треугольных четырехполюсников могут служить транзисторы, радиолампы, а также Т, Г, П - образные четырехполюсники и др.

г) Соединяются любым способом произвольный и разорванный четырехполюсники - рис. 26. Разорванный четырехполюсник имеет следующие матрицы:

$$[Y]_{\kappa\beta} = \begin{bmatrix} 1/z_1 & 0 \\ 0 & 1/z_2 \end{bmatrix}, \quad [z]_{\kappa\kappa} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}, \quad [h] = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & 1/z_2 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

2.4. Электронная лампа как четырехполюсник

Электронная лампа (триод, пентод) обычно описывается Y - параметрами или ABCD - параметрами. Определим указанные параметры для трех случаев включения лампы: схема с общим катодом, схема с общей сеткой и схема с общим анодом. Рассмотрим линейную модель лампы, работающую без токов в цепи управляющей сетки. В этом случае уравнения, связывающие токи и напряжения на электродах лампы, имеют вид

$$I_c = 0, \quad (45)$$

$$I_a = S U_c + U_a / R_i, \quad (46)$$

где I_c, I_a - токи сетки и анода соответственно, S - крутизна анодно-сеточной характеристики, R_i - внутреннее сопротивление, U_c - напряжение сетки относительно катода, U_a - напряжение анода относительно катода.

Рассмотрим схему с общим катодом (OK) - рис. 27а.

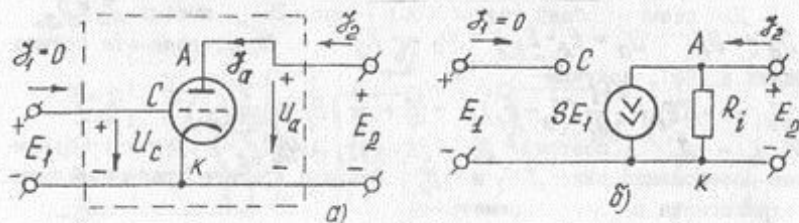


Рис. 27

Как видно из схемы, $\mathcal{I}_c = \mathcal{I}_1 = 0$, $U_c = E_1$, $U_a = E_2$, $\mathcal{I}_a = \mathcal{I}_2$.
Подставляя эти соотношения в (46), получим

$$\mathcal{I}_2 = SE_1 + E_2/R_i.$$

Записав (45) в виде $\mathcal{I}_c = \mathcal{I}_1 = 0 = 0 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2$, получим соотношения

$$\mathcal{I}_1 = 0 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2,$$

$$\mathcal{I}_2 = SE_1 + E_2/R_i,$$

связывающие токи на входе и выходе четырехполюсника с напряжениями на входе и выходе. Это уравнение четырехполюсника в Y -параметрах. Следовательно, лампа в схеме с ОК описывается следующей матрицей $[Y]_{кз}$:

$$[Y]_{кз} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & 1/R_i \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Так как для лампы $\mu = SR_i$, где μ - статический коэффициент усиления, то эту матрицу записывают также в виде

$$[Y]_{кз} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu/R_i & 1/R_i \end{bmatrix} = \frac{1}{R_i} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 1 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Поскольку определитель матрицы $[Y]_{кз}$ равен нулю, то матрица $[Z]_{xx}$ у лампы по схеме с ОК не существует; матрица $[h]$ также не существует. Используя связь между Y -параметрами и цепными параметрами - формула (26), найдем матрицу $[a]$ лампы по схеме с ОК

$$[a] = \begin{bmatrix} -1/\mu & -1/S \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Выясним, как выглядит эквивалентная Π -образная схема рис. 16 для лампы с общим катодом. Определяем параметры эквивалентной Π -образной схемы $Y_{12} = 0$, $Y_{11} + Y_{12} = 0$, $Y_{22} + Y_{12} = 1/R_i$, $(Y_{21} - Y_{12})E_1 = SE_1$. Эквивалентная Π -образная схема лампы с ОК показана на рис. 27б.

Для схемы с общей сеткой (ОС) - рис. 28а - имеем: $\mathcal{I}_a = \mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_a = -\mathcal{I}_1$, $U_a = E_2 - E_1$, $U_c = -E_1$. Подставляя эти соотношения в (46), получим

$$\mathcal{I}_2 = -SE_1 + \frac{1}{R_i}(E_2 - E_1) = -(S + \frac{1}{R_i})E_1 + \frac{1}{R_i}E_2.$$

Но $\mathcal{I}_1 = -\mathcal{I}_2$, поэтому $\mathcal{I}_1 = (S + \frac{1}{R_i})E_1 - \frac{1}{R_i}E_2$. Объединяя соотношения для \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 , получим в итоге уравнение четырехполюсника в Y -параметрах

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= (S + \frac{1}{R_i})E_1 - \frac{1}{R_i}E_2, \\ \mathcal{J}_2 &= -(S + \frac{1}{R_i})E_1 + \frac{1}{R_i}E_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что лампа в схеме с ОС описывается следующей матрицей $[Y]_{кз}$:

$$[Y]_{кз} = \begin{bmatrix} S + \frac{1}{R_i} & -\frac{1}{R_i} \\ -S - \frac{1}{R_i} & \frac{1}{R_i} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_i} \begin{bmatrix} \mu+1 & -1 \\ -(\mu+1) & 1 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Как и в схеме с ОК, для схемы с ОС матрицы $[Z]_{кк}$ и $[h]$ не существуют; матрица цепных параметров для лампы в схеме с ОС имеет вид

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu+1} & \frac{R_i}{\mu+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Эквивалентная Π -образная схема лампы с общей сеткой представлена на рис. 28б (см. задачу 32).

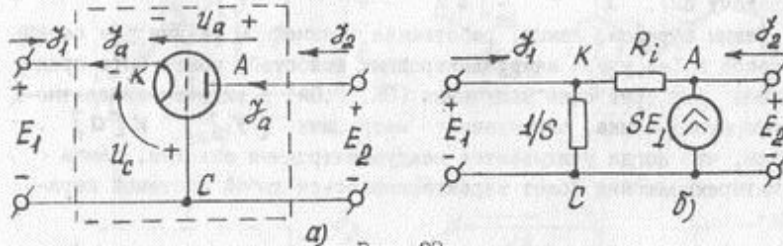


Рис. 28

Рассмотрим схему с общим анодом (ОА) - рис. 29а. Из рассмотрения этой схемы следуют следующие соотношения: $\mathcal{J}_c = \mathcal{J}_1 = 0$, $U_a = -E_2$, $U_c = E_1 - E_2$, $\mathcal{J}_a = -\mathcal{J}_2$. Подставляя эти соотношения в (46), получим

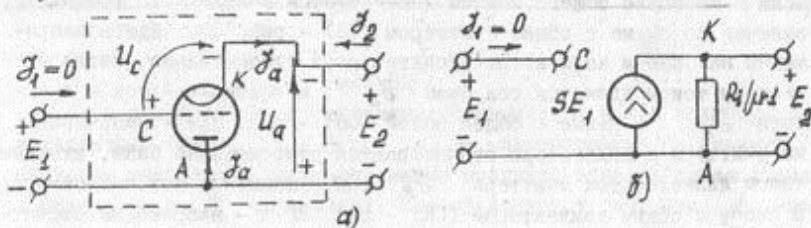


Рис. 29

$$\mathcal{J}_2 = -SE_1 + \left(S + \frac{1}{R_i}\right)E_2.$$

Записав соотношение $\mathcal{J}_1 = 0$ в виде $\mathcal{J}_1 = 0E_1 + 0E_2$ и объединив его с предыдущим соотношением, получаем уравнение четырехполюсника в Y -параметрах

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= 0E_1 + 0E_2, \\ \mathcal{J}_2 &= -SE_1 + \left(S + \frac{1}{R_i}\right)E_2. \end{aligned}$$

Таким образом, лампа в схеме с ОА описывается следующей матрицей

$$[Y]_{кз} : \quad [Y]_{кз} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -S & S + \frac{1}{R_i} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_i} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mu & \mu + 1 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Матрица цепных параметров схемы с ОА имеет вид

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\mu} & \frac{1}{S} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

а матрицы $[Z]_{кк}$ и $[h]$ - не существуют. Эквивалентная Π -образная схема лампы с общим анодом представлена на рис. 29б (см. задачу 32).

Таким образом, лампа, работающая в линейном режиме без сеточных токов и без учета междуэлектродных емкостей, может быть представлена для трех схем включения (ОК, ОС, ОА) в виде эквивалентного четырехполюсника, описываемого матрицами $[Y]_{кз}$ и $[a]$. Заметим, что когда учитываются междуэлектродные емкости, лампа как четырехполюсник может характеризоваться любой системой параметров.

2.5. Биполярный транзистор как четырехполюсник

Обычно один из полюсов транзистора является общим для входа и выхода, поэтому транзистор рассматривается как четырехполюсник. Если в качестве общего полюса используется эмиттер, то транзистор включен по схеме с общим эмиттером (ОЭ) - рис. 30а: здесь напряжения на базе и коллекторе отсчитываются относительно эмиттера, входным током является ток базы \mathcal{J}_6 , а выходным - ток коллектора $\mathcal{J}_к$. В схеме с общей базой (ОБ) - рис. 31а - напряжения на эмиттере и коллекторе отсчитываются относительно базы, входным током является ток эмиттера $\mathcal{J}_э$, а выходным - ток коллектора. В схеме с общим коллектором (ОК) - рис. 32 а - напряжения отсчитываются

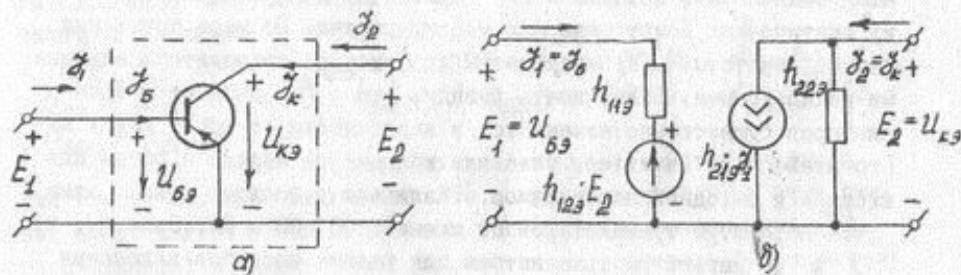


Рис. 30

входят относительно коллектора, а входным и выходным токами являются базовый $I_б$ и эмиттерный $I_э$ токи соответственно.

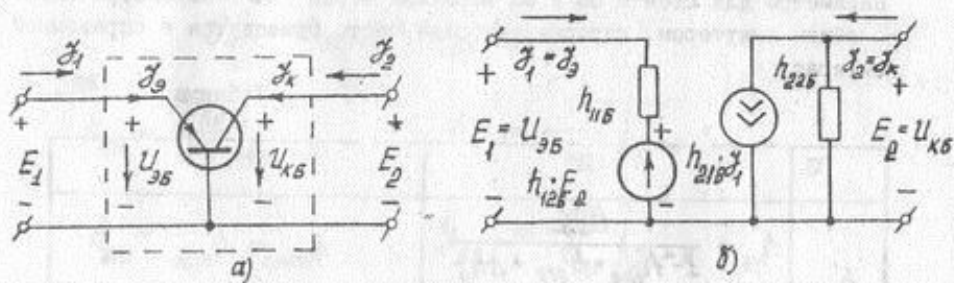


Рис. 31

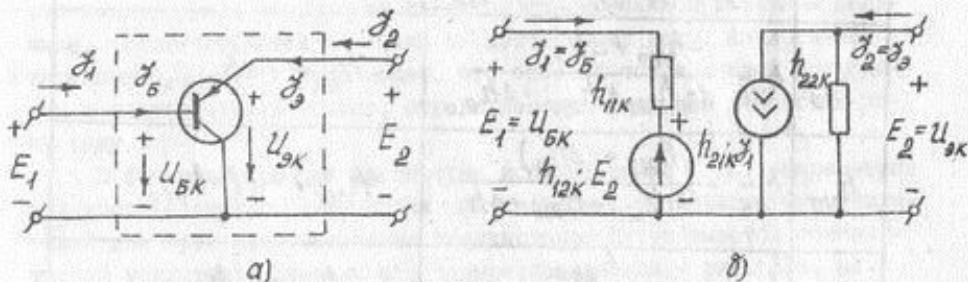


Рис. 32

Для каждого способа включения транзистора можно получить эквивалентные схемы с Y, Z и h -параметрами. На низких частотах наибольшее распространение получила эквивалентная схема транзистора в h -параметрах. Это объясняется тем, что h -параметры легче других поддаются измерению и менее других зависят от частоты колебаний. На частотах звукового диапазона (10 Гц + 20 кГц) h -параметры транзистора являются чисто действитель-

ными величинами, которые легко вычислить, измерить, определить из статических вольт-амперных характеристик. По мере повышения рабочей частоты h -параметры транзистора становятся величинами комплексными. Важно иметь в виду, что h -параметры транзисторов существенно изменяются в зависимости от того, какой из его электродов (эмиттер, база или коллектор) является общим для входной и выходной пар зажимов. Различают в соответствии с этим h -параметры транзисторов по схеме с ОЭ, ОБ и ОК. Заметим, что Y и Z параметры транзистора для разных способов включения также будут разными.

Можно установить связь между h -параметрами для различных способов включения транзистора (см. задачу 33). В таблице I h -параметры для схем с ОБ и ОК выражены через h -параметры схемы с общим эмиттером, которые наиболее часто приводятся в справочной литературе.

Таблица I

ОЭ	ОБ	ОК
$h_{11э}$	$h_{11б} = \frac{h_{11э}}{1 - h_{12э} + h_{21э} + \Delta h_э}$ $\Delta h_э = h_{11э} h_{22э} - h_{12э} h_{21э}$	$h_{11к} = h_{11э}$
$h_{12э}$	$h_{12б} = \frac{-h_{12э} + \Delta h_э}{1 - h_{12э} + h_{21э} + \Delta h_э}$	$h_{12к} = 1 - h_{12э}$
$h_{21э}$	$h_{21б} = \frac{-(h_{21э} + \Delta h_э)}{1 - h_{12э} + h_{21э} + \Delta h_э}$	$h_{21к} = -(1 + h_{21э})$
$h_{22э}$	$h_{22б} = \frac{h_{22э}}{1 - h_{12э} + h_{21э} + \Delta h_э}$	$h_{22к} = h_{22э}$

Типичные значения h -параметров по схеме с ОЭ таковы: $h_{11э} = 1$ Ом, $h_{21э} = 50$, $h_{12э} = 5 \cdot 10^{-4}$, $h_{22э} = 50 \cdot 10^{-6}$ Сим.

Располагая этими значениями, найдем, используя формулы таблицы I, типичные значения h -параметров по схемам с ОБ и ОК:

$$h_{11Б} \approx 20 \text{ Ом}, \quad h_{21Б} \approx 5 \cdot 10^{-4}, \quad h_{11К} \approx 0,98, \quad h_{22Б} \approx 10 \text{ Сим};$$

$$h_{11К} = h_{11Э} = 1 \text{ кОм}, \quad h_{12К} = (1 - h_{12Э}) \approx 0,9995, \quad h_{21К} \approx -51,$$

$$h_{22К} = h_{22Э} = 50 \cdot 10^{-6} \text{ Сим}.$$

На рис. 30-326 показаны эквивалентные схемы транзисторов для разных способов включения. Все напряжения и токи на этих схемах представляют собой переменные составляющие, измеренные (или рассчитанные) в определенной рабочей точке, задаваемой конкретным смещением по постоянному току. Например, для схемы ОБ (рис. 30) уравнения в h -параметрах имеют вид

$$U_{БЭ} = h_{11Э} I_{Б} + h_{12Э} U_{КЭ},$$

$$I_{К} = h_{21Э} I_{Б} + h_{22Э} U_{КЭ},$$

откуда

$$h_{11Э} = \left. \frac{U_{БЭ}}{I_{Б}} \right|_{U_{КЭ}=0}, \quad h_{12Э} = \left. \frac{U_{БЭ}}{U_{КЭ}} \right|_{I_{Б}=0},$$

$$h_{21Э} = \left. \frac{I_{К}}{I_{Б}} \right|_{U_{КЭ}=0}, \quad h_{22Э} = \left. \frac{I_{К}}{U_{КЭ}} \right|_{I_{Б}=0}.$$

Что означает равенство $U_{КЭ} = 0$? Равенство $U_{КЭ} = 0$ означает, что коллекторное напряжение является фиксированным и равным величине, соответствующей смещению по постоянному току. Аналогично выражение $I_{Б} = 0$ показывает, что базовый ток является постоянным и соответствует уровню, определяемому смещением по постоянному току.

В качестве примера рассмотрим использование h -параметров для исследования характеристик транзисторных низкочастотных усилителей для трех схем включения транзистора. Пусть имеется транзисторный усилитель. Заменяем его четырехполюсником - рис. 33а, на входе которого включен источник сигнала e_c с внутренним сопротивлением R_c . Четырехполюсник нагружен сопротивлением нагрузки R_H . Определим коэффициенты передачи по току и напряжению, входное и выходное сопротивление усилителя, используя h -параметры активного четырехполюсника. Коэффициент передачи по току

$$K_y = \frac{\mathcal{I}_2}{\mathcal{I}_1} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22} R_N} \quad (53)$$

Коэффициент передачи по напряжению

$$K_V = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-R_N h_{21}}{h_{11} + \Delta h \cdot R_N} \quad (54)$$

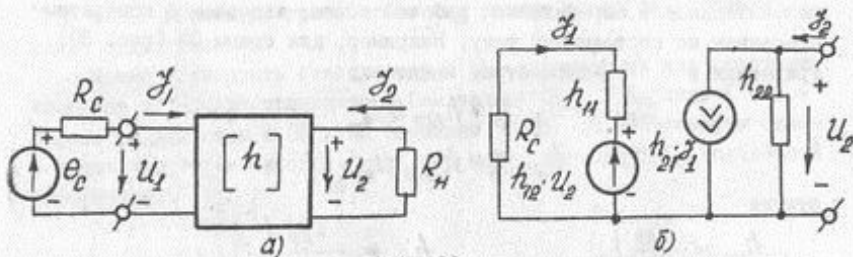


Рис. 33

где $\Delta h = h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}$ - определитель матрицы $[h]$.
Входное сопротивление

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{\mathcal{I}_1} = \frac{h_{11} + \Delta h \cdot R_N}{1 + h_{22} \cdot R_N} \quad (55)$$

Для определения величины $Z_{\text{вх}}$ используем эквивалентную схему транзистора в h -параметрах, представленную на рис. 33б; при этом закорачиваем источник входного сигнала e_c и размыкаем сопротивление нагрузки R_N . Тогда из рис. 33б имеем:

$\mathcal{I}_1 = -h_{12} U_2 (h_{11} + R_C)$ и $\mathcal{I}_2 = h_{21} \mathcal{I}_1 + h_{22} U_2$. Из этих соотношений определяем

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_2}{\mathcal{I}_2} = \frac{h_{11} + R_C}{\Delta h + h_{22} R_C} \quad (56)$$

Выражения (53) - (56) справедливы для любой схемы включения транзистора. Например, для схемы с общей базой необходимо записать выражения (53) - (56) в следующей форме:

$$K_y = \frac{h_{215}}{1 + h_{225} R_N}, \quad K_V = \frac{-R_N h_{215}}{h_{115} + \Delta h_5 \cdot R_N}, \quad Z_{\text{вх}} = \frac{h_{115} + \Delta h_5 R_N}{1 + h_{225} R_N},$$

$$\tilde{z}_{\text{вх}} = \frac{h_{115} + R_c}{\Delta h_5 + h_{225} R_c}, \quad \text{где } \Delta h_5 = h_{115} h_{225} - h_{125} h_{215}.$$

Чтобы записать эти формулы для схем с ОЭ и ОК, необходимо приписать h -параметрам в (53)-(56) индексы "Э" и "К" соответственно.

Выразим теперь величины $K_u, K_v, \tilde{z}_{\text{вх}}$ и $\tilde{z}_{\text{вых}}$ для трех схем включения транзистора через h -параметры схемы с общим эмиттером. С этой целью используем формулы, приведенные в таблице I. Тогда получим характеристики транзисторных усилителей для трех схем включения (ОЭ, ОБ и ОК), выраженные через h_g -параметры схемы с ОЭ. Эти характеристики сведены в таблицу 2, причем в верхней строке каждой клетки таблицы приведены точные выражения для характеристик, а в нижней строке каждой клетки - приближенные. Рассмотрим, как получены приближенные выражения в таблице 2 для передаточных коэффициентов и входных сопротивлений. Оценим величину $\Delta h_g = h_{11g} h_{22g} - h_{12g} h_{21g}$. Подставляя сюда типичные значения h_g -параметров, получаем

$$\Delta h_g = 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-4} \cdot 50 = 2,5 \cdot 10^{-2} \ll 1.$$

Таким образом, величина

$$\Delta h_g \ll 1. \quad (57)$$

Предположим, что выполняется неравенство

$$h_{22g} R_H \ll 1. \quad (58)$$

Это означает, что если

$$R_H \ll 1/h_{22g} = 1/50 \cdot 10^{-6} = 20 \text{ кОм}.$$

Таким образом, можно считать, что если сопротивление нагрузки усилителя $R_H \ll 20 \text{ кОм}$, например, $R_{\text{нагрузка}} = 1+2 \text{ кОм}$, то неравенство (58) выполняется. При одновременном выполнении неравенств (57) и (58) точные формулы таблицы 2 упрощаются и заменяются приближенными формулами, приведенными в этой же таблице. Используя точные и приближенные формулы таблицы 2, построим полезные для практики зависимости $K_u(R_H), K_v(R_H), \tilde{z}_{\text{вх}}(R_H), \tilde{z}_{\text{вых}}(R_H)$, показанные на рис. 34(а-г). При построении этих зависимостей в соответствующие формулы таблицы 2 подставлялись типичные значения h -параметров: $h_{11g} = 1 \text{ кОм}$, $h_{21g} = 50$, $h_{12g} = 5 \cdot 10^{-4}$, $h_{22g} = 50 \cdot 10^{-6} \text{ Сим}$.

Таблица 2

схема параметр	ОЭ	ОБ	ОК
K_y Коэффициент передачи по току	$K_y = \frac{h_{21э}}{1 + h_{22э} R_H}$ $K_y \approx h_{21э}$	$K_y = \frac{-(h_{21э} + \Delta h_{э})}{1 - h_{1э2} + h_{21э} + \Delta h_{э} + h_{22э} R_H}$ $K_y \approx \frac{-h_{21э}}{1 + h_{21э}} < 1$	$K_y = \frac{-(1 + h_{21э})}{1 + h_{22э} R_H}$ $K_y \approx -(1 + h_{21э})$
K_v Коэффициент передачи по напряж.	$K_v = \frac{-h_{21э} R_H}{h_{11э} + \Delta h_{э} R_H}$ $K_v \approx -\frac{h_{21э}}{h_{11э}} R_H$	$K_v = \frac{(h_{21э} + \Delta h_{э}) R_H}{h_{11э} + \Delta h_{э} R_H}$ $K_v \approx \frac{h_{21э}}{h_{11э}} R_H$	$K_v = \frac{(1 + h_{21э}) R_H}{h_{11э} + (1 - h_{1э2} + h_{21э} + \Delta h_{э}) R_H}$ $K_v \approx \frac{h_{21э} R_H}{h_{11э} + h_{21э} R_H} < 1$
$Z_{вх}$ входная сопротивл.	$Z_{вх} = \frac{h_{11э} + \Delta h_{э} R_H}{1 + h_{22э} R_H}$ $Z_{вх} \approx h_{11э}$	$Z_{вх} = \frac{h_{11э} + \Delta h_{э} R_H}{1 - h_{1э2} + h_{21э} + \Delta h_{э} + h_{22э} R_H}$ $Z_{вх} \approx \frac{h_{11э}}{h_{21э}}$	$Z_{вх} = \frac{h_{11э} + (1 - h_{1э2} + h_{21э} + \Delta h_{э}) R_H}{1 + h_{22э} R_H}$ $Z_{вх} \approx h_{11э} + h_{21э} R_H$
$Z_{вых}$ выходная сопротивл.	$Z_{вых} = \frac{h_{11э} + R_c}{\Delta h_{э} + h_{22э} R_c}$	$Z_{вых} = \frac{h_{11э} + (1 - h_{1э2} + h_{21э} + \Delta h_{э}) R_c}{\Delta h_{э} + h_{22э} R_c}$	$Z_{вых} = \frac{h_{11э} + R_c}{1 - h_{1э2} + h_{21э} + \Delta h_{э} + h_{22э} R_c}$

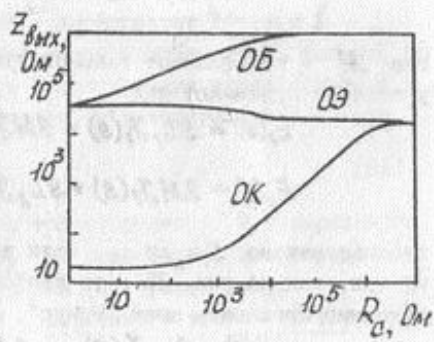
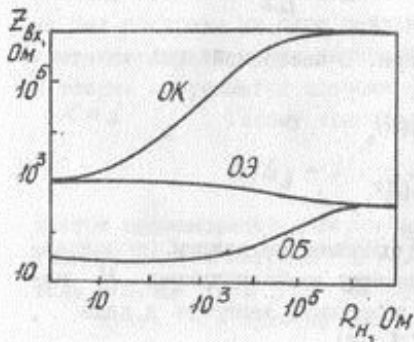
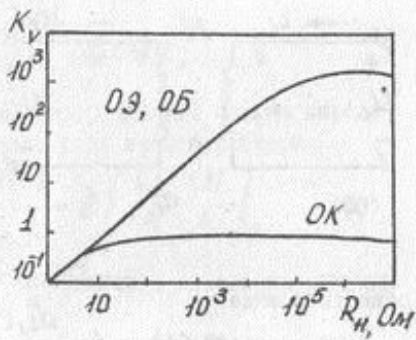
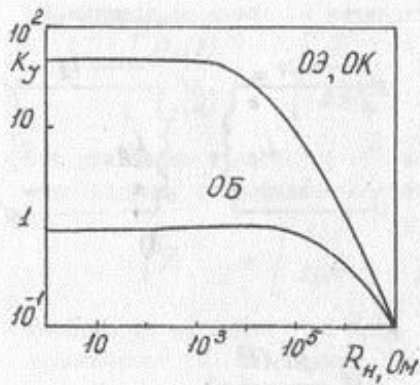


Рис. 34

2.6. Трансформатор как четырехполюсник

Трансформатор как устройство, имеющее две пары зажимов, является типичным четырехполюсником. Запишем для трансформатора (рис. 35а) соотношения между напряжениями и токами во временной

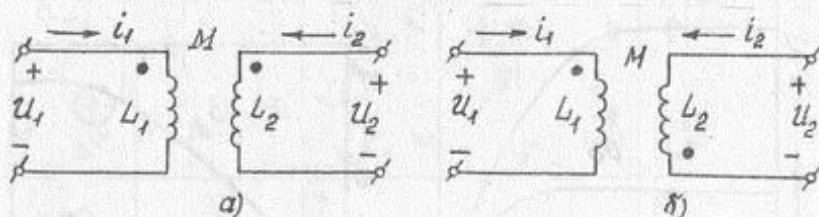


Рис. 35

области в виде

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt},$$

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt},$$

где M - коэффициент взаимной индукции. В частотной области эти уравнения принимают вид

$$E_1(s) = sL_1 \mathcal{I}_1(s) + sM \mathcal{I}_2(s),$$

$$E_2(s) = sM \mathcal{I}_1(s) + sL_2 \mathcal{I}_2(s),$$

где обозначено $s = j\omega$. Если же одноименные зажимы расположены так, как на рис. 35б, то коэффициенту взаимной индукции M необходимо присписать знак "минус", а уравнения записать в виде

$$E_1(s) = sL_1 \mathcal{I}_1(s) - sM \mathcal{I}_2(s),$$

$$E_2(s) = -sM \mathcal{I}_1(s) + sL_2 \mathcal{I}_2(s).$$

В общем случае, когда одноименные зажимы на рисунке не указаны, связь между напряжениями и токами на входе и выходе трансформатора записывают в виде

$$\begin{aligned} E_1(s) &= sL_1 \dot{I}_1(s) \pm sM \dot{I}_2(s), \\ E_2(s) &= \pm sM \dot{I}_1(s) + sL_2 \dot{I}_2(s), \end{aligned} \quad (59)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_1 & \pm sM \\ \pm sM & sL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1(s) \\ \dot{I}_2(s) \end{bmatrix}.$$

Это уравнение трансформатора в Z -параметрах. Отсюда определяем матрицу сопротивлений холостого хода трансформатора

$$[Z]_{xx} = \begin{bmatrix} sL_1 & \pm sM \\ \pm sM & sL_2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} L_1 & \pm M \\ \pm M & L_2 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Располагая матрицей $[Z]_{xx}$, можно найти и остальные матрицы трансформатора (см. задачу 39).

Известно [5], что мерой связи между двумя парами зажимов трансформатора является коэффициент связи $K = \pm M / \sqrt{L_1 L_2}$. На основании наблюдений над трансформаторами установлено, что коэффициент связи K всегда меньше единицы, т.е. $K < 1$. Еще не был построен ни один реальный трансформатор с $K = 1$, хотя к этому значению на практике можно подойти очень близко. Но в теории допускается возможность существования трансформатора с $K = 1$. Такому трансформатору, у которого $K = 1$ или

$$L_1 L_2 - M^2 = 0, \quad (61)$$

дается наименование совершенного трансформатора. У совершенного трансформатора матрица $[Y]_{xz}$ не существует, ибо определитель матрицы $[Z]_{xx}$ на основании (61) равен нулю.

Пусть ко вторичной обмотке совершенного трансформатора под-

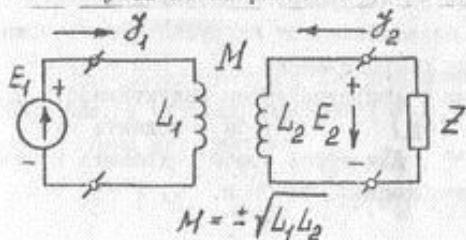


Рис. 36

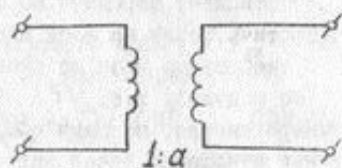


Рис. 37

ключена нагрузка Z - рис. 36.

С учетом совершенства трансформатора ($M = \sqrt{L_1 L_2}$) запишем соотношения (59) в виде

$$E_1 = sL_1 \mathcal{I}_1 \pm s\sqrt{L_1 L_2} \cdot \mathcal{I}_2,$$

$$E_2 = \pm s\sqrt{L_1 L_2} \mathcal{I}_1 + sL_2 \mathcal{I}_2.$$

Поделив второе из этих соотношений на первое, получим выражение для коэффициента передачи по напряжению совершенного трансформатора, нагруженного сопротивлением нагрузки Z

$$K_V(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{\pm s\sqrt{L_1 L_2} \mathcal{I}_1 + sL_2 \mathcal{I}_2}{sL_1 \mathcal{I}_1 \pm s\sqrt{L_1 L_2} \mathcal{I}_2} = \frac{\pm \sqrt{L_1 L_2}}{L_1} = \pm \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad (62)$$

Как следует из этой формулы, $K_V(s)$ не зависит от сопротивления нагрузки. Так как индуктивность обмотки трансформатора пропорциональна квадрату числа ее витков, то можно записать

$$K_V = \pm \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \pm \sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2}} = \pm \frac{n_2}{n_1} = \pm \alpha, \quad (63)$$

где $\alpha = n_2/n_1$ - отношение числа витков вторичной обмотки к первичной. Заметим, что α может быть как положительной, так и отрицательной величиной, что определяется знаком коэффициента взаимоиנדукции M .

Определим коэффициент передачи по току K_I совершенного трансформатора. Для этого, подставив в соотношение $E_2 = \pm s\sqrt{L_1 L_2} \mathcal{I}_1 + sL_2 \mathcal{I}_2$ вместо E_2 величину $E_2 = -\mathcal{I}_2 \cdot Z$, получим

$$K_I = \frac{\mathcal{I}_2(s)}{\mathcal{I}_1(s)} = \frac{\mp s\sqrt{L_1 L_2}}{sL_2 + Z}.$$

Как видно из этого выражения, коэффициент передачи по току совершенного трансформатора зависит от нагрузки. Попробуем сделать коэффициент передачи по току независимым от нагрузки. Этого можно достичь, если на всех частотах сопротивление Z (по модулю) пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением индуктивности L_2 (по модулю), т.е. $|Z| \ll |sL_2|$. Чтобы выполнить это неравенство, положим $L_2 \rightarrow \infty$. Для того, чтобы сохранить конечное отношение чисел витков, необходимо, чтобы и $L_1 \rightarrow \infty$. В результате получим

$$K_{\mathcal{I}} = \frac{\mathcal{I}_2}{\mathcal{I}_1} = \mp \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{S L_2} = \mp \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \mp \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}} = \mp \frac{n_1}{n_2} = \mp \frac{1}{\alpha}. \quad (64)$$

Выражения (63) и (64) определяют так называемый идеальный трансформатор, у которого напряжения и токи на входе и выходе связаны соотношениями

$$E_1 = \frac{1}{\alpha} E_2, \quad \mathcal{I}_1 = -\alpha \mathcal{I}_2.$$

Записав эти соотношения в виде

$$E_1 = \frac{1}{\alpha} E_2 + 0 \cdot (-\mathcal{I}_2),$$

$$\mathcal{I}_1 = 0 \cdot E_2 + \alpha (-\mathcal{I}_2),$$

получаем выражение для матрицы цепных параметров идеального трансформатора

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Обычно на схемах идеальный трансформатор изображают так, как показано на рис. 37. Отметим разницу между совершенным и идеальным трансформаторами.

1. Совершенный трансформатор характеризуется двумя конечными параметрами L_1 и L_2 , причем $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

2. Идеальный трансформатор характеризуется одним параметром - действительным числом α , положительным или отрицательным.

Идеальный трансформатор получают из совершенного, полагая, что $L_1 \rightarrow \infty$, $L_2 \rightarrow \infty$, но отношение L_1/L_2 остается конечным.

3. На практике можно осуществить трансформатор с хорошим приближением к совершенному. Идеальный же трансформатор - чисто теоретическая модель, полезная при анализе и синтезе цепей.

2.7. Гиратор

Рассмотрим матрицу сопротивлений холостого хода $[Z]_{xx}$ необратимого четырехполюсника ($Z_{12} \neq Z_{21}$). Ее можно представить в виде суммы двух матриц

$$[Z]_{xx} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0,5(Z_{12} + Z_{21}) \\ 0,5(Z_{12} + Z_{21}) & Z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,5(Z_{12} - Z_{21}) \\ -0,5(Z_{12} - Z_{21}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Первая матрица в правой части соответствует обратимому четырехполюснику, у которого входное и выходное сопротивление холостого хода совпадает с входным и выходным сопротивлением исходного четырехполюсника, а передаточные сопротивления холостого хода $0,5 \cdot (Z_{12} + Z_{21})$ равны между собой и равны среднему арифметическому между соответствующими передаточными сопротивлениями исходного четырехполюсника.

Вторая матрица в правой части соответствует необратимому четырехполюснику, у которого входное и выходное сопротивление холостого хода равно нулю, а передаточные сопротивления равны по величине и противоположны по знаку. Такой необратимый четырехполюсник, имеющий указанную матрицу, называют идеальным гиратором. Матрицу сопротивлений холостого хода идеального гиратора записывают в общем виде так

$$[Z]_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & -R \\ R & 0 \end{bmatrix}, \quad (66)$$

где R называют гираторным сопротивлением или гиростатическим коэффициентом гиратора. Гиратор с матрицей сопротивлений холостого хода (66) называют идеальным потому, что на практике реализовать четырехполюсник с такой матрицей можно лишь приближенно.

Схемное изображение гиратора показано на рис. 38.

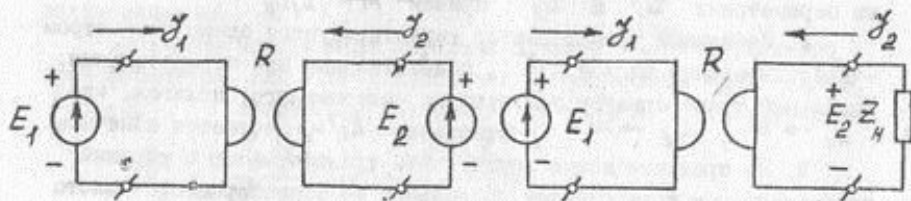


Рис. 38

Рис. 39

Запишем связь между токами и напряжениями на входе и выходе гиратора

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R \\ R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Отсюда получим $E_1 = -R\mathcal{J}_2$, $E_2 = R\mathcal{J}_1$ или

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= -\frac{1}{R}E_1, \\ E_2 &= R\mathcal{J}_1. \end{aligned} \quad (68)$$

Из этих соотношений видно, что в отличие от идеального трансформатора, преобразующего напряжение в напряжение или ток в ток, идеальный гиратор преобразует напряжение в ток или ток в напряжение.

Понятие "гиратор" впервые ввел Телледжен (*Tellegen* В.Д.Н.) в своей работе "*The gyrator. A new electric network element*", опубликованной в американском журнале "*Philips research report*", № 3, 1948. Наименование "гиратор" появилось потому, что дифференциальные уравнения, описывающие систему двух контуров, связанных через гиратор, аналогичны уравнениям движения двух масс, связанных через гироскоп.

Рассмотрим основное свойство гиратора. С этой целью включим на выходе гиратора комплексное сопротивление нагрузки Z_H (рис. 39) и найдем входное сопротивление $Z_{bx} = E_1/\mathcal{J}_1$ такой комбинации. Используя соотношения (68) и выражение $E_2 = -Z_H\mathcal{J}_2$, получим

$$Z_{bx} = \frac{E_1}{\mathcal{J}_1} = \frac{-R\mathcal{J}_2 R}{E_2} = \frac{-R^2\mathcal{J}_2}{E_2} = \frac{-R^2}{-Z_H} = \frac{R^2}{Z_H}.$$

Таким образом, входное сопротивление идеального гиратора, нагруженного комплексным сопротивлением нагрузки Z_H , равно

$$Z_{bx} = R^2/Z_H. \quad (69)$$

Это выражение показывает, что входное сопротивление идеального гиратора противоположно по характеру сопротивлению нагрузки и увеличено по величине в R^2 раз. Это и есть основное свойство, из-за которого гиратор получил широкое распространение на практике. Действительно, если нагрузить идеальный гиратор емкостью ($Z_H = 1/j\omega C$), то его входное сопротивление в соответствии с формулой (69) имеет индуктивный характер

$$Z_{bx} = j\omega C R^2.$$

Таким образом, идеальный гиратор дает способ "математического" преобразования конденсатора в катушку индуктивности. Гираторы широко используются в микроэлектронных схемах, где реализация

индуктивных элементов затруднена. В этом случае нагружают гиратор емкостью и получают индуктивность.

Покажем, что с помощью двух каскадно соединенных идеальных гираторов можно реализовать идеальный трансформатор. На рис. 40 показано каскадное соединение двух гираторов с гираторными сопротивлениями R_1 и R_2 . Найдем матрицу цепных параметров идеального гиратора. Для этого запишем соотношения $E_1 = -R_2 \mathcal{I}_2$ и $E_2 = R_1 \mathcal{I}_1$, в виде

$$E_1 = 0 \cdot E_2 + R(-\mathcal{I}_2),$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{R} E_2 + 0(-\mathcal{I}_2),$$

откуда матрица цепных параметров идеального гиратора

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 1/R & 0 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Матрица цепных параметров двух каскадно соединенных гираторов с гираторными сопротивлениями R_1 и R_2 имеет вид

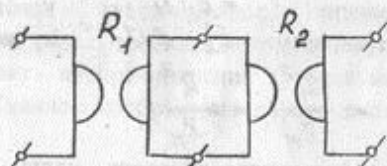


Рис. 40

$$\begin{aligned} \text{вид} \\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ 1/R_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & R_2 \\ 1/R_2 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} R_1/R_2 & 0 \\ 0 & R_2/R_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим через α отношение R_2/R_1 , т.е. $R_2/R_1 = \alpha$. Тогда матрицу цепных параметров двух каскадно соединенных гираторов запишем в виде

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Получили, что матрица цепных параметров двух каскадно соединенных гираторов с гираторными сопротивлениями R_1 и R_2 имеет такой же вид, что и матрица цепных параметров идеального трансформатора - выражение (65). Следовательно, два каскадно соединенных идеальных гиратора реализуют идеальный трансформатор.

2 В. Решение задач методом четырехполюсника

Линейные методы анализа схем достаточно развиты и многообразны. Широкое распространение для целей анализа получили метод эквивалентных схем и метод четырехполюсника [2,6].

При использовании метода эквивалентных схем электронные приборы - лампы, транзисторы и др. - заменяются их эквивалентными схемами, состоящими из пассивных двухполюсников и зависимых источников.

Метод четырехполюсника основан на представлении сложной схемы с одним входом и одним выходом в виде соединения более простых четырехполюсников [2]. Параметры последних определяются заранее и сводятся нередко в таблицы, а параметры всей схемы вычисляются по соответствующим правилам в зависимости от способа соединения простых четырехполюсников.

Рассмотрим примеры решения задач с помощью метода четырехполюсника.

Пример I. Найти Y -параметры электронной лампы (триода) при учете всех ее междуэлектродных емкостей - рис. 4Iа. Найти эквивалентную Π -образную схему такого каскада.

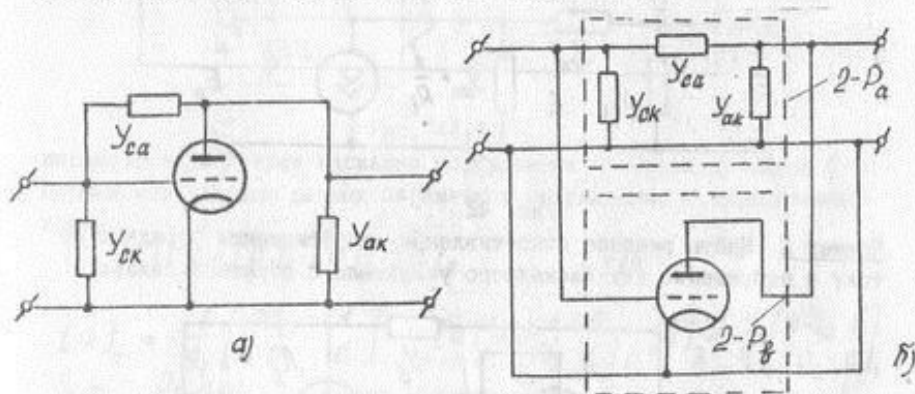


Рис. 4I

Решение

Представим исходную схему на рис. 4Iа в виде параллельного соединения двух четырехполюсников $2-P_a$ и $2-P_g$ - рис. 4Iб.

Такое соединение регулярно, поскольку соединяются параллельно треугольные четырехполосники так, что их общие зажимы объединяются. Следовательно, для нахождения матрицы $[Y]_{кз}$ исходной цепи нужно сложить матрицы проводимостей короткого замыкания четырехполосников $2-P_a$ и $2-P_f$, которые были получены ранее - формулы (15) и (47):

$$\begin{aligned}
 [Y]_{кз} &= [Y]_{кзa} + [Y]_{кзб} = \begin{bmatrix} Y_{ck} + Y_{ca} & -Y_{ca} \\ -Y_{ca} & Y_{ak} + Y_{ca} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s & 1/R_i \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} Y_{ck} + Y_{ca} & -Y_{ca} \\ s - Y_{ca} & Y_{ak} + Y_{ca} + \frac{1}{R_i} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Определитель полученной матрицы отличен от нуля, следовательно, при учете междueleктродных емкостей лампа как четырехполосник может характеризоваться любой системой параметров ($Y, z, h, g, ABCD$). Легко показать, что эквивалентная Π -образная схема лампы с учетом междueleктродных емкостей может быть представлена так, как показано на рис. 42.

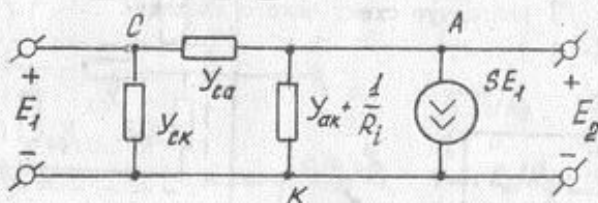


Рис. 42

Пример 2. Найти входное сопротивление, коэффициенты передачи по току и напряжению двухкаскадного усилителя с обратной связью,

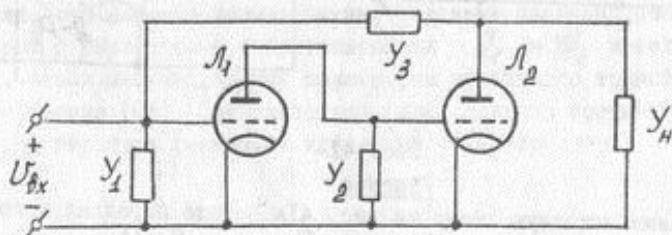


Рис. 43

представленного на рис. 43.

Решение

В этой схеме под проводимостями Y_1, Y_2, Y_3 и Y_H можно понимать, например, проводимости резистивного характера, проводимости настроенных в резонанс колебательных контуров, либо комбинацию проводимостей указанного характера. Таким образом, в частном случае это может быть низкочастотный аperiodический усилитель, либо резонансный усилитель.

Представим исходную схему в виде соединения четырех элементарных четырехполюсников I - 4 - рис. 44. Найдем матрицу цепных

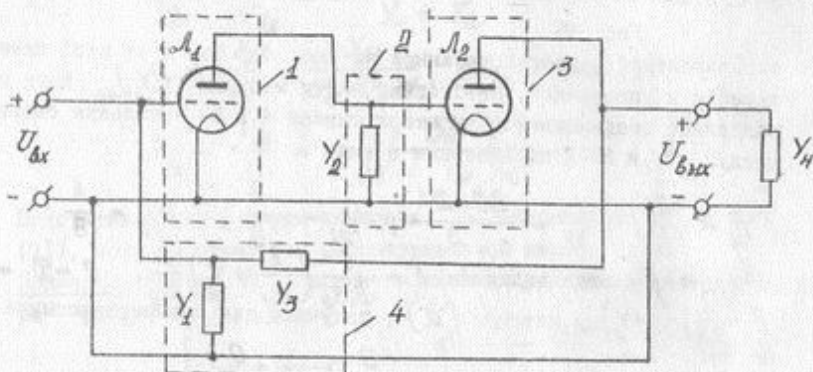


Рис. 44

параметров $[a]$ трех каскадно соединенных четырехполюсников I-3, перемножив матрицы цепных параметров соединяемых четырехполюсников

$$[a] = [a]_1 \cdot [a]_2 \cdot [a]_3, \text{ где}$$

$$[a]_1 = -\frac{1}{S_1} \begin{bmatrix} 1/R_{i1} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [a]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [a]_3 = -\frac{1}{S_2} \begin{bmatrix} 1/R_{i2} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$S_{1(i)}$, $R_{i1(i)}$ - крутизна и внутреннее сопротивление лампы L_1 и L_2 . Выполнив умножение матриц, получим

$$[a] = \frac{1}{S_1 S_2} \begin{bmatrix} (1/R_{i1} + Y_2)/R_{i2} & 1/R_{i1} + Y_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

После замены трех каскадно соединенных четырехполюсников одним четырехполюсником 5 с матрицей цепных параметров $[\alpha]$ приходим к

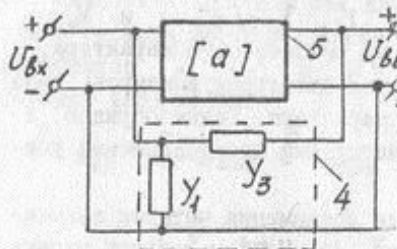


Рис. 45

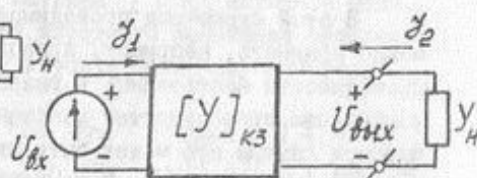


Рис. 46

эквивалентной схеме, показанной на рис. 45. Чтобы от этой схемы перейти к упрощенной, необходимо найти матрицы $[Y]_{кз}$ двух параллельно соединенных четырехполюсников 4 и 5. Используя связь между Y и ABCD параметрами в виде

$$Y_{11} = \frac{D}{B}, \quad Y_{12} = \frac{BC - DA}{B}, \quad Y_{21} = -\frac{1}{B}, \quad Y_{22} = \frac{A}{B}$$

и подставляя сюда величины $A = \frac{1}{S_1 S_2} \left(\frac{1}{R_{i1}} + Y_2 \right) \frac{1}{R_{i2}}$, $C - D = 0$, $B = \frac{1}{S_1 S_2} \left(\frac{1}{R_{i1}} + Y_2 \right)$ из матрицы $[\alpha]$, получаем для четырехполюсника 5 на рис. 45

$$[Y]_{кз5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{S_1 S_2}{G_{i1} + Y_2} & G_{i2} \end{bmatrix},$$

где обозначено $G_{i1} = 1/R_{i1}$, $G_{i2} = 1/R_{i2}$. Четырехполюсник 4 имеет следующую матрицу проводимостей короткого замыкания:

$$[Y]_{кз4} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_3 \end{bmatrix}.$$

Сложив матрицы параллельно соединенных четырехполюсников, получим матрицу $[Y]_{кз}$ эквивалентного четырехполюсника (рис. 46)

$$[Y]_{кз} = [Y]_{кз4} + [Y]_{кз5} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -\frac{S_1 S_2}{G_{i1} + Y_2} - Y_3 & G_{i2} + Y_3 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Записываем уравнение эквивалентного четырехполюсника на рис. 46 в виде

$$\mathcal{I}_1 = Y_{11} V_{\mathcal{B}x} + Y_{12} V_{\mathcal{B}кк},$$

$$\mathcal{I}_2 = Y_{21} V_{\mathcal{B}x} + Y_{22} V_{\mathcal{B}кк}$$

и замечаем, что за счет протекания тока \mathcal{I}_2 в сопротивлении нагрузки $R_N = 1/Y_N$ создается падение напряжения, противоположное по знаку напряжению $V_{\mathcal{B}кк}$; т.е. $V_{\mathcal{B}кк} = -\mathcal{I}_2 R_N = -\mathcal{I}_2 / Y_N$. С учетом последнего соотношения находим

$$K_V = \frac{V_{\mathcal{B}кк}}{V_{\mathcal{B}x}} = - \frac{Y_{21}}{Y_N + Y_{22}}, \quad (72)$$

$$K_Y = \frac{\mathcal{I}_2}{\mathcal{I}_1} = \frac{Y_{21}}{Y_N + R_N \Delta Y}, \quad \text{где } \Delta Y = Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}, \quad (73)$$

$$R_{\mathcal{B}x} = \frac{V_{\mathcal{B}x}}{\mathcal{I}_1} = \frac{Y_N + Y_{22}}{\Delta Y + Y_{11} Y_N}. \quad (74)$$

Подставив в эти формулы значения Y -параметров из выражения (71), получим ответ для рассматриваемой задачи.

Пример 3. Найти h -параметры каскада усилителя на транзисторе - рис. 47а.

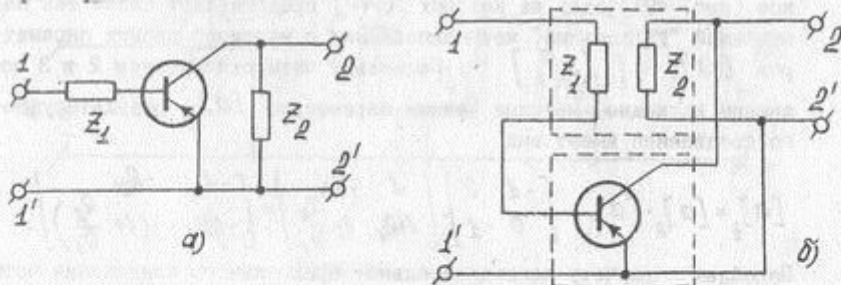


Рис. 47

Решение

Представим исходную схему в виде последовательно-параллельного соединения двух четырехполюсников - собственно транзистора и "разорванного" четырехполюсника. Такое соединение регулярно, поскольку один из четырехполюсников - "разорванный". Для получения h -параметров каскада сложим $[h]$ матрицу (44) "разорванного" четырехполюсника и $[h]$ матрицу транзистора, включенного по схе-

ме 03:

$$[h] = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & 1/z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11g} & h_{12g} \\ h_{21g} & h_{22g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + h_{11g} & h_{12g} \\ h_{21g} & h_{22g} + \frac{1}{z_2} \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Определить коэффициент передачи по току и напряжению, входное сопротивление транзисторного усилителя с последовательно-параллельной обратной связью - рис. 48.

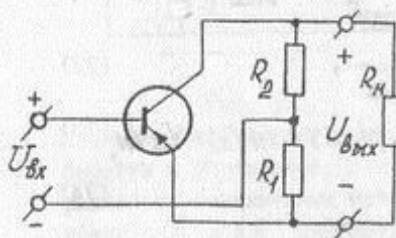


Рис. 48

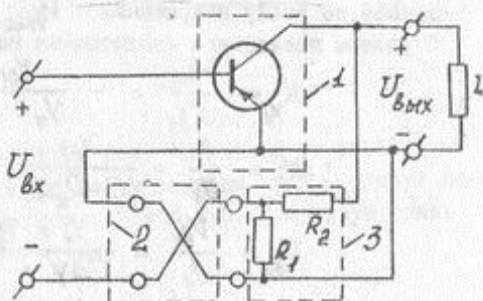


Рис. 49

Решение

Представим исходную схему в виде соединения трех четырехполюсников (рис. 49), один из которых (N_2) представляет собой так называемый "скрещенный" четырехполюсник с матрицей цепных параметров $[a]_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Поскольку четырехполюсники 2 и 3 соединены каскадно, матрица цепных параметров $[a]_t$ результирующего соединения имеет вид

$$[a]_t = [a]_2 \cdot [a]_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & R_2 \\ 1/R_1 & 1 + R_2/R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -R_2 \\ -1/R_1 & -(1 + R_2/R_1) \end{bmatrix}.$$

Перейдем к расчету последовательно-параллельного соединения четырехполюсников I и "t". Чтобы рассчитать такое соединение, необходимо найти h -матрицы соединяемых четырехполюсников. От матрицы $[a]_t$ перейдем к матрице $[h]_t$ по формулам (33) и получим

$$[h]_t = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} R_2 & -1 \\ 1 & 1/R_1 \end{bmatrix}.$$

Обозначив h -матрицу транзистора $[h]_{TP} = \begin{bmatrix} h_{11\beta} & h_{12\beta} \\ h_{21\beta} & h_{22\beta} \end{bmatrix}$, выполнив сложение матриц $[h]_i$ и $[h]_{TP}$, получим

$$[h] = [h]_i + [h]_{TP} = \begin{bmatrix} h_{11\beta} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & h_{12\beta} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ h_{21\beta} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} & h_{22\beta} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, имеем четырехполюсник с известной h -матрицей, нагруженный сопротивлением нагрузки R_N . Для получения коэффициентов передачи K_U , K_V и входного сопротивления Z_{BX} необходимо воспользоваться выражениями (53)-(55), подставив в эти выражения h -параметры из последней матрицы $[h]$. Полученные выражения ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Пример 5. Найти коэффициент передачи по напряжению схемы линейного резонансного усилителя на полевом транзисторе, представленной на рис. 50.

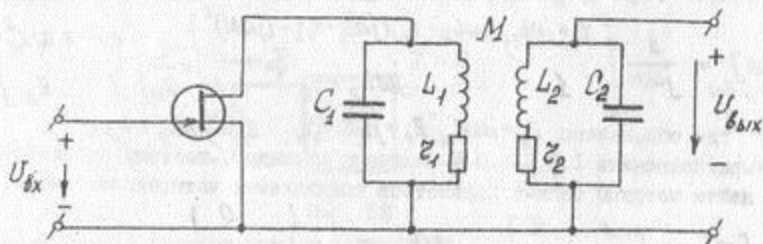


Рис. 50

Решение

Представим исходную схему в виде соединения пяти элементарных четырехполюсников 1-5 (рис. 51). Разорванный четырехполюсник 3 и четырехполюсник 4 в виде трансформатора включены последовательно, поэтому матрица сопротивлений холостого хода $[Z]_{3-4}$ результирующего четырехполюсника 3-4 равна сумме матриц (44) и (60), т.е.

$$[Z]_{3-4} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & z_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix}.$$

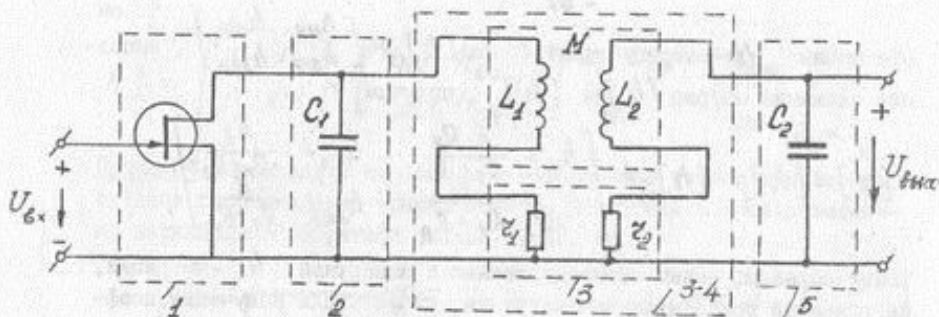


Рис. 51

Зная $[Z]_{3-4}$, находим матрицу цепных параметров $[a]_{3-4}$ эквивалентного четырехполюсника 3-4. Для этого воспользуемся соотношениями

$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}, \quad B = \frac{Z_{22}Z_{11} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}, \quad C = \frac{1}{Z_{21}}, \quad D = \frac{Z_{22}}{Z_{21}}.$$

Подставив сюда $Z_{11} = z_1 + j\omega L_1$, $Z_{12} = Z_{21} = j\omega M$, $Z_{22} = z_2 + j\omega L_2$, получим

$$[a]_{3-4} = \frac{1}{j\omega M} \begin{bmatrix} z_1 + j\omega L_1 & (j\omega L_2 + z_2)(j\omega L_1 + z_1) - (j\omega M)^2 \\ 1 & j\omega L_2 + z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_M} \begin{bmatrix} Z_1 & z_1 z_2 Z_M^2 \\ 1 & Z_2 \end{bmatrix},$$

где обозначено $Z_M = j\omega M$, $Z_1 = j\omega L_1 + z_1$, $Z_2 = j\omega L_2 + z_2$.

Четырехполюсники 1, 2, 3-4 и 5 включены каскадно, поэтому необходимо найти матрицы цепных параметров соединяемых четырехполюсников:

$$[a]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [a]_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем $[a]$ -матрицу четырехполюсника 1. Считаем, что полевой транзистор работает в линейном режиме с нулевым током в цепи затвора. В этом случае для описания полевого транзистора как четырехполюсника используется система Y и цепных параметров, как и в случае радиоламп, работающих в линейном режиме без сеточных токов. Для полевого транзистора, включенного по схеме с общим истоком, используем следующие выражения для матриц $[Y]_{к3}$ и $[a]$:

$$[Y]_{к3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & 1/\tau_c \end{bmatrix}, \quad [a]_1 = \begin{bmatrix} -1/S\tau_c & -1/S \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где S - крутизна проходной характеристики транзистора, r_c - сопротивление стока (внутреннее сопротивление транзистора).

Находим матрицу цепных параметров каскадного соединения четырех \underline{P} -цепей 1, 2, 3-4 и 5

$$[a] = [a]_1 \cdot [a]_2 \cdot [a]_{3-4} \cdot [a]_5 = \begin{bmatrix} -1/Sr_c & -1/S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{z_M} \begin{bmatrix} z_1 & z_1 z_2 - z_M^2 \\ 1 & z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $A = -\frac{1}{Sr_c z_M} (1 + j\omega C_1 r_c) [z_1 + (z_1 z_2 - z_M^2) j\omega C_2] + r_c (1 + j\omega C_2 z_2)$

$$B = -\frac{1}{Sr_c z_M} (1 + j\omega C_1 r_c) (z_1 z_2 - z_M^2) + r_c z_2.$$

В итоге получаем эквивалентный четырехполюсник с матрицей цепных параметров $[a]$ - рис. 52. Записываем уравнения этого четырех-

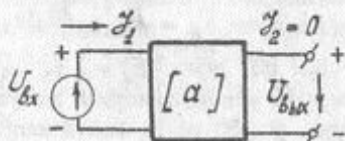


Рис. 52

полюсника в системе цепных параметров

$$\begin{bmatrix} U_{вх} \\ I_1 \end{bmatrix} = [a] \begin{bmatrix} U_{вых} \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{вых} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем $U_{вх} = A U_{вых}$ и $K_V = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{1}{A}$. Подставляя сюда величину A , находим выражение для коэффициента передачи резонансного усилителя по напряжению

$$K_V = \frac{-Sr_c z_M}{(1 + j\omega C_1 r_c) [z_1 + (z_1 z_2 - z_M^2) j\omega C_2] + r_c (1 + j\omega C_2 z_2)}.$$

РАЗДЕЛ 3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

I. Используя метод контурных токов, определите потенциал в точке А - рис. 53.

Дано: $E_1 = 6 \text{ В}$; $E_2 = 4 \text{ В}$; $R_1 = 0,2 \text{ Ом}$; $R_2 = 1 \text{ Ом}$;
 $R_3 = 0,4 \text{ Ом}$; $R_4 = 2 \text{ Ом}$; $R_5 = 4 \text{ Ом}$; $R_6 = 0,25 \text{ Ом}$.

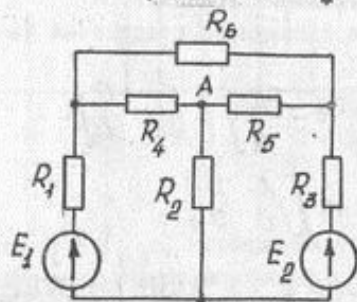


Рис. 53

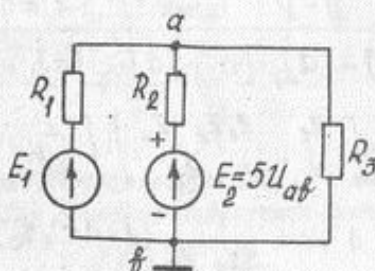


Рис. 54

- В цепи, показанной на рис. 54, действует независимый источник напряжения $E_1 = 60 \text{ мВ}$ и зависимый источник напряжения (ИНУН) с ЭДС $E_2 = 5 \text{ Иав}$. Пользуясь методом контурных токов, найти токи во всех ветвях, если $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$.
- В цепи, показанной на рис. 55, дано $E_1 = 1 \text{ В}$, $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 50 \text{ Ом}$, $R_3 = 1 \text{ кОм}$, $R_4 = 2 \text{ кОм}$, зависимый источник тока (ИТУТ) $J = g U_{13}$, где $g = 50 \text{ мА/В}$. Найти напряжение U_{23} .

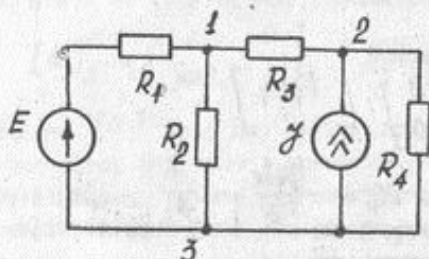


Рис. 55

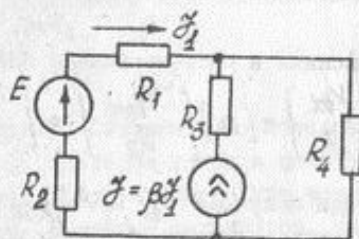


Рис. 56

- В цепи (рис. 56) действует независимый источник с ЭДС $E = 100 \text{ В}$ и зависимый источник тока (ИТУТ) $J = \beta i_1$, где $\beta = -5$. Найти токи в ветвях, если $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $R_2 = 4 \text{ кОм}$, $R_3 = 1 \text{ кОм}$, $R_4 = 5 \text{ кОм}$.

5. В цепи (рис.57), содержащей зависимый источник тока (ИГУН) $\mathcal{I} = gU_1$, найти токи в ветвях. Дано: $E_2 = 85,8$ В, $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом, $R_4 = 90$ Ом, $g = 0,01$ А/В.

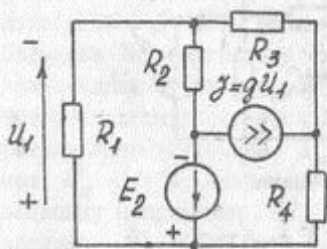


Рис. 57

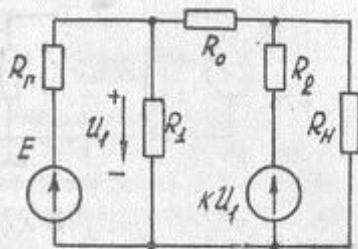


Рис. 58

6. В цепи (рис.58), содержащей ИГУН KU_1 , найти токи в ветвях, если $E = 5$ В, $R_r = R_N = R_2 = 100$ Ом, $R_1 = 50$ Ом, $R_0 = 200$ Ом, $K = 10$.
7. Пользуясь методом узловых потенциалов, определить коэффициент передачи по напряжению $K_U = U_2/U_1$ в схеме (рис.59), содержащей ИГУТ - $\beta\mathcal{I}$, если $R_r = 50$ Ом, $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 30$ кОм, $R_3 = 0,2$ кОм, $R_0 = 20$ кОм, $\beta = 100$, $R_4 = 10$ кОм, $R_5 = 6$ кОм, $R_N = 1$ кОм.

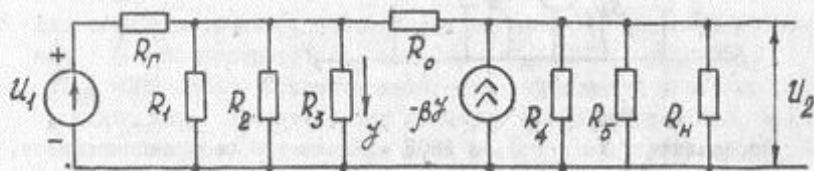


Рис. 59

8. В цепи, показанной на рис. 60, требуется определить ток, протекающей по ветви с проводимостью 5 Сим.

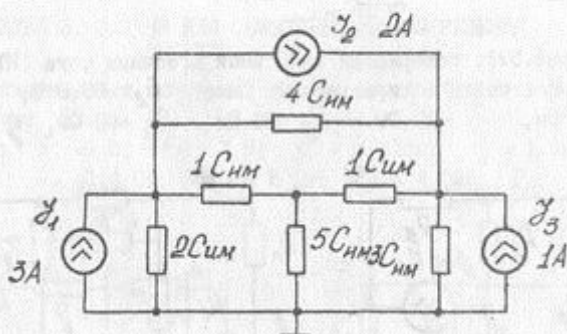
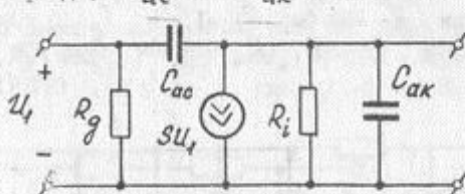


Рис. 60

9. Покажите, в каких случаях матрица $[Z]_{xx}$ четырехполюсника существует, а $[Y]_{k3}$ - нет. Приведите примеры таких четырехполюсников.
10. Покажите, в каких случаях матрица $[Y]_{k3}$ существует, а $[Z]_{xx}$ - нет. Приведите примеры.
11. Определить Y -параметры четырехполюсника - рис. 61, представляющего из себя эквивалентную схему электровакуумного триода, C_{ac} и C_{ak} - емкости анод-сетка и анод-катод,



S - крутизна в рабочей точке, R_i - внутренняя сопротивление.

Рис. 61

12. Определите Y , Z и ABCD - параметры четырехполюсников, приведенных на рис. 62.

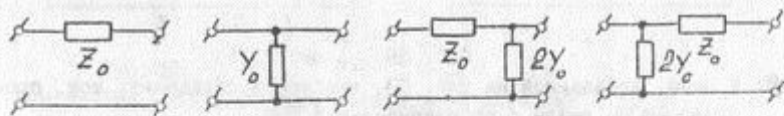


Рис. 62

13. Показать, что условие симметрии обратимого четырехполюсника в системе Y, Z и ABCD - параметров выражается соотношениями (34).
14. Запишите контурные уравнения для контуров 1 и 2 (рис.13) и убедитесь в правильности представленной схемы замещения произвольной $Q-P$ цепи.
15. Покажите справедливость схем замещения четырехполюсников, представленных на рис. 15 и рис. 16.
16. Четырехполюсник питается от источника напряжения E_r с внутренним сопротивлением $R_r = 600 \text{ Ом}$ и нагружен на сопротивление $R_H = 4 \text{ кОм}$, напряжение на нагрузке равно 3 В. Определить величину напряжения E_r , если заданы параметры четырехполюсника $h_{11} = 1000 \text{ Ом}$, $h_{12} = 10^{-3}$, $h_{21} = 50$, $h_{22} = 200 \text{ мксим}$.
17. Определить h -параметры мостового π -образного четырехполюсника, показанного на рис. 63. Параметры четырехполюсника: $R_1 = 6 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 4 \text{ Ом}$.

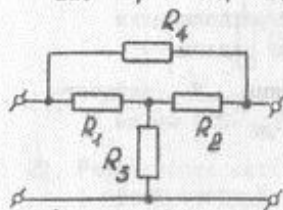


Рис. 63

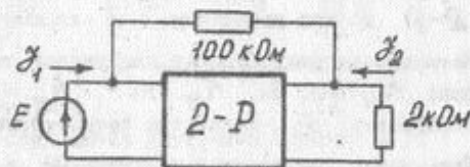


Рис. 64

18. Для четырехполюсника, показанного на рис. 64, известны значения h -параметров: $h_{11} = 2 \text{ кОм}$, $h_{12} = 10^{-4}$, $h_{21} = 250$, $h_{22} = 300 \text{ мксим}$. Сравните значение коэффициента усиления по току для двух случаев, когда резистор 100 кОм подключен, как показано на рис. 64, и когда этот резистор отсутствует.
19. Обратимая $Q-P$ цепь, заданная параметрами в режиме холостого хода или короткого замыкания, соединена с источником напряжения и нагрузкой R , как показано на рис. 65. Замените цепь слева от зажимов 2-2': а) эквивалентной цепью Тевенина, б) эквивалентной цепью Нортона. Определите передаточное сопротивление $Z_{12H} = V_{2x} / I_2$ и коэффициент передачи по напряжению $G_{12H} = V_R / V_{2x}$.

20. Необратимый четырехполюсник $\mathcal{D}-P$ имеет следующие значения Z -параметров: $Z_{11} = 100 \text{ Ом}$, $Z_{12} = 10 \text{ Ом}$, $Z_{21} = -5000 \text{ Ом}$, $Z_{22} = 500 \text{ Ом}$. Четырехполюсник соединен последовательно с сопротивлением $R_1 = 100 \text{ Ом}$, как показано на рис. 66. Определить входное сопротивление $Z_{вх} = U_1/I_1$ и коэффициент передачи по напряжению $K_U = U_2/U_1$, если $R_H = 1 \text{ кОм}$, $R_P = 0,2 \text{ кОм}$.

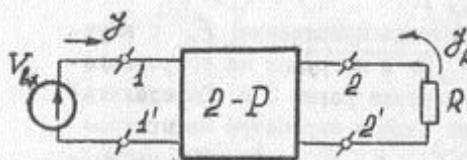


Рис. 65

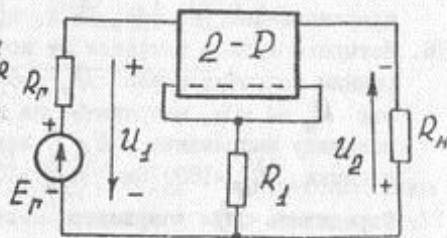


Рис. 66

21. Определить h -параметры необратимого четырехполюсника $\mathcal{D}-P$ по его известным Z -параметрам из задачи 20.
22. Четырехполюсник обладает следующими значениями h -параметров: $h_{11} = 500 \text{ Ом}$, $h_{12} = 10^{-3}$, $h_{21} = 75$, $h_{22} = 200 \text{ мкСм}$. Определить Z -параметры четырехполюсника.
23. Транзистор, включенный по схеме ОЭ, в рабочей точке имеет следующие значения h -параметров: $h_{11э} = 1,6 \text{ кОм}$, $h_{12э} = 5 \cdot 10^{-4}$, $h_{21э} = 115$, $h_{22э} = 160 \text{ мкСм}$. Определить входное сопротивление $R_{вх}$, коэффициент усиления по току K_I , коэффициент усиления по напряжению K_U усилительного каскада с этим транзистором, включенным в схему ОБ, если внутреннее сопротивление источника сигнала $R_P = 500 \text{ Ом}$, а сопротивление нагрузки $R_H = 10 \text{ кОм}$.
24. Транзистор, включенный в схему ОК (рис. 67), имеет следующие значения h -параметров: $h_{11к} = 22 \text{ кОм}$, $h_{12к} = 1$, $h_{21к} = 31$, $h_{22к} = 23 \cdot 10^{-6} \text{ См}$. Сопротивление резистора нагрузки в цепи эмиттера $R_H = 1 \text{ кОм}$, внутреннее сопротивление источника сигнала $R_P = 10 \text{ кОм}$. Определить коэффициент усиления по току $K_I = I_2/I_1$, напряжению $K_U = U_2/U_1$, входное сопротивление $Z_{вх} = U_1/I_1$.

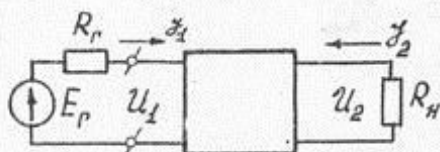


Рис. 67

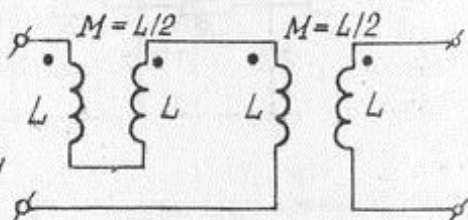


Рис. 68

25. Найдите T - цепь, эквивалентную двум идентичным трансформаторам, соединенным в соответствии с рис. 68.
26. Определите матрицу цепных параметров g - D цепи, показанной на рис. 69.

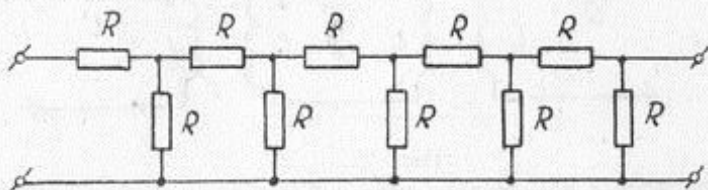


Рис. 69

27. Рассмотрите каскадное соединение двух четырехполюсников (рис. 19). Покажите, что передаточная проводимость короткого замыкания и передаточное сопротивление холостого хода результирующего четырехполюсника равны

$$Y_{12t} = -Y_{12a} \cdot Y_{12b} / (Y_{22a} + Y_{11b}), \quad Z_{12t} = Z_{12a} \cdot Z_{12b} / (Z_{22a} + Z_{11b}).$$

Эти равенства иногда называют теоремой разбиения [5].

28. Покажите справедливость соотношения (41).
29. Покажите справедливость соотношений (42) и (43).
30. Покажите, что разорванный четырехполюсник (рис. 26) имеет матрицы $[Y]_{кз}$, $[Z]_{хх}$ и $[A]$, записанные в форме соотношений (44).
31. Получите выражение для коэффициента передачи по напряжению трехзвенного RC - фильтра, представленного на рис. 70. Положив $R = 6,8 \text{ кОм}$, $C = 0,2 \text{ мкФ}$, вычислите частоты f_1 и f_2 (Гц), на которых фазовый сдвиг, вносимый фильтром,

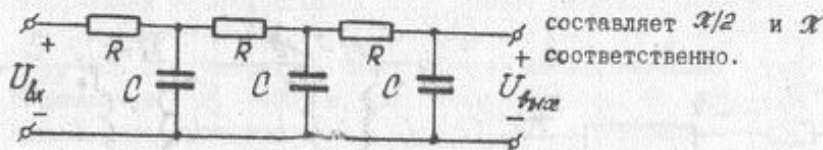


Рис. 70

32. Покажите справедливость Π -образных эквивалентных схем радиоламп, представленных на рис. 286 и рис. 295.
 33. Покажите справедливость формул, приведенных в таблице I.
 34. В схеме на рис. 71 трансформаторы имеют совершенную связь. Определите матрицу цепных параметров всей цепи.

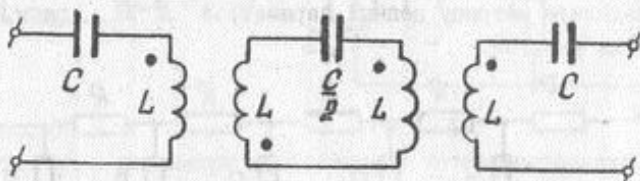


Рис. 71

35. На рис. 72 представлен ламповый двухкаскадный усилитель постоянного тока, первый каскад которого представляет собой катодный повторитель, а второй - усилитель с заземленной сеткой. Определить коэффициент усиления по напряжению, если для каждой лампы статический коэффициент усиления $\mu = 60$, а внутреннее сопротивление $R_i = 10 \text{ кОм}$.

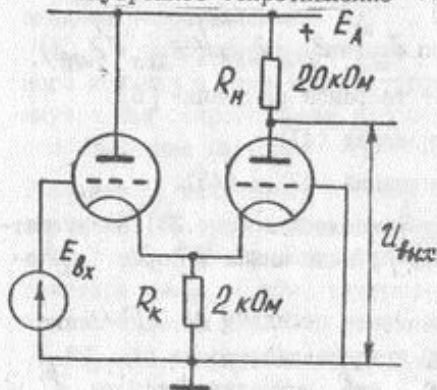


Рис. 72

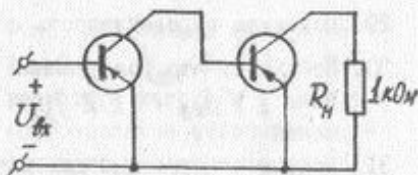


Рис. 73

36. Определить входное сопротивление, коэффициент передачи по току и напряжению двухкаскадного транзисторного усилителя постоянного тока, представленного на рис. 73. Транзисторы одинаковы и в рабочей точке имеют следующие значения h -параметров: $h_{112} = 2 \cdot 10^3 \text{ Ом}$, $h_{122} = 15 \cdot 10^{-4}$, $h_{212} = 32,3$, $h_{222} = 33,3 \cdot 10^{-6} \text{ См}$.

37. Показать, что коэффициент передачи каскадной схемы, представленной на рис. 74, определяется выражением

$$K_V = \frac{V_{\text{вых}}}{V_{\text{вх}}} = - \frac{S_1 (\mu_2 + 1) R_H}{(R_H + R_{i2}) (1/R_{i1} + 1/R_1) + (\mu_2 + 1)}$$

где S_1 и R_{i1} - крутизна и внутреннее сопротивление лампы Λ_1 , μ_2 и R_{i2} - статический коэффициент усиления и внутреннее сопротивление лампы Λ_2 .

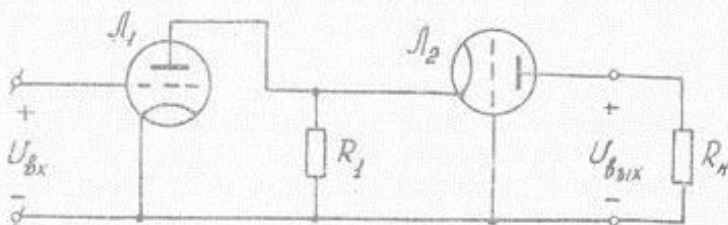


Рис. 74

38. Найти матрицы проводимостей короткого замыкания $[Y]_{кз}$ цепей, изображенных на рис. 75, разложив цепи на соответствующие последовательно или параллельно соединенные четырехполюсники.

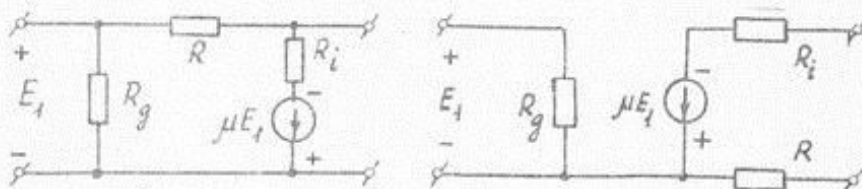


Рис. 75

39. Располагая матрицей $[Z]_{xx}$ реального трансформатора в форме (60), определите матрицы $[Y]_{кз}$, $[a]$ и $[h]$.
40. Докажите, что идеальный трансформатор при $L_1 \rightarrow \infty$ можно заменить схемой, показанной на рис. 76. Докажите следующие свойства этой цепи: 1) при разомкнутых зажимах $\underline{Q}-\underline{Q}'$ вход-

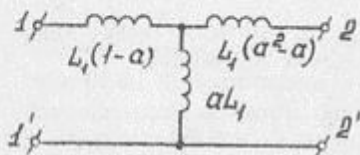


Рис. 76

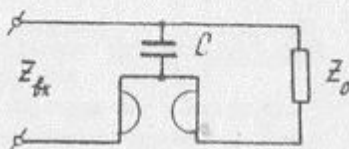


Рис. 77

- ное сопротивление бесконечно; 2) при замкнутых зажимах $\underline{Q}-\underline{Q}'$ входное сопротивление равно нулю; 3) фазовый сдвиг, вносимый трансформатором, равен нулю; 4) мощность сохраняется неизменной, т.е. входная мощность равна выходной; 5) для частот, отличных от нуля, эти свойства частотнонезависимы.
41. Найдите матрицу цепных параметров четного числа $2K$ ($K=1, 2, 3, \dots$) и нечетного числа $(2K-1)$ ($K=2, 3, 4, \dots$) гираторов. Гираторное сопротивление каждого гиратора равно R .
42. Определите входное сопротивление цепи, показанной на рис. 77. Сопротивление гиратора $R=1$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.И.АТАБЕКОВ. Основы теории цепей. М.: Энергия. 1969.
2. В.П.СИГОРСКИЙ, А.И.ПЕТРЕНКО. Основы теории электронных схем. Киев: Техника, 1967.
3. М.Р.ШЕВЕС, М.В.КАВЛУКОВА. Задачник по теории линейных электрических цепей. Издание четвертое, переработанное и дополненное. М.: Высш. шк. 1990.
4. Г.И.ИЗЬБРОВА, Г.В.КОРОЛЕВ, В.А.ТЕРЕХОВ, М.А.ОЖОГИН, В.И.СЕРОВ. Расчет электронных схем. Учебное пособие для вузов. М.: Высш. шк. 1987.
5. С.СЕНУ, Н.БАЛАБАНИ. Анализ линейных цепей. Пер.с англ. М.-Л.: Госэнергоиздат. 1963.
6. Р.Дж.МЭДДОК. Эквивалентные схемы в электронике. Пер.с англ. М.: Энергия. 1972.
7. Ш.КАРНИ. Теория цепей. Анализ и синтез. Пер.с англ. М.: Связь. 1973.
8. Дж.Э.ФИШЕР, Х.Б.ГЕТЛАНД. Электроника от теории к практике. Пер.с англ. М.: Энергия. 1980.
9. В.П.ПОЛОВ. Основы теории цепей. М.: Высш. шк. 1985.
10. В.Н.БИРЖКОВ, В.П.ПОЛОВ, В.И.СЕМЕНЦОВ. Сборник задач по теории цепей. М.: Высш. шк. 1985.