ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

(Методические указания)

Нижний Новгород, 1994

УДК 621.391.828

Колебательные контуры: Методические указания /Сост. С.М.Рыжаков.- Н.Новгород: ННГУ, 1994. - 37 с.

Методические указания к практическим занятиям разработаны в соответствии с программой курса "Теоретические основы радиотехники" для студентов, обучающихся по специальности 0715 (радиофизика и электроника. Указания содержат основные теоретические сведения по последовательным, параллельным и связанным колебательным контурам и задачи, предлагаемые студентам для самостоятельного решения.

Рис. 39

Составитель к.т.н. С.М.Рыжаков

Рецензент к.т.н. Ю.Г.Белов

Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского, 1994

РАЗДЕЛ I.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

I.I. Резонанс напряжений в последовательном контуре

Такой контур образован последовательным соединением индуктивности L, емкости C, активного сопротивления потерь R и источника (генератора) гармонической ЭДС $e(t)=E\cos(\omega t+\theta_0)$ – рис. I.I. Сопротивление R в общем случае включает в себя собственные потери контура и внутреннее сопротивление генератора.

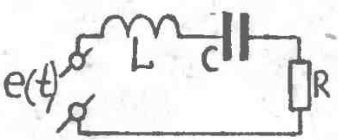


Рис. I.I

Комплексная амплитуда тока в контуре[+)] $\dot{\mathcal{J}}=\dfrac{\dot{E}}{R+j(\omega L-1/\omega C)}=$

$$=\frac{\dot{E}}{\dot{z}}=\frac{E}{|\dot{z}|}\exp j(\theta_0-\varphi), \qquad (I.I)$$

где $\dot{E}=E\exp j\theta_0$ – комплексная амплитуда ЭДС (далее будем полагать $\theta_0=0$, $\dot{E}=E$); $\dot{z}=R+j(\omega L-1/\omega C)=$ $=R+jX=|\dot{z}|\exp j\varphi$, $|\dot{z}|=\sqrt{R^2+X^2}$ – модуль полного сопротивления последовательного контура, $\varphi=\operatorname{arctg}X/R$ – сдвиг фазы тока относительно фазы ЭДС. Положительные значения угла φ соответствуют отставанию фазы тока, а отрицательные – опережению. Мгновенное значение тока в контуре

$$i(t)=\frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}\cos(\omega t-\varphi). \qquad (I.2)$$

Комплексные амплитуды напряжений на индуктивности и емкости

$$\dot{U}_L=j\omega L\dot{\mathcal{J}}=\frac{j\omega L\cdot E}{R+j(\omega L-1/\omega C)}=\frac{E\omega L}{|\dot{z}|}e^{-j(\varphi-\pi/2)}, \qquad (I.3)$$

$$\dot{U}_C=\frac{1}{j\omega C}\dot{\mathcal{J}}=\frac{E}{j\omega C[R+j(\omega L-1/\omega C)]}=\frac{E}{\omega C|\dot{z}|}e^{-j(\varphi+\pi/2)}. \qquad (I.4)$$

+) Точка над символом означает, что имеем дело с комплексной величиной.

Если частота источника ЭДС подобрана так, что

$$\omega = \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad (I.5)$$

то реактивное сопротивление X контура на частоте ω_p равно нулю, т.е. $X(\omega_p) = \omega_p L - 1/\omega_p C = 0$, а $|\dot{z}| = R$, $\varphi = 0$. При этом амплитуда тока в контуре достигает максимума

$$\mathcal{J}_p = \mathcal{J}(\omega_p) = \frac{E}{R}. \qquad (I.6)$$

Частоту ω_p называют резонансной частотой контура. Амплитуды напряжений на индуктивности и емкости на частоте ω_p

$$U_{Lp} = E \cdot \frac{\omega_p L}{R}, \qquad U_{Cp} = E \cdot \frac{1}{\omega_p C R}. \qquad (I.7)$$

Так как $\omega_p L = 1/\omega_p C$, то $U_{Lp} = U_{Cp}$. Сопротивления $\omega_p L = 1/\omega_p C$ обозначаются через ρ и называются волновым или характеристическим сопротивлением последовательного контура

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L(\text{Гн})}{C(\text{Ф})}} \ (\text{Ом}). \qquad (I.8)$$

На практике обычно $\rho \gg R$, поэтому одинаковые по величине амплитуды резонансных напряжений на индуктивности и емкости $U_{Lp} = U_{Cp} = E\rho/R$ могут во много раз превышать амплитуду E внешней ЭДС. Отсюда и происходит название – резонанс напряжений. Безразмерная величина

$$Q = \frac{U_{Lp}}{E} = \frac{U_{Cp}}{E} = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1}{\omega_p C R} \qquad (I.9)$$

называется добротностью последовательного контура. Величина Q показывает, во сколько раз напряжение на емкости (или индуктивности) при резонансе больше, чем амплитуда подводимой ЭДС. Обычно на практике $Q = 50 \div 200$.

I.2. Резонансная кривая и фазовая характеристика последовательного контура. Полоса пропускания

Знание частотных зависимостей $\mathcal{J}(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ необх[illegible] суждения об избирательности контура, под которой пони[illegible] способность к выделению сигналов заданной области частот и ослаблению сигналов других частот. Зависимость $\mathcal{I}(\omega)$ определяется модулем выражения (I.I)

$$\mathcal{I}(\omega)=\frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}=\frac{\mathcal{I}_p}{\sqrt{1+(\omega L-1/\omega C)^2/R^2}}=\frac{\mathcal{I}_p}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}.$$

Безразмерное отношение

$$n=\frac{\mathcal{I}(\omega)}{\mathcal{I}_p}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} \qquad (I.I0)$$

есть уравнение резонансной кривой последовательного колебательного контура. Фазовая характеристика, выражающая частотную зависимость сдвига фазы тока в контуре относительно фазы ЭДС, определяется выражением

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{X}{R}=\operatorname{arctg}\frac{\omega L-1/\omega C}{R}=\operatorname{arctg}\left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega}\right)\right]. \qquad (I.II)$$

На рис. I.2 и рис. I.3 приведены построенные по формулам (I.I0) и (I.II) графики $n(\omega/\omega_p)$ и $\varphi(\omega/\omega_p)$ при разных Q. При повышении Q резонансные кривые становятся более острыми, а фазовые характеристики в области частот, близких к ω_p - более крутыми.

Относительной расстройкой ε называется величина $\varepsilon=\Delta\omega/\omega_p$, где $\Delta\omega=\omega-\omega_p$ - абсолютная расстройка частоты ω внешней ЭДС относительно резонансной частоты ω_p контура. Если относительная расстройка ε мала, т.е. $\varepsilon=\Delta\omega/\omega_p<<1$ или $\Delta\omega<<\omega_p$, ω, то можно положить $\omega\approx\omega_p$ и записать выражение $\left(\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega}\right)$ в виде

$$\frac{\omega}{\omega_p}-\frac{\omega_p}{\omega}=\frac{(\omega-\omega_p)(\omega+\omega_p)}{\omega_p\,\omega}\approx\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}, \qquad (I.I2)$$

а выражения (I.I0) и (I.II) с учетом (I.I2) представить в виде

$$n\approx\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \qquad \varphi\approx\operatorname{arctg}a, \qquad (I.I3)$$

где безразмерная величина

$$a = \frac{2\Delta\omega}{\omega_p} Q = 2\varepsilon \cdot Q \tag{1.14}$$

называется обобщенной расстройкой контура. Зависимости $n(a)$ и

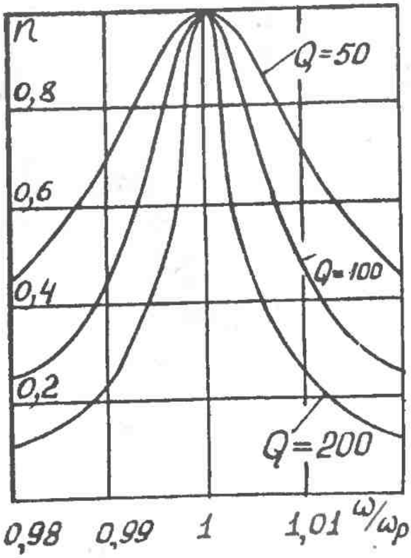


Рис. 1.2

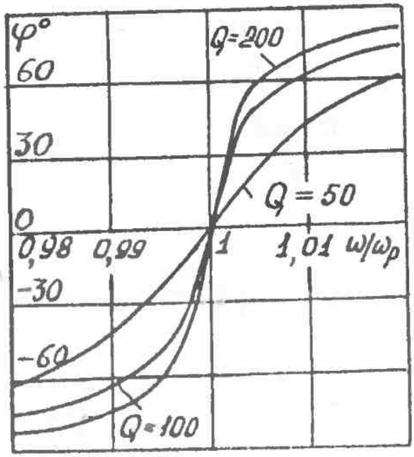


Рис. 1.3

$\varphi(a)$ определяют резонансную кривую и фазовую характеристику последовательного контура вблизи резонансной частоты.

В радиотехнических схемах последовательный контур часто используется как четырехполюсник, когда выходное напряжение снимается с емкости - рис. 1.4. При этом комплексный коэффициент передачи четырехполюсника равен

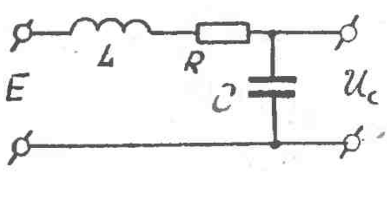


Рис. 1.4

$$\dot{K}_c(j\omega) = \frac{\dot{U}_c}{\dot{E}} = \frac{1/j\omega C}{R + j(\omega L - 1/\omega C)} = |\dot{K}_c(j\omega)| e^{-j\varphi_c}$$, где

$$|\dot{K}_c(j\omega)| = \frac{Q\omega_p/\omega}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} - \qquad (I.15)$$

модуль коэффициента передачи, представляющий амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) последовательного контура; график зависимости (I.15) есть в то же время резонансная кривая последовательного контура по напряжению;

$$\varphi_c = \operatorname{arctg} Q\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right) + \frac{\pi}{2} -$$

- сдвиг фазы напряжения на емкости относительно фазы ЭДС.

На резонансной частоте $\omega = \omega_p$ имеем $|\dot{K}_c(j\omega_p)| = Q$, $\varphi_c = \pi/2$. Разделив (I.15) на Q , получим уравнение резонансной кривой по напряжению последовательного контура

$$n_c = \frac{|\dot{K}_c(j\omega)|}{|\dot{K}_c(j\omega_p)|} = \frac{|\dot{U}_c|}{U_{cp}} = \frac{\omega_p/\omega}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} . \qquad (I.16)$$

Вычислив dn_c/dx, где $x = \omega/\omega_p$, приравняв производную нулю, получим, что функция $n_c(x)$ достигает максимума на частоте

$$\omega_1 = \omega_p\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} . \qquad (I.17)$$

Частоты ω_1 и ω_p могут заметно отличаться между собой при небольшой добротности Q контура. Для контуров с добротностью $Q \approx 50 \div 100$, которые обычно применяются в радиотехнике, различие между частотами ω_1 и ω_p столь незначительно, что может не приниматься во внимание.

Сравнение резонансных кривых по току (I.10) и напряжению (I.16) показывает, что они отличаются лишь множителем ω_p/ω Это различие заметно не проявляется, так как отклонение множителя ω_p/ω от единицы обычно не превышает нескольких процентов.

В радиотехнике условились определять полосу пропускания колебательного контура как полосу частот вблизи резонанса, на границах которой амплитуда тока в контуре (или амплитуда напряжения на емкости или индуктивности) снижается до $1/\sqrt{2} \approx 0{,}7$ от резонансного значения; при этом амплитуда действующей на контур ЭДС считается неизменной. Положение полосы пропускания на резонансной кривой показано на рис. I.5. При высокой добротности $(Q \gg 1)$ полоса пропускания симметрична относительно резонансной частоты ω_p, поэтому $\omega_1 - \omega_p = \omega_p - \omega_2$. На границах полосы пропускания обобщенная расстройка a =I, т.е.

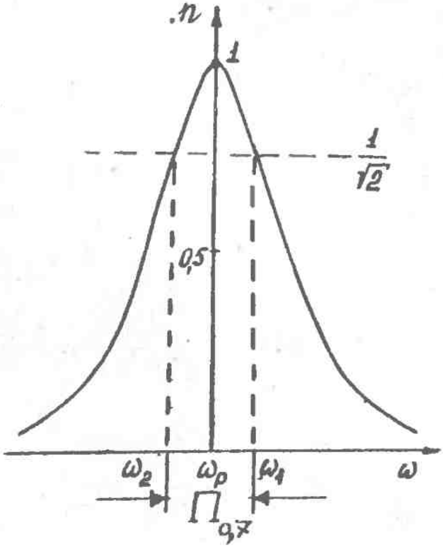


Рис. I.5

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_p} Q = \frac{\Pi_{0,7} Q}{\omega_p} = 1,$$

откуда

$$\Pi_{0,7} = \frac{\omega_p}{Q}. \quad (I.18)$$

Это выражение используют для экспериментального определения Q. С этой целью изменяют частоту ЭДС, действующей в контуре, до снижения показания измерительного прибора, регистрирующего ток в контуре, до 0,7 от максимального значения, соответствующего частоте ω_p. Измерив частоты ω_1 и ω_2, зная ω_p, находят $Q = \dfrac{\omega_p}{(\omega_1 - \omega_2)}$.

I.3. Задачи

I.I. Заданы резонансная частота последовательного контура f_p = 2 МГц, ширина полосы пропускания $\Pi_{0,7}$ = I6 кГц и сопротивление потерь R =I2 Ом. Рассчитать параметры реактивных элементов.

I.2. Последовательный контур с добротностью Q =I20, L = = 220 мкГн, С = 535 пФ подключен к источнику энергии с внутренним сопротивлением R_i =I7 Ом - рис. I.6. Определить резонансную частоту и полосу пропускания контура.

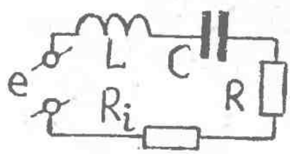


Рис. I.6

Найти, при каком соотношении сопротивлений R и R_i в контуре выделяется максимальная мощность при резонансе.

I.3. Вычислить резонансную частоту и добротность контура, состоящего из последовательно соединенных R = 5,I Ом, L = = 65 · 10^{-6} Гн, С = I,56 · 10^{-9} Ф. Определить сопротивление цепи при частоте, превышающей резонансную на I%.

I.4. Последовательный контур с индуктивностью 2 мГн настроен на частоту f_p = I60 кГц. Сопротивление потерь R = 40 Ом. Каким сопротивлением $R_ш$ следует зашунтировать катушку индуктивности, чтобы полоса пропускания $П_{0,7}$ была равна I0 кГц?

I.5. Последовательный контур имеет емкость С = 2000 пФ и сопротивление потерь R = 2 Ом. Контур настроен на длину волны λ = I000 М. Пропустит ли контур полосу частот 2 кГц с ослаблением на граничных частотах, не превышающим 20% ? Если не пропустит, то как следует изменить параметры контура, чтобы удовлетворить поставленному условию?

I.6. Найти выражение для коэффициента передачи $\dot{K}(j\omega)$ = = $\dot{U}_{вых}(j\omega)/\dot{U}_{вх}(j\omega)$ контура, изображенного на рис. I.7. Сопротивление R_2 можно рассматривать либо как сопротивление утечки конденсатора, либо как входное сопротивление последующего каскада. Найти выражение для резонансной частоты ω_p такой колебательной системы. Вычислить $|\dot{K}(\omega_p)|$.

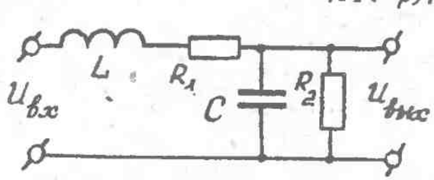


Рис. I.7

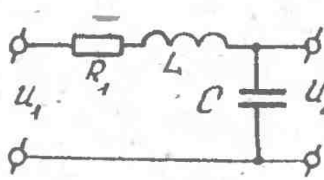


Рис. I.8

I.7. Дан последовательный контур (рис. I.8), имеющий активное сопротивление R_1 = I0 Ом. Вольтметром с бесконечно большим входным сопротивлением измерили добротность контура Q, которая оказалась равной I00, т.е. U_2/U_1 = I00 на резонансной частоте. Затем были произведены эти же измерения вольтметром, входное сопротивление которого $R_2 = 10^5$ Ом. Рассчитать амплитуду напряжения на конденсаторе в последнем случае, если на вход подается напряжение с амплитудой U_1 = I В.

I.8. На последовательный контур воздействуют синусоидальные напряжения с частотами $\omega_p, 2\omega_p, 3\omega_p, ..., n\omega_p$ (n =2,3,4...), но с одинаковыми амплитудами; ω_p - резонансная частота контура. Найти соотношение между токами, вызванными этими напряжениями.

I.9. На последовательный контур подается амплитудно-модулированное колебание $u = U_0(1 + m\sin\Omega t)\cdot\sin\omega_p t$. Определить ток в контуре, считая, что он настроен в резонанс с частотой ω_p.

Рассчитать, как изменится коэффициент модуляции m и сдвиг по фазе огибающей, если f_p = 300 кГц, С = 10^3 пФ, F_1 = I000Гц, m = 0,7, R = I0 Ом, F_2 = I0000 Гц, где F_1 и F_2 - частоты модулирующего синусоидального колебания.

I.I0. На последовательный контур с параметрами L = I0 мГн, С = I00 пФ, R = I00 Ом подается сигнал

$$u(t) = 10\sin\frac{\omega_p t}{2} + 10\sin\omega_p t + 10\sin 2\omega_p t, \text{ В}.$$

Контур настроен на частоту ω_p. Найти ток в контуре $i(t)$. Нарисовать спектры входного сигнала и тока.

I.II. Для показанной на рис. I.9 цепи найти значение индуктивности L_0, при которой ток J совпадает по фазе с напряжением питания U, если R = 2 Ом, L = 2 мГн, $C = 0{,}25\cdot 10^{-3}$ Ф, $\omega = 2\cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{сек.}}$. Построить частотную характеристику входного реактивного сопротивление контура между точками А и В.

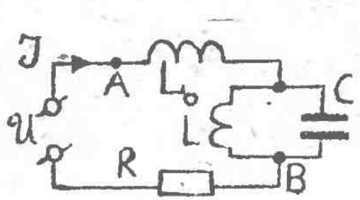


Рис. I.9

РАЗДЕЛ 2.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

2.I. Резонансная частота и сопротивление параллельного контура при резонансе

Пусть генератор (или источник входного сигнала) с внутренним сопротивлением R_i подключен к колебательному контуру параллельно - рис. 2.I. В общем случае каждая из ветвей контура может

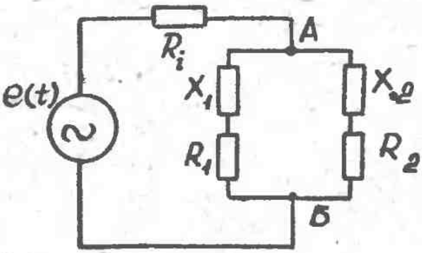


Рис. 2.I

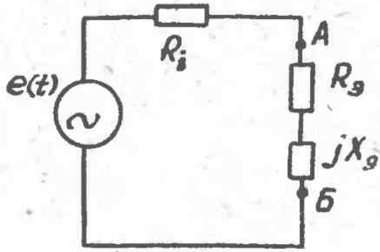


Рис. 2.2

содержать индуктивности, емкости и сопротивления. Обозначим

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1 , \qquad \dot{Z}_2 = R_2 + jX_2$$

где X_1 и X_2 , R_1 и R_2 - результирующие реактивные и активные сопротивления параллельных ветвей. Сопротивление контура между точками А и Б равно

$$\dot{Z}_{АБ} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2)} = R_э + jX_э , \qquad (2.1)$$

где

$$R_э = \frac{R_2(X_1^2 + R_1^2) + R_1(X_2^2 + R_2^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} , \qquad (2.2)$$

$$X_э = \frac{X_1(X_2^2 + R_2^2) + X_2(X_1^2 + R_1^2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} - \qquad (2.3)$$

соответственно активная и реактивная составляющие сопротивления $\dot{Z}_{АБ}$. Таким образом, заменили параллельный контур эквивалентным ему последовательным контуром - рис. 2.2, который называют схемой замещения параллельного контура (см. § 2.5).

Резонансные частоты параллельного контура находятся из условия равенства нулю реактивной составляющей $X_э$ входного сопротивления

$$X_1(X_2^2 + R_2^2) + X_2(X_1^2 + R_1^2) = 0. \qquad (2.4)$$

Формула (2.4) является точной расчетной формулой для определения частоты параллельного резонанса. На высоких частотах обычно выполняются неравенства

$$R_1 \ll |X_1|, \quad R_2 \ll |X_2|, \qquad (2.5)$$

поэтому уравнение (2.4) принимает вид

$$X_1 \cdot X_2 (X_1 + X_2) = 0. \qquad (2.6)$$

Любой из этих трех сомножителей в общем случае может быть равен нулю.

Если $X_1 = 0$, то имеет место последовательный резонанс (резонанс напряжений) в левой ветви - рис. 2.I;

если $X_2 = 0$, то имеет место последовательный резонанс (резонанс напряжений) в правой ветви - рис. 2.I;

если $X_1 + X_2 = 0$, то имеет место параллельный резонанс - резонанс токов. Формула

$$X_1 + X_2 = 0 \qquad (2.7)$$

является приближенной расчетной формулой для определения частоты параллельного резонанса. Таким образом, в параллельном колебательном контуре с малыми потерями резонанс токов наступает в том случае, когда реактивные сопротивления ветвей равны друг другу по абсолютной величине и противоположны по знаку $(X_1 = -X_2)$. Подставив (2.7) в (2.2), получим с учетом неравенств (2.5)

$$R_э = R_{эр} = \frac{X_1^2}{R_1+R_2} = \frac{X_2^2}{R_1+R_2} = \frac{X_{1,2}^2}{R_1+R_2} . \qquad (2.8)$$

Сопротивление $R_{эр}$, вычисленное на частоте параллельного резонанса, имеет чисто активный характер.

Применим формулы (2.4), (2.7) и (2.8) к трем схемам параллельных контуров.

2.2. Простой параллельный контур (контур I-го вида). Резонанс токов в параллельном контуре

Схема простого контура, или, как его еще называют, контура I-го вида, показана на рис. 2.3. Здесь левая ветвь не содержит емкостей, а правая - индуктивностей. Активные сопротивления R_1 и R_2 учитывают потери в катушке и конденсаторе, причем обычно $R_1 >> R_2$. Подставив в (2.4) $X_1 = \omega_p L$, $X_2 = -\frac{1}{\omega_p C}$, получим точное выражение для частоты параллельного резонанса контура I-го вида

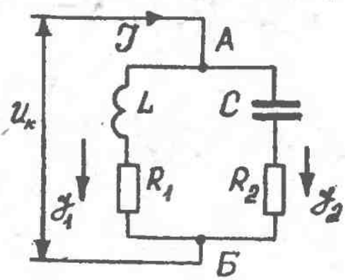


Рис. 2.3

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}} \qquad (2.9)$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ - волновое или характеристическое сопротивление контура I-го вида.

Подставив $X_1 = \omega_p L$, $X_2 = -1/\omega_p C$ в (2.7), получим приближенное выражение для резонансной частоты контура I-го вида

$$\omega_p \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} , \qquad (2.10)$$

совпадающее с выражением для резонансной частоты последовательного контура.

Подставив, наконец, $X_1 = \omega_p L$, $X_2 = -1/\omega_p C$, $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$ и $R = R_1 + R_2$ в (2.8), получим выражение для сопротивления простого параллельного контура при резонансе

$$R_{эр} = \frac{\omega_p^2 L^2}{R} = \frac{1}{\omega_p^2 C^2 R} = \frac{L}{CR} = \frac{\rho^2}{R} = Q\rho, \qquad (2.11)$$

где $Q = \rho/R$ – добротность простого параллельного контура. Обычно $R_{эр}$ имеет величину несколько килоом.

Рассмотрим распределение токов при резонансе в простом параллельном контуре. Пусть $\dot{J}$ – ток в неразветвленной части контура (ток генератора), а $\dot{J}_1$ и $\dot{J}_2$ – токи в индуктивной и емкостной ветвях – рис. 2.3. Напряжение $\dot{U}_к$ на контуре

$$\dot{U}_к = R_{эр}\dot{J} = \dot{J}_1(R_1 + j\omega_p L) = \dot{J}_2\left(R_2 - j\frac{1}{\omega_p C}\right),$$ откуда

$$\dot{J}_1 = \frac{\dot{U}_к}{R_1 + j\omega_p L} = \frac{\dot{J} R_{эр}}{R_1 + j\omega_p L} = \dot{J}\frac{R_{эр} e^{-j\varphi_1}}{\sqrt{R_1^2 + (\omega_p L)^2}}, \qquad (2.12)$$

$$\dot{J}_2 = \frac{\dot{U}_к}{R_2 - j\frac{1}{\omega_p C}} = \frac{\dot{J} R_{эр}}{R_2 - j\frac{1}{\omega_p C}} = \dot{J}\frac{R_{эр} e^{-j\varphi_2}}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_p C}\right)^2}}, \qquad (2.13)$$

где $\varphi_1 = arctg\,\omega_p L/R_1$, $\varphi_2 = arctg(-1/\omega_p C R_2)$.

Угол φ_1 запаздывающий, а φ_2 – опережающий фазу тока $\dot{J}$ и, следовательно, фазу напряжения $\dot{U}_к$. Векторная диаграмма токов и напряжений в простом параллельном контуре при резонансе представлена на рис. 2.4. Поскольку $|X_1| = \omega_p L \gg R_1$, $|X_2| = \frac{1}{\omega_p C} \gg R_2$, т.е. выполняются неравенства (2.5), то углы φ_1 и φ_2

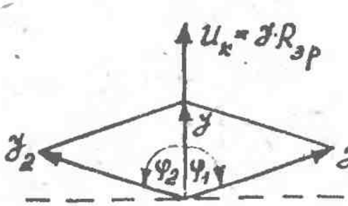


Рис. 2.4

по абсолютной величине близки к $\pi/2$. Следовательно, токи $\dot{J}_1$ и $\dot{J}_2$ сдвинуты между собой по фазе на угол, близкий к π, а их амплитуды почти одинаковы. Можно считать, что токи ветвей $\dot{J}_1$ и $\dot{J}_2$ образуют как бы один контурный ток J_k, обтекающий последовательно все элементы контура

$$J_k \approx J_1 \approx J_2. \qquad (2.14)$$

Из (2.12) и (2.13) с учетом (2.5) следует

$$J_k = J_1 \approx \frac{R_{эр}J}{\omega_p L} = \frac{\rho^2 J}{R\rho} = QJ; \qquad J_k = J_2 \approx \frac{R_{эр}J}{1/\omega_p C} = \frac{\rho^2 J}{R\rho} = QJ.$$

Таким образом, при резонансе ток J_k, обтекающий контур, в Q раз больше, чем ток J в неразветвленной части контура. Отсюда и происходит название "резонанс токов" или параллельный резонанс.

2.3. Сложные параллельные контура II-го и III-го видов

Пусть одна ветвь контура является чисто индуктивной, а вторая ветвь, кроме емкости, содержит еще и индуктивность – рис. 2.5а. Такой контур называют сложным параллельным контуром, а иногда параллельным контуром II-го вида. Для определения частоты параллель-

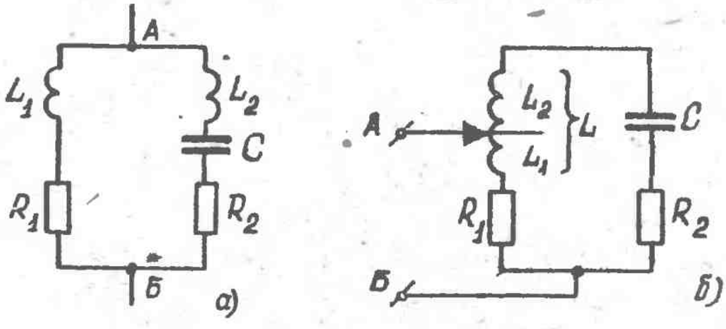


Рис. 2.5

ного резонанса контура II-го вида подставляем в (2.7) $X_1 = \omega_p L_1$, $X_2 = \omega_p L_2 - \dfrac{1}{\omega_p C}$. Тогда $\omega_p L_1 + \omega_p L_2 - \dfrac{1}{\omega_p C} = 0$, откуда

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)\,C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad (2.15)$$

где $L = L_1 + L_2$. Из условия $X_2 = \omega_{pн} L - \frac{1}{\omega_{pн} C} = 0$ находим частоту $\omega_{pн}$ последовательного резонанса (резонанса напряжений), имеющего место в правой ветви контура: $\omega_{pн} = 1/\sqrt{L_2 C}$.

Обозначим через p отношение

$$p = \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{L_1}{L}. \qquad (2.16)$$

Тогда $X_1 = \omega_p L_1 = p\,\omega_p L$. Из формулы (2.8) находим сопротивление параллельного контура П-го вида на частоте ω_p

$$R_{эр} = \frac{X_{1,2}^2}{R} = p^2 \frac{(\omega_p L)^2}{R} = p^2 \frac{\rho^2}{R} = p^2 \rho Q, \qquad (2.17)$$

где $R = R_1 + R_2$, $\rho = \sqrt{(L_1+L_2)/C} = \sqrt{L/C}$ – характеристическое сопротивление контура П-го вида. Коэффициент p называют коэффициентом включения. Формула (2.17) показывает, что перераспределение индуктивности между ветвями контура П-го вида дает удобный способ изменения активного сопротивления $R_{эр}$ на частоте параллельного резонанса. При перераспределении индуктивности между ветвями контура его параметры (резонансная частота ω_p волновое сопротивление $\rho = \sqrt{L/C}$ и добротность $Q = \rho/R$) остаются неизменными. В практических схемах контур П-го вида выполняется так, как показано на рис. 2.5б: при перестановке ползунка происходит изменение коэффициента включения p , что и позволяет изменить сопротивление $R_{эр}$ между точками А и Б от нуля до наибольшей величины $R_{эр\,макс} = \rho \cdot Q$.

Пусть сложный параллельный контур содержит в индуктивной ветви емкость, а вторая ветвь является чисто емкостной – рис.2.6. Такой контур называют еще контуром Ш-го вида. При $X_1 = \omega_{pн} L_1 - 1/\omega_{pн} C_1 = 0$ в левой ветви контура происходит последовательный резонанс на частоте $\omega_{pн} = 1/\sqrt{L_1 C_1}$. Для определения частоты параллельного резонанса подставляем в (2.7)

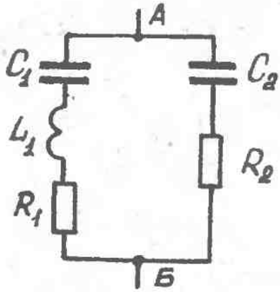


Рис. 2.6

$$X_1 = \omega_p L_1 - \frac{1}{\omega_p C_1}$$ и

$$X_2 = -\frac{1}{\omega_p C_2}$$. Тогда

$$\omega_p L_1 - 1/\omega_p C_1 = 1/\omega_p C_2$$,

откуда

$$\omega_p = 1/\sqrt{LC}\ , \qquad (2.18)$$

где

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\ . \qquad (2.19)$$

Обозначим через p коэффициент включения

$$p = C/C_2\ , \qquad (2.20)$$

где $C < C_1,\ C_2$; $0 \le p \le 1$. Тогда $X_2 = -1/\omega_p C_2 = -p/\omega_p C$. Из (2.8) находим сопротивление параллельного контура Ш-го вида (рис. 2.6) на резонансной частоте ω_p

$$R_{эp} = \frac{X_2^2}{R} = \frac{p^2}{\omega_p^2 C^2 R} = p^2 \frac{\rho^2}{R} = p^2 Q\rho, \qquad (2.21)$$

где $R = R_1 + R_2$, $\rho = 1/\omega_p C = \sqrt{L/C} = \sqrt{L(C_1+C_2)/C_1C_2}$ – характеристическое сопротивление контура Ш-го вида. Формула (2.21) показывает, что, изменяя соотношение между емкостями C_1 и C_2, можно изменять резонансное сопротивление контура на частоте ω_p. При этом емкости C_1 и C_2 нужно изменять так, чтобы суммарная емкость C – формула (2.19) – оставалась неизменной и, следовательно, параметры контура (ω_p, ρ и Q) также оставались неизменными.

Контуры П-го и Ш-го видов широко используются на практике для построения ламповых и транзисторных трехточечных схем автогенераторов – емкостной трехточки (рис. 2.7а) и индуктивной трехточки (рис. 2.7б). Термин "трехточка" означает, что активный прибор соединяется с колебательным контуром в 3-х точках I,2 и 3. Для выполнения условия баланса фаз в трехточечной схеме автогенератора необходимо, чтобы напряжение $\dot{U}$ на контуре и напряжение обратной связи $\dot{U}_o$, снимаемое с емкости (рис. 2.7а) или с индуктив-

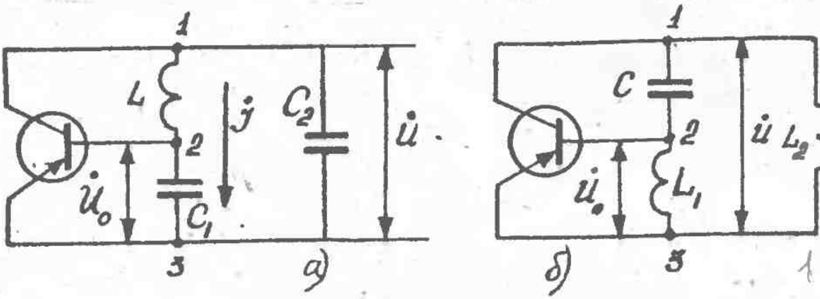


Рис. 2.7

ности (рис. 2.7б), находились в противофазе. Рассмотрим, как выполняется это условие, например, в схеме емкостной трехточки. Полагая, что ток базы $\dot{J}_Б \approx 0$, находим ток $\dot{J}$ в левой (индуктивной) ветви контура (рис. 2.7а)

$$\dot{J} = \frac{\dot{U}}{j\omega L + 1/j\omega C_1} = \frac{j\omega C_1 \dot{U}}{1-(\omega/\omega_{посл.})^2},$$

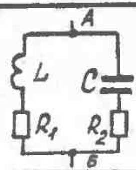
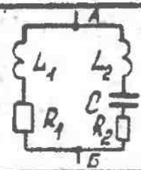
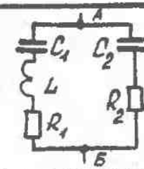
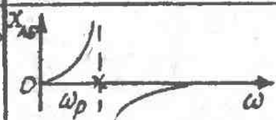
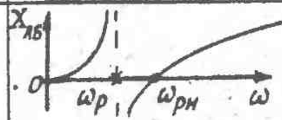
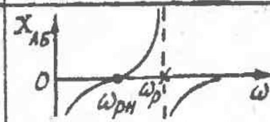
где $\omega_{посл} = 1/\sqrt{LC_1}$ - частота последовательного резонанса левой ветви. Чтобы сопротивление контура между точками 1-3 (рис. 2.7а) имело индуктивный характер, необходимо выполнение неравенства $\omega > \omega_{посл}$, где ω - возможная частота генерации. Находим напряжение $\dot{U}_o$ на емкости C_1, являющееся в схеме автогенератора напряжением обратной связи

$$\dot{U}_o = \dot{Z}_{C1}\dot{J} = \frac{1}{j\omega C_1}\cdot\frac{j\omega C_1 \dot{U}}{1-(\omega/\omega_{посл})^2} = \frac{-\dot{U}}{|1-(\omega/\omega_{посл})^2|}.$$

Отсюда следует, что напряжения $\dot{U}_o$ и $\dot{U}$ противофазны.

В таблице I приведены сравнительные характеристики контуров 3-х видов.

ТАБЛИЦА I

Схема → / параметр ↓	контур I вида 	контур II вида 	контур III вида 
Частота параллельного резонанса	$\omega_p = 1/\sqrt{LC}$	$\omega_p = 1/\sqrt{LC}$, где $L = L_1 + L_2$	$\omega_p = 1/\sqrt{LC}$, где $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$
Частота последовательного резонанса	—	$\omega_{рн} = 1/\sqrt{L_2 C} > \omega_p$	$\omega_{рн} = 1/\sqrt{LC_1} < \omega_p$
Вид входного реактивного сопротивления (при $R_1 = R_2 = 0$)			
Характеристическое сопротивление	$\rho = \sqrt{L/C}$	$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$, где $L = L_1 + L_2$	$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$, где $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$
Добротность	$Q = \rho/R$, где $R = R_1 + R_2$		
Коэффициент включения	—	$p = L_1/(L_1 + L_2) = L_1/L$	$p = C/C_2$
Сопротивление на частоте параллельного резонанса	$R_{эр} = \rho^2/R = \rho Q$	$R_{эр} = p^2 \rho Q$, $0 \le p \le 1$	$R_{эр} = p^2 \rho Q$ $0 \le p \le 1$

2.4. Резонансная кривая параллельного контура. Полоса пропускания.

Для определения резонансных свойств параллельного контура воспользуемся выражением (2.I), справедливом при любых соотношениях между частотой ω источника сигнала (генератора) и резонансной частотой контура ω_p. При выполнении неравенств (2.5) выражение (2.I) принимает вид

$$\dot{Z}_{АБ} \cong \frac{-X_1 X_2}{R + j(X_1 + X_2)}, \qquad (2.22)$$

где $R = R_1 + R_2$. Пусть имеем простой параллельный контур - рис. 2.3. Тогда, полагая в (2.22) $X_1 = \omega L$, $X_2 = -\frac{1}{\omega C}$ получим

$$\dot{Z}_{АБ}(\omega) = \frac{L/C}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{R_{эр}}{1 + ja}, \qquad (2.23)$$

где $R_{эр} = \frac{L}{CR} = \frac{\rho^2}{R}$, $a = Q\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)$ - обобщенная расстройка контура.

На практике параллельный контур используют в качестве нагрузки в усилительных, умножительных и других каскадах. Эквивалентная схема такого каскада показана на рис. 2.8, где под R_i понимается внутреннее сопротивление генератора. Ток $\dot{J}$ в неразветвленной части схемы на произвольной частоте ω равен

$$\dot{J}(\omega) = \dot{E}/[R_i + \dot{Z}_{АБ}(\omega)],$$

а на резонансной частоте этот же ток $\dot{J}(\omega_p) = \dot{E}/(R_i + R_{эр})$.

Поделив $\dot{J}(\omega)$ на $\dot{J}(\omega_p)$ с учетом соотношения (2.23), получим уравнение резонансной кривой по току для рассматриваемой схемы

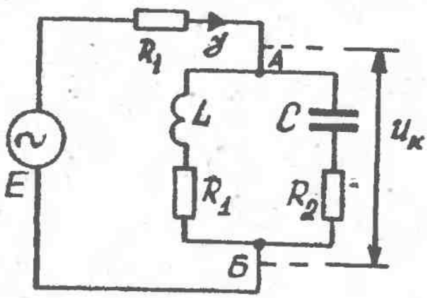


Рис. 2.8

$$n_y = \frac{\dot{J}(\omega)}{\dot{J}(\omega_p)} = \frac{(1+\beta)(1+ja)}{1+\beta+ja}, \qquad (2.24)$$

где обозначено

$$\beta = \frac{R_{эp}}{R_i}. \qquad (2.25)$$

Вычислив модуль выражения (2.24), получим

$$n_y = (1+\beta)\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{(1+\beta)^2+a^2}} = \frac{\sqrt{1+Q^2(\omega/\omega_p-\omega_p/\omega)^2}}{\sqrt{1+Q_э^2(\omega/\omega_p-\omega_p/\omega)^2}}, \qquad (2.26)$$

где

$$Q_э = \frac{Q}{1+\beta} = \frac{Q}{1+R_{эp}/R_i} \qquad (2.27)$$

- эквивалентная добротность контура с учетом шунтирующего действия внутреннего сопротивления R_i генератора.

Напряжение на контуре на произвольной частоте ω $\dot{U}_к(\omega) = \dot{J}(\omega)\cdot\dot{Z}_{АБ}(\omega)$, а на резонансной частоте это же напряжение $\dot{U}_к(\omega_p) = \dot{E}R_{эp}/(R_i+R_{эp})$. Поделив $\dot{U}_к(\omega)$ на $\dot{U}_к(\omega_p)$, учтя соотношение (2.23), получим уравнение резонансной кривой по напряжению

$$n_u = \frac{\dot{U}_к(\omega)}{\dot{U}_к(\omega_p)} = \frac{1+\beta}{1+\beta+ja}.$$

Вычислив модуль этого выражения, получим

$$n_u = \frac{1+\beta}{\sqrt{(1+\beta)^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q_э^2(\omega/\omega_p-\omega_p/\omega)^2}}. \qquad (2.28)$$

Резонансные кривые по току и напряжению при разных β изображены на рис. 2.9. Рассмотрим частные случаи.

I. Пусть $\beta \gg 1$ или $R_{эp} \gg R_i$. Тогда $Q_э \to 0$, уравнение резонансной кривой по току принимает вид

$$n_y \approx \sqrt{1+Q^2(\omega/\omega_p-\omega_p/\omega)^2},$$

а уравнение резонансной кривой по напряжению $n_u = 1$. Таким образом, в этом предельном случае лишь поведение тока в неразветвленной части цепи может быть индикатором резонанса.

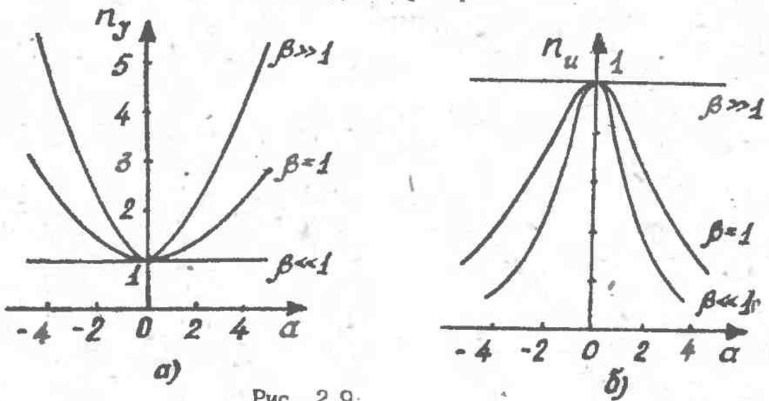


Рис. 2.9

2. Пусть, наоборот, $\beta \ll 1$ или $R_{эр} \ll R_i$. Такой случай часто встречается на практике и соответствует применению параллельного контура в транзисторных и пентодных ламповых схемах. Указанные приборы обладают большим внутренним сопротивлением R_i. В этом случае $Q_э \to Q$, уравнение резонансной кривой по току $n_y \to 1$, а уравнение резонансной кривой по напряжению

$$n_u \cong \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\omega/\omega_p - \omega_p/\omega)^2}}.$$

В этом предельном случае индикатором резонанса служит поведение напряжения на контуре.

3. При $\beta = 1$ ($R_{эр}$ и R_i сравнимы по величине) индикатором резонанса может служить как поведение тока в неразветвленной части схемы, так и поведение напряжения на контуре.

С учетом шунтирующего действия внутреннего сопротивления генератора полоса пропускания параллельного контура на уровне 0,7 равна

$$\Pi_{07} = \frac{\omega_p}{Q_э} = \frac{\omega_p(1+R_{эр}/R_i)}{Q} > \frac{\omega_p}{Q}. \qquad (2.29)$$

Как следует из (2.29), учет внутреннего сопротивления R_i генератора приводит к расширению полосы пропускания контура.

2.5. Схема замещения параллельного контура

Как отмечалось выше, записав полное сопротивление между точками А и Б (рис. 2.I) в форме $\dot{Z}_{АБ} = R_э + jX_э$, представляем параллельный контур в виде последовательной схемы замещения – рис. 2.2. Запишем выражение (2.23) в виде

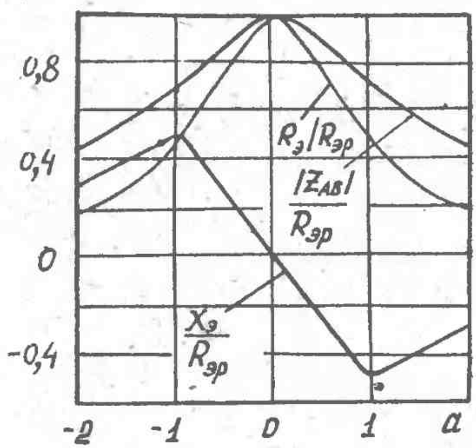


Рис. 2.I0

$$\dot{Z}_{АБ}(a) = \frac{R_{эр}}{1+ja} = R_э + jX_э,$$

где

$$R_э = \frac{R_{эр}}{1+a^2}, \quad (2.30)$$

$$X_э = -j\frac{aR_{эр}}{1+a^2}. \quad (2.3I)$$

Графики функций $\frac{R_э(a)}{R_{эр}}$, $\frac{X_э(a)}{R_{эр}}$ и $\dot{Z}_{АБ}(a)/R_{эр} = 1/\sqrt{1+a^2}$ представлены на рис. 2.I0.

Схемы замещения параллельного контура полезны при решении задач – см. задачи 2.2, 2.3, 2.4.

2.6. Задачи.

2.I. Рассчитать емкость и индуктивность простого параллельного контура, если $\lambda_р$ =900 М, R =I0 Ом, $R_{эр}$ =9 $\cdot$ I0^3 Ом.

2.2. Найти значения активной $R_э$ и реактивной $X_э$ составляющих полное сопротивление простого параллельного контура, питаемого генератором с частотой f =935 кГц. Параметры контура L =240 мкГн, C =I20 пФ, R =20 Ом.

2.3. Простой параллельный контур настроен на длину волны λ =400 м. Параметры контура L =200 мкГн, R =I0 Ом. Чему равны резонансное сопротивление контура $R_{эр}$, его добротность Q и полоса пропускания $П_{0,7}$? На какой частоте реактивная составляющая контура имеет максимальное значение и емкостной характер?

2.4. В схеме простого параллельного контура (рис. 2.8) R_i = = I0 кОм, $R_{эр}$ = 50 кОм. Для настройки контура в резонанс можно использовать либо амперметр, либо вольтметр. Решить, чем лучше настраиваться в резонанс в этих условиях - вольтметром или амперметром. Определить границы шкалы прибора, если напряжение генератора $U_г$ =200 В. Настройку вести в пределах полосы пропускания. Добротность контура Q =50.

2.5. Найти мощность, выделяемую в простом параллельном контуре, если известно, что $R_{эр}$ =40 кОм, добротность Q =30, а амплитуда тока в контуре равна 0,6 А.

2.6. Простой параллельный контур, параметры которого R =I6,3 Ом, L =338 мкГн, C =300 пФ (рис. 2.II), подключен к источнику гармонической ЭДС с амплитудой 200 В и внутренним сопротивлением R_i =69 кОм. Чему равны эквивалентная добротность контура и полоса его пропускания, если нагрузить контур на сопротивление $R_н$ =I38 кОм ?

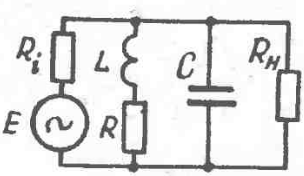


Рис. 2.II

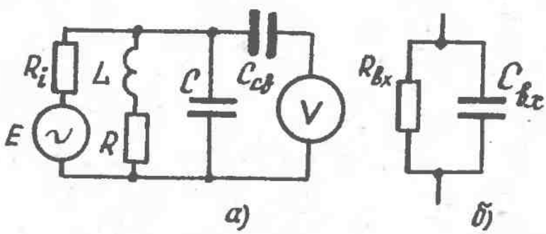


Рис. 2.I2

2.7. Для измерения добротности простого параллельного контура собрана схема - рис. 2.I2а. Входная цепь вольтметра описывается эквивалентной схемой, представленной на рис. 2.I2б. Каким должно быть входное сопротивление вольтметра $R_{вх}$.

чтобы при заданных параметрах L =I0 мкГн, C =88 пФ, R = = 5 Ом, R_i =I00 кОм, $C_{св}$ = I мкФ, $C_{вх}$ = 2 пФ ошибка измерения добротности не превышала 5% ?

2.8. Во сколько раз сопротивление простого параллельного контура на частоте $n\omega_p$ меньше, чем на резонансной частоте ω_p. Здесь n =2,3,4,... - номер гармоники. Определить $|Z(\omega_p)|$ и $|Z(2\omega_p)|$, если L =250 мкГн, C =I000 пФ, R =5 Ом.

2.9. Найти точное выражение для резонансной частоты и сопротивления при резонансе параллельного контура (рис. 2.I3), считая, что $R_1 \ll \omega L$, а $R_2 \gg R_1$.

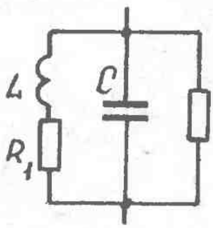


Рис. 2.I3

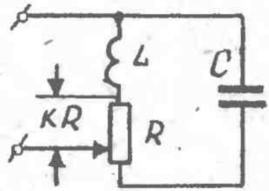


Рис. 2.I4

2.I0. При перемещении ползунка (рис.2.I4) сопротивление распределяется между ветвями параллельного контура, у которого L = 2 мГн, C =500 пФ, R = I кОм. Определить пределы изменения резонансной частоты контура при изменении параметра K от 0 до I. Сделайте вывод о целесообразности использования на практике такого способа изменения резонансной частоты параллельного контура.

2.II. Вычислить частоты резонансов токов $f_{рт}$ и напряжений $f_{рн}$, характеристическое сопротивление ρ, добротность Q коэффициент включения p, резонансное сопротивление $R_{эр}$, эквивалентную добротность $Q_э$, полосу пропускания $П_{0,7}$ и значение напряжения на контуре на частотах $f_{рт}$ и $f_{рн}$. Параметры элементов цепи (рис. 2.I5): L =220 мкГн, C_1 =48 пФ, C_2 = = 320 пФ, R =I6 Ом, R_i =I00 кОм, E =24 В.

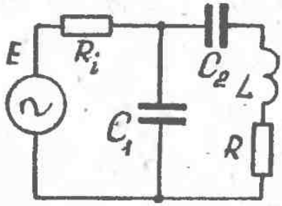


Рис. 2.I5

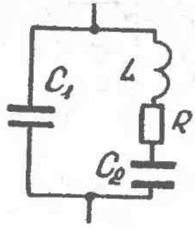


Рис. 2.I6

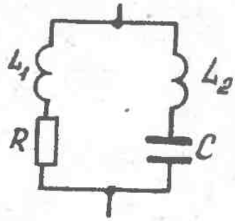


Рис. 2.I7

2.I2. Задан параллельный контур Ш-го вида - рис. 2.I6. Найти C_I и C_2, если $R_{эр}$ = I0^4 Ом, L =I50 мкГн, $C = C_1C_2/(C_1+C_2)$=500пФ, R =I0 Ом.

2.I3. Задан параллельный контур П-го вида - рис. 2.I7. Дано: $L = L_1 + L_2$ = I50 мкГн, C =600 пФ, R =I0 Ом. Определить, как распределить индуктивность по ветвям, чтобы $R_{эр}$ =I0 кОм.

2.I4. Определить вид и нарисовать схему сложного параллельного контура, найти его сопротивление потерь R, если на частотах f_1 =I7 МГц и f_2 =5I МГц входное сопротивление контура $Z_{вх}$ достигает соответственно своего максимального и минимального значений, причем $Z_{вх\,макс}$ =20 кОм, а на частоте f_1 добротность контура Q =40.

2.I5. Рассчитать параметры сложного параллельного контура, который на частоте I0^7 $\frac{рад}{сек}$ должен обладать активным сопротивлением I0 кОм, а на частоте 2 · I0^7 $\frac{рад}{сек}$ - активным сопротивлением I0 Ом. Полное сопротивление потерь контура 20 Ом.

2.I6. Определить резонансные частоты, характеристическое сопротивление, добротность и сопротивление на частоте параллельного резонанса сложного параллельного контура - рис. 2.I8, если R_1 =I2 Ом, L_1 =220 мкГн, C_1 =270 пФ, R_2 =9,6 Ом, L_2 = =640 мкГн, C_2 =4I0 пФ.

2.I7. Через неразветвленную часть простого параллельного контура с параметрами L =20 мкГн, C =200 пФ, R =I0 Ом, проходит ток

$$i(t) = \mathcal{I}_0(1 + m\cos\Omega t)\cdot\cos\omega_p t,\ A.$$

Амплитуда несущей $\mathcal{I}_0$ =I0 А, глубина модуляции m =30%, частота модуляции F =500 Гц. Контур настроен на частоту ω_p. Найти напряжение на контуре $U(t)$. Нарисовать спектры тока и напряжения.

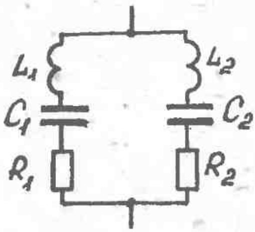


Рис. 2.I8

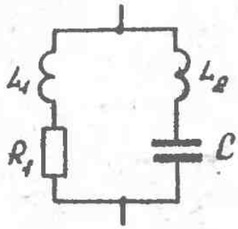


Рис. 2.I9

2.I8. Колебательный контур (рис. 2.I9) имеет частоту $25\,МГц$ параллельного резонанса. При этом правая ветвь контура настроена на вдвое большую частоту (частота последовательного резонанса) Определить параметры контура, если R_1 =I0 Ом, а эквивалентное сопротивление I8 кОм.

2.I9. В коллекторный контур УВЧ (рис. 2.20) включены разделительные конденсаторы C_I и C_2. Емкость конденсатора настройки $C_{мин}$ = 30 пФ, $C_{макс}$ = 300 пФ. Емкости $C_I = C_2$ = 20.000 пФ. Убедиться, что разделительные конденсаторы не влияют на настройку контура.

2.20. Параллельный колебательный контур с параметрами L = = I0 мкГн, С = I00 пФ, R = 5 Ом включается в качестве нагрузки УВЧ - рис. 2.2Iа. Внутреннее сопротивление транзистора R_i на рабочей частоте шунтирует контур - рис. 2.2Iб. Определить величину R_i, при которой добротность контура снижается не более, чем на I0%.

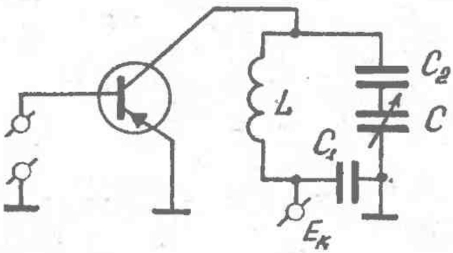


Рис. 2.20

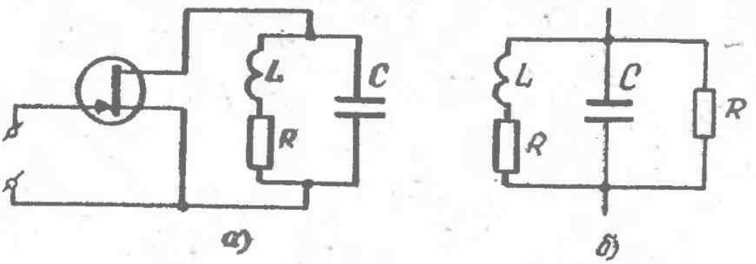


Рис. 2.2I

2.2I. Определить, в какие кривые выродяться кривые активной $R_э$ и реактивной $X_э$ составляющих входного сопротивления контура I-го вида (рис. 2.3) в случае, когда $R_1 + R_2 \to 0$.

2.22. Заменить схему контура I-го вида (рис. 2.3) на резонансной частоте эквивалентной схемой, представляющей собой параллельное соединение контура без потерь и активного сопротивления R - рис. 2.22. Определить сопротивление R .

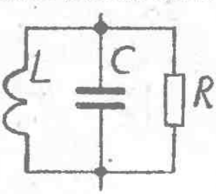


Рис. 2.22

РАЗДЕЛ 3. СВЯЗАННЫЕ КОНТУРА

3.I. Амплитудно-частотная характеристика индуктивно связанных контуров.

На практике наиболее часто применяется система связанных колебательных контуров с индуктивной или трансформаторной связью – рис. 3.I. Степень связи между контурами определяется коэффици-

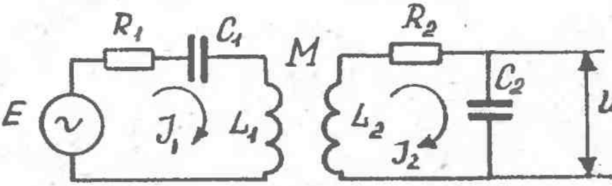


Рис. 3.I

ентом связи $K = M/\sqrt{L_1 L_2}$, $(0 < K < 1)$, где M – коэффициент взаимоиндукции. В радиотехнике используются связанные контура, в которых $K \approx 0{,}0I \div 0{,}05$.

В общем случае два связанных контура имеют разные параметры L, C, R и настроены на разные, хотя и достаточно близкие частоты. Положим, что параметры контуров одинаковы, т.е. $C_1 = C_2 = C$, $R_1 = R_2 = R$, $L_1 = L_2 = L$. Запишем уравнения системы двух индуктивно связанных контуров в комплексной форме

$$\left.\begin{aligned} \dot{Z}(\omega)\dot{\mathcal{J}}_1(\omega) - j\omega M\dot{\mathcal{J}}_2(\omega) &= \dot{E}(\omega), \\ -j\omega M\dot{\mathcal{J}}_1(\omega) + \dot{Z}(\omega)\dot{\mathcal{J}}_2(\omega) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3.I)$$

где $\dot{Z}(\omega) = j\omega L + R + 1/j\omega C$. Определив из (3.I) ток $\dot{\mathcal{J}}_2(\omega) = j\omega M\dot{E}/(\omega^2 M^2 + \dot{Z}^2)$, находим напряжение на емкости $\dot{U}(\omega) = \dot{\mathcal{J}}_2/j\omega C = \dot{E}(\omega)M/C(\omega^2 M^2 + \dot{Z}^2)$. Определяем коэффициент передачи по напряжению

$$\dot{K}_V = \frac{\dot{U}(\omega)}{\dot{E}(\omega)} = \frac{M}{C}\cdot\frac{1}{(\omega^2 M^2 + \dot{Z}^2)} = \frac{M}{C}\cdot\frac{1}{\omega^2 M^2 + R^2 - \omega^2 L^2(1-\omega_0^2/\omega^2)^2 + 2Rj\omega L(1-\omega_0^2/\omega^2)}, \qquad (3.2)$$

где $\omega_o^2 = 1/LC$ – резонансная частота каждого из контуров. Рассмотрим поведение $|K_v|$ вблизи частоты ω_o, положив $\omega L \approx \omega_o L = \rho$, где ρ – характеристическое сопротивление каждого из контуров. Запишем выражение $(1-\omega_o^2/\omega^2)$ в виде

$$1-\frac{\omega_o^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2-\omega_o^2}{\omega^2} = \frac{(\omega-\omega_o)(\omega+\omega_o)}{\omega^2} \approx -\frac{2\Delta\omega}{\omega_o} = -\mathcal{E},$$

где $\Delta\omega = \omega_o - \omega$ – небольшая абсолютная расстройка частоты ω генератора относительно резонансной частоты ω_o, $\Delta\omega \ll \omega_o,\ \omega$; $\mathcal{E} = 2\Delta\omega/\omega_o \ll 1$ – относительная расстройка. Тогда запишем выражение (3.2) в виде $K_v(\omega) = |K_v(\omega)|e^{-j\varphi}$, где

$$|K_v(\omega)| = A = \frac{K}{\sqrt{(d^2+K^2)^2+2(d^2-K^2)\mathcal{E}^2+\mathcal{E}^4}} - \qquad (3.3)$$

– модуль коэффициента передачи, выражающий АЧХ системы индуктивно связанных контуров;

$$\varphi = arctg\frac{2\mathcal{E}/d}{(K/d)^2+1-(\mathcal{E}/d)^2} - \qquad (3.4)$$

– ФЧХ системы связанных контуров, характеризующая сдвиг фазы между напряжением генератора и напряжением на емкости выходного (второго) контура; $d = 1/Q$ – затухание, $Q = \omega_o L/R$ – добротность каждого из индуктивно связанных контуров, $K = M/\sqrt{L_1 L_2} = M/L$ – коэффициент связи. Найдем частоту, т.е. значение $\mathcal{E}$, при которой $|K_v|$ имеет максимум. Вычислив производную $dA/d\mathcal{E}$ и приравняв ее нулю, получим два уравнения для определения положения 3-х экстремальных точек

$$\mathcal{E} = 0, \qquad d^2-K^2+\mathcal{E}^2 = 0.$$

Пусть $K > d$. Экстремальная точка при $\mathcal{E} = 0$ есть точка минимума, а уравнение $d^2-K^2+\mathcal{E}^2=0$ определяет положение двух максимумов. Решив уравнение, получим

$$\mathcal{E} = \pm\sqrt{K^2-d^2} \quad \text{или } \omega = \frac{\omega_o}{\sqrt{1\pm\sqrt{K^2-d^2}}}. \qquad (3.5$$

Таким образом, имеется две частоты

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\sqrt{K^2-d^2}}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\sqrt{K^2-d^2}}} \qquad (3.6)$$

причем ω_1 ниже, а ω_2 - выше частоты ω_0. Частоты ω_1 и ω_2 зависят от коэффициента связи K и называются частотами связи. Разница между ω_1 и ω_2 тем больше, чем больше K.

Пусть $K = d$. Связь, соответствующая значению $K = d$, называется критической. При этом $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$

При $K < d$ формула (3.5) несправедлива. Исследование показывает, что при $K < d$ имеется один максимум на частоте ω_0. Действительно, при $K < d$, как видно из выражения (3.3), все коэффициенты в знаменателе при $\mathcal{E}$ положительны, следовательно, при любом $\mathcal{E}$ значение $|K_v|$ меньше максимального значения $K_0 = K/(d^2+K^2)$, которое имеет место при $\mathcal{E} = 0$, т.е. при $\omega = \omega_0$.

На рис. 3.2 показаны частотные характеристики системы индуктивно связанных контуров, построенные по формуле

$$\frac{|K_v|}{|K_{v\,макс}|} = \frac{|A|}{|A_{макс}|} = \frac{2K/d}{\sqrt{[1+(K/d)^2]^2+2[1-(K/d)^2]\cdot(\mathcal{E}/d)^2+(\mathcal{E}/d)^4}}, \qquad (3.7)$$

в которой значение $|K_{v\,макс}| = |A_{макс}| = \frac{1}{2d}$ получено подстановкой в выражение (3.3) значения $\mathcal{E}^2 = K^2 - d^2$, соответствующее частотам связи. Кривая при $K/d = 1$ отличается от резонансной кривой одиночного контура (пунктирная кривая на рис. 3.2) тем, что имеет более плоскую вершину и более крутые скаты; такая кривая представляет некоторое приближение к идеальной прямоугольной характеристике.

3.2. Полоса пропускания индуктивно связанных контуров

Как и в случае одиночного контура, полоса пропускания системы индуктивно связанных контуров определяется как ширина частотной характеристики на уровне $1/\sqrt{2} = 0{,}7$ от максимальной ординаты $A_{макс}$. Но в случае связанных контуров полоса пропускания зависит не только от затухания d, но и от коэффициента связи K. При увеличении K разнос частот связи возрастает, полоса пропускания расширяется, но при этом углубляется провал

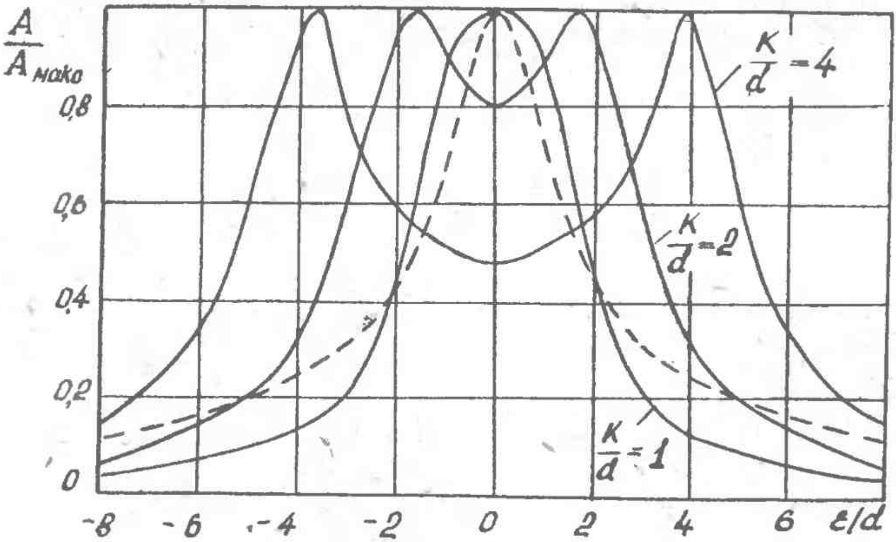


Рис. 3.2

характеристики на частоте ω_0. Поэтому в качестве дополнительного условия, позволяющего найти однозначное решение задачи, потребуем, чтобы и минимум характеристики лежал на высоте $1/\sqrt{2}$ от $A_{макс}$ - рис.3.3 Составим два уравнения для случая $K > d$ (сильная связь между контурами)

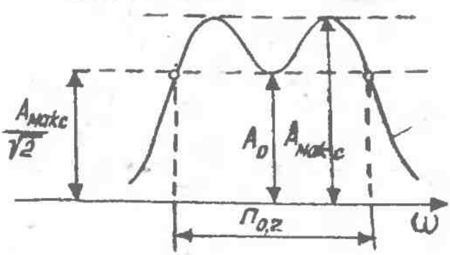


Рис. 3.3.

$$\frac{A}{A_{макс}} = \frac{2K/d}{\sqrt{[1+(K/d)^2]^2+2[1-(K/d)^2](\varepsilon/d)^2+(\varepsilon/d)^4}} = 1/\sqrt{2}, \qquad (3.8)$$

$$\frac{A_0}{A_{макс}} = \frac{2K/d}{1+(K/d)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (3.9)$$

Из (3.9) находим $(\kappa/d) = 1+\sqrt{2} \simeq 2{,}41$. Подставив это значение в (3.8), получим после решения этого уравнения

$$|\varepsilon| = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Pi_{0,7}}{\omega_0} = 2\sqrt{1+\sqrt{2}}\cdot d \simeq 3{,}1\,\frac{1}{Q},$$

откуда
$$\Pi_{0,7} = 3{,}1\,\frac{\omega_0}{Q}, \quad (\kappa > d). \qquad (3.10)$$

При $\kappa < d$ (слабая связь между контурами) уравнение для определения полосы пропускания имеет вид

$$\frac{A}{A_0} = \frac{d^2+\kappa^2}{\sqrt{(d^2+\kappa^2)^2+2(d^2-\kappa^2)\varepsilon^2+\varepsilon^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решив последнее уравнение, получим

$$\varepsilon = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = d\sqrt{\left(\frac{\kappa}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2[1+(\kappa/d)^4]}} \quad \text{или}$$

$$\Pi_{0,7} = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{\left(\frac{\kappa}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2[1+(\kappa/d)^4]}}\,. \qquad (3.11)$$

В частности, при критической связи $(\kappa = d)$, как следует из (3.11), полоса пропускания

$$\Pi_{0,7} = \frac{\sqrt{2}\,\omega_0}{Q}, \qquad (\kappa = d). \qquad (3.12)$$

3.3. Задачи

3.1. Резонансные частоты двух индуктивно связанных контуров (рис. 3.4) соответственно равны f_1 =8 МГц, f_2 =10 МГц, а их емкости 50 и 80 пФ. При какой взаимной индуктивности M можно получить коэффициент связи κ =0,05 ?

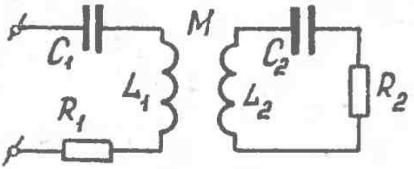


Рис. 3.4

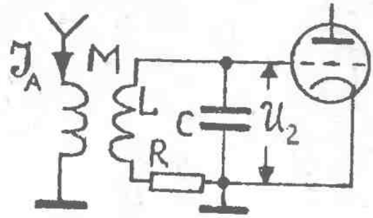


Рис. 3.5

3.2. Приемная антенна индуктивно связана с настроенным в резонанс контуром, у которого C =300 пФ, R =8 Ом - рис. 3.5. Определить напряжение U_2 на сетке лампы, если ток в антенне J_A = = 0,I7 мкА, коэффициент взаимоиндукции M =20 мкГн.

3.3. Найти резонансную частоту контура I (рис. 3.6), индуктивно связанного с апериодическим контуром П. Определить пределы изменения настройки контура I при помощи контура П, если L_1 =40мкГн, C_I =250 пФ, L_2 = 5 мкГн, $M_{мин}$ = 0, $M_{макс}$ = 4 мкГн.

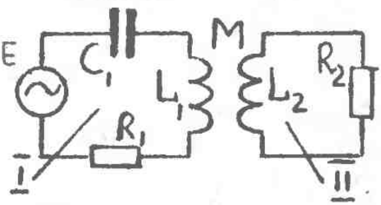


Рис. 3.6

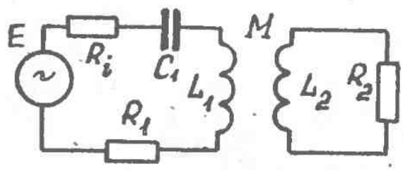


Рис. 3.7

3.4. Генератор имеет внутреннее сопротивление R_i =200 Ом и должен быть нагружен на сопротивление нагрузки R_2 =2000 Ом. Для согласования нагрузки с внутренним сопротивлением генератора применена схема, представленная на рис. 3.7. Определить коэффициент связи M между контурами, если R_1 =20 Ом и L_2 = = 800 мкГн. При этом считается, что первый контур настроен в резонанс.

3.5. Даны два одинаковых индуктивно связанных контура, настроенные в отдельности на частоту f_0 = 2 · 10^6 Гц. Определить частоты связи f_1 и f_2 . если известно. что активные сопротивления каждого контура R = 10 Ом, $X_{св} = \omega M$ = 16 Ом, а емкость каждого контура 100 пФ.

3.6. Система двух связанных колебательных контуров (рис. 3.8) имеет следующие параметры: $X_{L1} = X_{C1}$ = 600 Ом, $X_{L2} = X_{C2}$ = = 400 Ом, $R_1' = R_1'' = R_2 = 10$ Ом, $\omega_0 = 10^6$ рад/сек, M = 20 мкГн. Определить сопротивление между точками A и B на частоте ω_0.

3.7. Два одинаковых индуктивно связанных контура, параметры которых $L_1 = L_2$ = 250 мкГн, $R_1 = R_2$ = 10 Ом, настроены отдельно на одну и ту же частоту $f_0 = 5 \cdot 10^5$ Гц. Определить: полосу пропускания каждого контура; полосу пропускания индуктивно связанных контуров при критической связи; максимальную полосу пропускания двух связанных контуров; при каких коэффициентах связи полоса пропускания двух связанных контуров будет: а) в $\sqrt{2}$ меньше, б) в 1,2 раза больше, в) в 2 раза больше по сравнению с полосой пропускания одиночного контура.

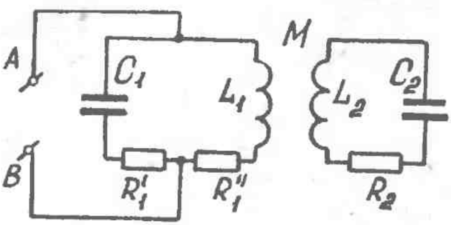


Рис. 3.8

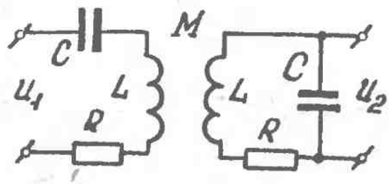


Рис. 3.9

3.8. Полосовой фильтр состоит из двух одинаковых контуров, связанных индуктивно - рис. 3.9. Параметры контуров: $L_1 = L_2$ = = 400 мкГн, $C_1 = C_2$ = 100 пФ, $R_1 = R_2$ = 10 Ом. Определить наибольшую полосу пропускания фильтра и коэффициент связи, при котором эта полоса обеспечивается. Найти коэффициент взаимоиндукции M.

3.9. На вход связанной системы, состоящей из двух одинаковых колебательных контуров (рис. 3.9), подается амплитудно-модулированное напряжение $U_1 = U_0(1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t$.

Найти напряжение U_2 на конденсаторе второго контура, считая, что каждый из контуров в отдельности настроен на частоту ω_0 .

ЛИТЕРАТУРА

I. ЗАЕЗДНЫЙ А.М. Сборник задач и упражнений по курсу "Теоретическая радиотехника". М.: Гос. изд-во лит-ры по вопросам связи и радио, 1957.
2. ГОНОРОВСКИЙ И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. Изд-е 2-е. М.: Сов.Радио, 1964.
3. ХАРКЕВИЧ А.А. Основы радиотехники. М.: Гос. изд-во лит-ры по вопросам связи и радио, 1962.
4. ШЕБЕС М.Р., КАБЛУКОВА М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей. Изд-е 4-е. М.: Высш. шк., 1990.

СОДЕРЖАНИЕ