

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ  
НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

---

**ПРОХОЖДЕНИЕ РАДИОСИГНАЛОВ  
ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ**  
Методические указания

Нижний Новгород, 1996

УДК 621.391.828

Прохождение радиосигналов через линейные цепи: Методические указания / Сост. С.М. Ръжаков. - Н.Новгород: ННГУ, 1996. - 36 с.

Методические указания к практическим занятиям разработаны в соответствии с программой курса "Теоретические основы радиотехники" для студентов, обучающихся по специальности 0715 (радиофизика и электроника). Методические указания содержат теоретические сведения:

- по исследованию цепей 1-го порядка методом дифференциальных уравнений,
- по применению преобразования Лапласа для анализа цепей,
- по методу интеграла Дюамеля.

Приведены примеры решения задач и задачи, предлагаемые студентам для самостоятельного решения.

Составитель: С.М. Ръжаков

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,  
1996

## РАЗДЕЛ I.

## Исследование цепей 1-го порядка методом дифференциальных уравнений

## 1.1. Основные теоретические сведения

Основная задача анализа любой радиотехнической цепи<sup>1</sup> - определение токов в ветвях и напряжений на элементах цепи при заданных ЭДС независимых источников напряжений и токов независимых источников тока. Источники ЭДС и источники тока рассматриваются как сигналы, поступающие на вход цепи. В радиотехнических устройствах на цепи действуют разнообразные сигналы, являющиеся функциями времени: ступенчатые, импульсные, линейно - нарастающие, амплитудно - модулированные и многие другие. Здесь рассматриваются линейные инвариантные (стационарные) во времени цепи. Для исследования процессов в таких цепях используются: метод комплексных амплитуд, спектральный метод, метод дифференциальных уравнений, преобразование Лапласа, метод интеграла Дюамеля, метод медленно меняющихся амплитуд и др.

Излагаемый в разделе I классический метод основан на составлении дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений), которому должны удовлетворять напряжения или токи в цепи, рассматриваемые как неизвестные функции времени. Рассматриваются линейные цепи, описываемые линейными дифференциальными уравнениями первого порядка, поэтому их называют цепями первого порядка.

Цепи (или схемы) являются совокупностью взаимно соединенных элементов. Слово "цепь" может характеризовать как реальную структуру, которую создают в лаборатории из резисторов, конденсаторов, катушек индуктивности, транзисторов, соединенных с помощью проводов, так и идеализированную модель, создаваемую на основе абстракций. Будем обсуждать цепи в этом последнем смысле, хотя не следует забывать, что модели цепей интересны лишь как средство для понимания и разработки реальных систем.

Математическая модель цепи есть система уравнений, связывающих токи и напряжения независимых источников (источников сигналов) с токами и напряжениями на элементах цепи. При составлении уравнений

<sup>1</sup> Для краткости радиотехническую цепь будем называть далее просто цепью

цепи необходимо воспользоваться связью тока и напряжения на элементах схемы или, как говорят, математическими моделями элементов схемы.

Согласно закону Ома значение напряжения  $U_R$  на активном сопротивлении  $R$  связано с протекающим через него током соотношением  $U_R = I \cdot R$ . Согласно закону электромагнитной индукции напряжение  $U_L$  на индуктивности  $L$  связано с током  $i_L$  соотношением

$$U_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (1.1)$$

откуда  $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t U_L dt$ . Нижний предел интеграла принят равным  $-\infty$ , т.е. до рассматриваемого момента времени  $t$  процесс мог длиться сколь угодно долго. При  $t=0$  ток в индуктивности (начальный ток) равен  $i_L(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 U_L dt$ , следовательно,

$$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t U_L dt \quad (1.2)$$

Заряд  $q$  на емкости  $C$  пропорционален напряжению  $q = CU_C$ . Ток через емкость

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt} \quad (1.3)$$

откуда  $U_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$ . Здесь, как и для индуктивности, предполагается, что до рассматриваемого момента времени  $t$  процесс мог длиться сколь угодно долго. При  $t=0$  напряжение на емкости (начальное напряжение) равно  $U_C(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt$ , следовательно,

$$U_C = U_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt \quad (1.4)$$

Индуктивность и емкость являются энергоемкими элементами цепи. Энергия магнитного поля, запасенная в индуктивности,  $W_m = L i_L^2 / 2$ . Так как энергия магнитного поля мгновенно (скачком) не может изменить свою величину от одного значения до другого конечного значения, если только источник не способен развивать бесконечной мощности  $p = W_m / dt = \infty$ , то и ток  $i_L$  в индуктивности скачком измениться не может, т.е.  $di_L / dt \neq \infty$ . Электрическая энергия, запасенная в емкости и равная  $W_e = CU_e^2 / 2$ , также не может измениться скачком, поэтому и напряжение на емкости  $U_C$  скачком не меняется, т.е.  $dU_C / dt \neq \infty$ . Таким образом, при конечных по величине воздействиях напряжение на емкости и ток в индуктивности являются непрерывными функциями времени, т.е. в любой момент времени  $t_0$  имеем

$$\begin{aligned} U_C(t_0+0) &= U_C(t_0-0), \\ i_L(t_0+0) &= i_L(t_0-0), \end{aligned} \quad (1.5)$$

Условия (1.5) часто называют законами коммутации.

Цепи 1-го порядка описываются линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = a \cdot x(t) + b x_{вн}(t), \quad (1.6)$$

где  $x(t)$  - ток в индуктивности (для RL - цепи) или напряжение на емкости (RC - цепь),  $X_{вн}(t)$  - входной сигнал, коэффициенты  $a$  и  $b$  определяются величинами резисторов, емкостей и индуктивностей. При заданном начальном условии  $X(t_0)$  - решение уравнения (1.6) имеет вид

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0) + e^{at} \int_{t_0}^t e^{-a\xi} b x_{вн}(\xi) d\xi. \quad (1.7)$$

Первое слагаемое в (1.7) - решение однородного уравнения  $\dot{x} = a \cdot x$ ; второе слагаемое - частное решение уравнения (1.6) при заданном внешнем воздействии. При исследовании линейных цепей 1-го порядка методом дифференциальных уравнений необходимо составить дифференциальное уравнение цепи (1.6), используя законы Кирхгофа, а затем определить решение по формуле (1.7).

## 1.2 Примеры решения задач

**Задача 1.** На вход RC - цепи (рис.1.1) в момент  $t=0$  подается прямоугольный импульс с амплитудой  $E$  и длительностью  $\tau$ . Начальное напряжение на емкости равно нулю. Найдите выражения для тока в цепи, напряжения на емкости, резисторе и построьте соответствующие графики. Определите условие, при котором цепь является дифференцирующей, если выходной сигнал снимается с резистора.

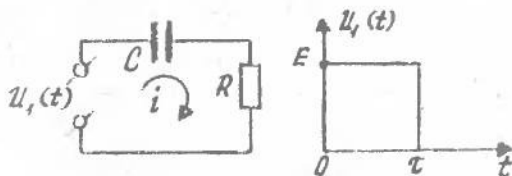


Рис 1.1

## Решение

В соответствии со 2-ым законом Кирхгофа  $U_C + U_R = E$  (при  $0 \leq t \leq \tau$ ).  
 Но  $U_R = iR$ ,  $i = C dU_C / dt$ , поэтому  $U_C + RC dU_C / dt = E$ . Обозначив  $T = RC$  - постоянная времени RC - цепи, записываем последнее уравнение в виде

$$\frac{dU_C(t)}{dt} = -\frac{1}{T} U_C(t) + \frac{1}{T} \cdot E, \quad (0 \leq t \leq \tau). \quad (1.8)$$

Чтобы получить решение уравнения (1.8), полагаем в общем решении  
 (1.7)  $x(t) = U_C(t)$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\alpha = -1/T$ ,  $\beta = 1/T$ ,  $x_{\text{пр}}(\xi) = E$ .  
 Тогда

$$U_C(t) = E(1 - e^{-t/T}), \quad (0 \leq t \leq \tau). \quad (1.9)$$

Находим ток, протекающий в цепи

$$i = i_C = i_R = C \frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/T}$$

Падение напряжения на резисторе  $U_R = iR = E \cdot e^{-t/T}$ .

При  $t = 0$   $i(t=0) = E/R$ , а  $U_R(t=0) = E$ , т.е. в момент  $t = 0$  конденсатор как бы отсутствует (закорочен).

При  $t > \tau$  когда  $U_C = 0$ , имеем  $\frac{dU_C(t)}{dt} = -\frac{1}{T} U_C(t)$ ,  
 откуда,

$$U_{C0} \int_{U_{C0}}^{U_C(t)} \frac{dU_C(t)}{U_C(t)} = -\frac{1}{T} \int_{\tau}^t dt,$$

где  $U_{C0}$  - напряжение на емкости в момент  $t = \tau$ . Выполнив интегрирование, получим

$$U_C(t) = U_{C0} e^{-(t-\tau)/T}, \quad (t > \tau).$$

Определив из (1.9)  $U_{C0} = E(1 - e^{-\tau/T})$ , получим

$$U_C(t) = E(1 - e^{-\tau/T}) e^{-(t-\tau)/T}.$$

Ток и напряжение на резисторе при  $t > \tau$

$$i(t) = i_C(t) = i_R(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt} = -\frac{E}{R} (1 - e^{-\tau/T}) e^{-(t-\tau)/T},$$

$$U_R(t) = R \cdot i(t) = -E(1 - e^{-\tau/T}) e^{-(t-\tau)/T}.$$

На рис.1.2 (а,б,в) представлены графики, построенные по соответствующим выражениям. Как видно из рис 1.2а, напряжение на емкости изменяется плавно, т.е. закон коммутации (1.5) выполняется, а ток

$i$  при  $t=\tau$  претерпевает скачок - рис. 1.2б. Чтобы определить величину скачка тока, рассмотрим разность

где  $i(\tau_-) = \frac{E}{R} e^{-\tau/\tau}$  - значение функции  $i(t)$  при приближении к моменту  $t=\tau$  слева (со стороны отрицательных значений  $t$ ), а  $i(\tau_+) = \frac{-E}{R}(1 - e^{-\tau/\tau})$  - значение функции  $i(t)$  при приближении к моменту  $t=\tau$  справа (со стороны положительных значений  $t$ ). Находим разность  $i(\tau_-) - i(\tau_+) = E/R$  - величина скачка тока. Можно показать, что величина скачка напряжения на резисторе (рис. 1.2в) равна  $E$ .

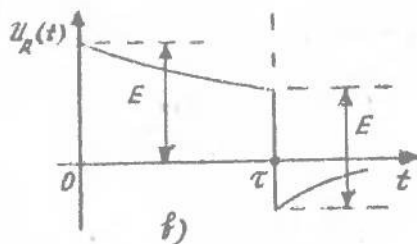
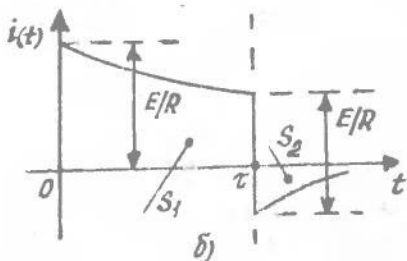
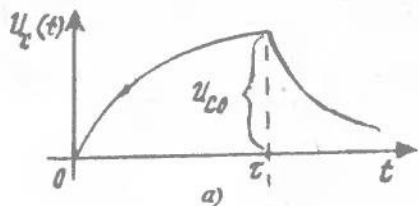


Рис. 1.2

Рассматриваемая RC - цепь может выполнять функцию дифференцирования входного сигнала. Для этого постоянная времени цепи

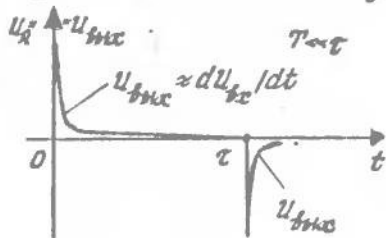
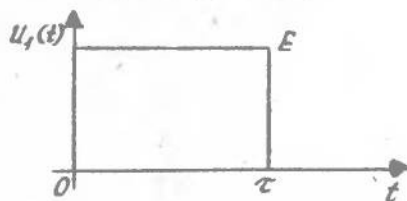


Рис. 1.3

Если подсчитать площади фигур  $S_1$  и  $S_2$  под кривой тока (рис.1.2б), то можно убедиться, что  $S_1 = S_2$ . Это означает, что среднее значение тока, протекающего через емкость, равно нулю, т.е. конденсатор не пропускает постоянную составляющую тока.

$\Gamma = RC$  должна быть много меньше длительности входного импульса, т.е.  $T \ll \tau$ ; при этом форма напряжения на резисторе имеет вид, представленный на рис. 1.3. Таким образом, чтобы цепь выполняла функцию дифференцирования входного сигнала, необходимо: выходной сигнал снимать с резистора, обеспечив выполнение неравенства  $T \ll \tau$ .

**Задача 2.** На вход RC - цепи (рис.1.1) в момент времени  $t=0$  подается сигнал  $U_1(t)=E \cdot I(t)$ -рис.1.4<sup>2</sup>. Начальное напряжение на емкости  $U_C(0)=U_0$ . Определить напряжение на емкости и построить график  $U_C(t)$ .

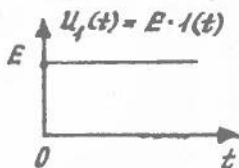


Рис 1.4

**Решение**  
Процессы в цепи при  $t \geq 0$  описываются уравнением

$$\frac{dU_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}U_C(t) + \frac{1}{RC}E, \quad (t \geq 0).$$

Подставив в (1.7)  $t_0=0$ ,  $X(t)=U_C(t)$ ,  $X(t_0)=U_0$ ,

$$\alpha = -\frac{1}{RC}, \quad \beta = \frac{1}{RC}, \quad X_{\text{вн}}(\xi) = E,$$

получим 
$$U_C(t) = U_0 e^{-t/RC} + E(1 - e^{-t/RC}) = E - (E - U_0)e^{-t/T},$$

где  $T=RC$ .

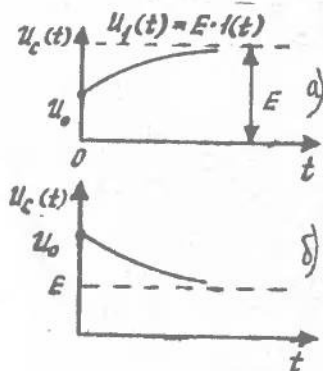


Рис.1.5

Графики напряжения на емкости представлены на рис. 1.5а,б. При  $E > U_0$  происходит подзаряд емкости - рис.1.5а, а при  $E < U_0$  - разряд емкости до напряжения  $E$  -рис.1.5б. В обоих случаях происходит переходный процесс, когда напряжение на емкости от значения  $U_C(0)=U_0$  изменяется до установившегося значения  $E$ .

<sup>2</sup> Сигнал  $I(t)$  называют функцией включения или функцией Хэвсисайда.



Задача 3. На входе RC - цепи (рис.1.1) в момент времени  $t=0$  начинает действовать сигнал  $U_1(t) = E \cos \omega_0 t$ . Начальное напряжение на емкости равно нулю. Найти ток в цепи, напряжения на емкости и резисторе. Построить график  $U_C(t)$ .

Решение

Дифференциальное уравнение цепи имеет вид

$$\frac{dU_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}U_C(t) + \frac{E}{RC} \cos \omega_0 t, \quad t \geq 0.$$

Подставив в (1.7)  $t_0=0$ ,  $x(t_0)=0$ ,  $x(t) = U_C(t)$ ,

$$\alpha = -1/RC, \quad \beta = 1/RC, \quad x_{\text{пр}}(\xi) = E \cos \omega_0 \xi,$$

получаем

$$U_C(t) = e^{-t/RC} \int_0^t e^{\xi/RC} \cdot \frac{1}{RC} E \cos \omega_0 \xi d\xi = \frac{E}{RC} e^{-t/RC} \int_0^t \cos \omega_0 \xi e^{\xi/RC} d\xi.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой Эйлера.

$$\cos \omega_0 \xi = (e^{j\omega_0 \xi} + e^{-j\omega_0 \xi})/2.$$

Опустив промежуточные выкладки, получим  $U_C(t) =$

$$= \frac{E}{RC} e^{-t/RC} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega_0^2} \cdot \left[ e^{t/RC} (\omega_0 \sin \omega_0 t + \frac{1}{RC} \cos \omega_0 t) - \frac{1}{RC} \right].$$

Обозначив  $T=RC$ -постоянная времени цепи,  $\omega_0 T = \operatorname{tg} \varphi$ ,

$$\cos \varphi = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = 1/\sqrt{1 + (\omega_0 T)^2},$$

занимем последнее соотношение в виде

$$U_C(t) = -\frac{E}{1 + (\omega_0 T)^2} e^{-t/T} + \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega_0 T)^2}} \cos(\omega_0 t - \varphi). \quad (1.10)$$

Определяем ток  $i(t)$  в цепи  $i(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt} =$

$$= \frac{E}{R[1 + (\omega_0 T)^2]} e^{-t/T} - \frac{E \omega_0 C}{\sqrt{1 + (\omega_0 T)^2}} \sin(\omega_0 t - \varphi) \quad (1.11)$$

и напряжение на резисторе

$$U_R(t) = i(t)R = \frac{E e^{-t/T}}{1 + (\omega_0 T)^2} - \frac{E \omega_0 T}{\sqrt{1 + (\omega_0 T)^2}} \sin(\omega_0 t - \varphi). \quad (1.12)$$

Первые слагаемые в выражениях (1.10)-(1.12) характеризуют переходный процесс и неограниченно убывают во времени. С некоторого момента времени напряжения  $U_C(t)$ ,  $U_R(t)$  и ток  $i(t)$  можно положить равными

$$U_{Cy}(t) = \frac{E}{\sqrt{1+(\omega_0 T)^2}} \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad (1.13)$$

$$i_y(t) = - \frac{E \omega_0 C}{\sqrt{1+(\omega_0 T)^2}} \sin(\omega_0 t - \varphi),$$

$$U_{Ry}(t) = - \frac{E \omega_0 T}{\sqrt{1+(\omega_0 T)^2}} \sin(\omega_0 t - \varphi)$$

и называть их откликом системы в установившемся режиме. Величины  $U_{Cy}(t)$ ,  $i_y(t)$ , и  $U_{Ry}(t)$  изменяются по гармоническому закону, как и внешнее воздействие  $U_1(t)$ . Зависимость  $U_C(t)$  показана на рис. 1.6

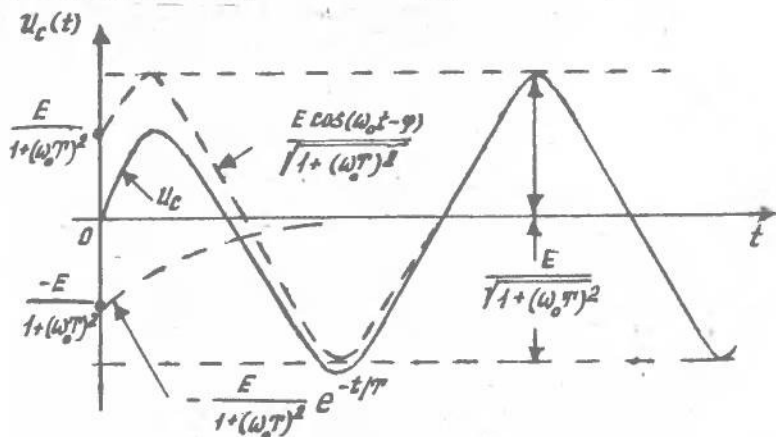


Рис.1.6

Пунктирными кривыми показаны первое и второе слагаемые выражения (1.10), а сплошной линией - результирующая зависимость  $U_C(t)$ .

### 1.3 Задачи для самостоятельного решения

1.1 Определите путем интегрирования площади фигур под кривой тока на рис. 1.26 и покажите справедливость равенства  $S_1 = S_2$ .

1.2 Используя метод комплексных амплитуд, покажите справедливость соотношений (1.13)

1.3 На входе RL - цепи - рис.1.7 - при  $0 \leq t \leq \tau$  действует прямоугольный импульс с амплитудой  $E$ . Начальный ток в индуктивности равен нулю. Определить ток в цепи, напряжение на индуктивности и резисторе, построить соответствующие графики.

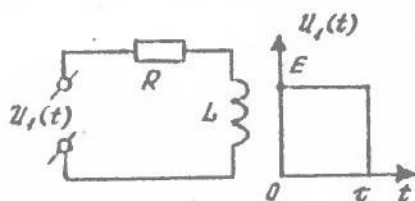


Рис.1.7

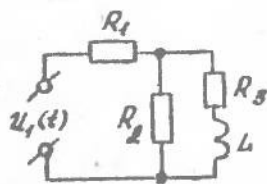


Рис.1.8

1.4 Напряжение прямоугольной формы  $U_1(t)$  с амплитудой 2,7В и длительностью  $\tau = 2\text{мкс}$  действует на входе цепи - рис.1.8. Начального запаса энергии в цепи нет. Найти напряжение на индуктивности и определить величину его мгновенного значения в моменты времени  $t_1 = 2\text{мкс}$  и  $t_2 = 4\text{мкс}$ , если  $R_1 = R_2 = R_3 = 1\text{ Ом}$ ,  $L = 3\text{ мкГн}$ .

1.5 Определить ток  $i(t)$  в цепи на рис.1.9, если известно, что  $U_1 = 6 \cdot 10^{-3}\text{ В}$ ,  $t = 0$ ,  $i(0) = 1\text{ мА}$  - начальный ток в индуктивности,  $R_1 = 6\text{ кОм}$ ,  $R_2 = 3\text{ кОм}$ ,  $L = 1\text{ Гн}$ . Построить график  $i(t)$ .

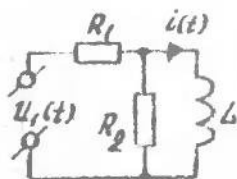


Рис.1.9

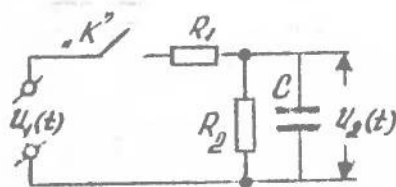


Рис.1.10

1.6 На вход цепи на рис. 1.9 в момент  $t=0$  подается сигнал  $U_1(t) = E \cdot I(t)$ . Определить переходную характеристику цепи  $h(t)$ , если выходной сигнал снимается с резистора  $R_2$ . Начальные условия нулевые.

1.7 В схеме (рис.1.10) в момент  $t=0$  ключ "К" замыкается и на вход подается напряжение  $U_1(t) = U \sin(\omega t + \varphi)$ . Найти напряжение  $U_2(t)$  и построить его график. Определить условие, при котором в схеме отсутствуют переходные процессы.

1.8 На входе цепи (рис.1.11), начиная с момента  $t=0$ , действует сигнал  $U_1(t) = U(1 - e^{-kt})$ , где  $k > 0$ . Определить напряжение  $U_2(t)$  и построить его график при  $k \gg 1/(R_1 + R_2) \cdot C$ . Начальное напряжение на емкости равно нулю.

1.9 На входе цепи (рис.1.12) действует сигнал  $U_1(t) = U \cdot 1(t)$ . Начальное напряжение на емкости  $C_2$  равно  $U_0$ , а начальное напряжение на емкости  $C_1$  равно 0. Найти напряжение  $U_2(t)$  и построить его график, если  $C_1 = C_2 = 0,1$  мкФ,  $R = 1$  Ом,  $U = 10$  В.

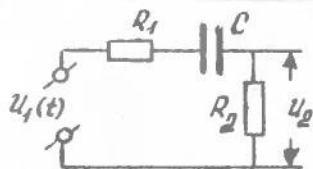


Рис. 1.11

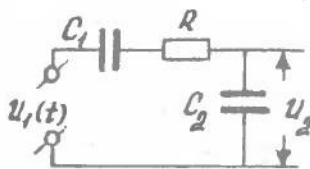


Рис. 1.12

1.10 На вход цепи (рис.1.13) подается напряжение  $U_1(t) = k \cdot t$  ( $k > 0$ ). Определить  $i(t)$ ,  $U_C(t)$ ,  $U_2(t)$  и построить графики этих зависимостей.

1.11 В схеме на рис.1.14 начальное напряжение на емкости равно  $U_0$ . В момент  $t = 0$  ключ "К" замыкается. Определить токи  $i_L(t)$  и  $i_C(t)$ , напряжения  $U_L(t)$  и  $U_C(t)$ . Вычислить энергию, запасенную в индуктивности и емкости. Построить графики этих зависимостей.

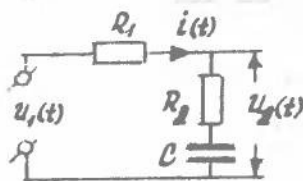


Рис. 1.13

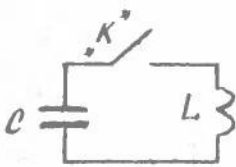


Рис. 1.14

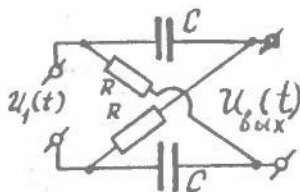


Рис. 1.15

1.12 В схеме на рис. 1.15 в момент времени  $t=0$  начинает действовать ЭДС  $U_1(t) = E \cdot 1(t)$ . Начальные напряжения на емкостях равны нулю. Найти напряжение  $U_{\text{вых}}(t)$  и построить его график.

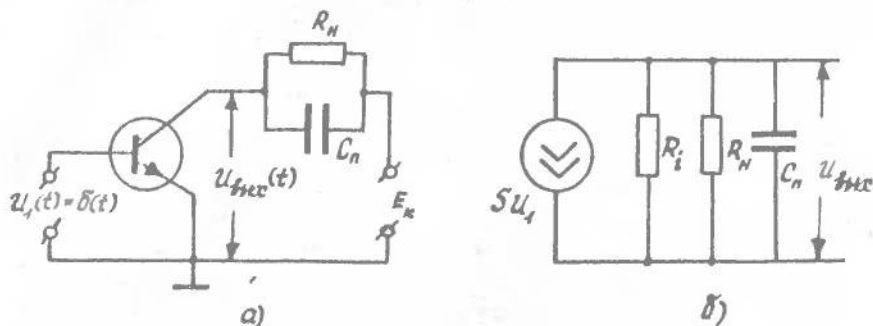


Рис. 1.16

1.13 Вычислить импульсную характеристику  $g(t)$  усилителя с нагрузкой  $R_N$  (рис. 1.16а), заменив его эквивалентной схемой - рис. 1.16б. Дифференциальную крутизну характеристики  $S$  электронного прибора в выбранной рабочей точке, а также внутреннее сопротивление  $R_i$  положите известными.

## РАЗДЕЛ II.

### Преобразование Лапласа и его применение к решению дифференциальных уравнений

#### 2.1 Определение L-преобразования

Рассмотрим, с какой целью применяется преобразование Лапласа. Цель любого преобразования функции - изменение переменной для упрощения решения задачи. Так, если в задачу входит переменное  $x$ , то его выражают через новое переменное, например,  $x = \sin \Theta$ , в надежде, что формулировка и решение задачи с новой переменной  $\Theta$  станут проще. Определив решение для новой переменной  $\Theta$ , применяют обратное преобразование и получают решение исходной задачи.

Одностороннее преобразование Лапласа (сокращенно - L-преобразование) представляет собой оператор, отображающий функцию

времени  $f(t)$  в функцию комплексной переменной  $p = \sigma + j\omega$  в соответствии с формулой

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (2.1)$$

Функцию  $f(t)$  называют оригиналом, а комплексную функцию  $F(p)$  — лапласовым изображением или L-изображением. Интересны значения  $F(p)$  не в какой-то отдельной точке, а в некоторой области комплексной  $p$ -плоскости, поскольку при задании  $F(p)$  в некоторой области  $p$ -плоскости можно однозначно восстановить функцию  $f(t)$  для  $t > 0$ , т.е. преобразование Лапласа обеспечивает взаимно-однозначное соответствие. Именно это свойство взаимной однозначности и обуславливает полезность преобразования Лапласа.

## 2.2 Примеры L-преобразований

а) Функция включения  $f(t) = 1(t)$ ,  $t > 0$ . Изображение этой функции имеет вид

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}. \quad (2.2)$$

б) Единичный импульс Дирака ( $\delta$ -функция), определяемый в виде

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ \infty & \text{при } t = 0, \text{ причем } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \end{cases}$$

Изображение по Лапласу от единичного импульса

$$F_{\delta}(p) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1. \quad (2.3)$$

в) Экспоненциальная функция  $f(t) = e^{-\alpha t}$ ,  $t > 0$ ,  $\alpha > 0$ .

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{-1}{p+\alpha} e^{-(p+\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p+\alpha}. \quad (2.4)$$

г) Запоздавающая функция включения  $f(t) = 1(t-T)$ , где  $t > 0$ ,  $T > 0$  - рис.

2.1. Ее L-изображение

$$F(p) = \int_T^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_T^{\infty} = \frac{1}{p} e^{-pT}. \quad (2.5)$$

д) Гармоническая функция

$$f(t) = \sin \omega_0 t, \quad t > 0.$$

Записав эту функцию в виде

$$f(t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}),$$

находим

$$F(p) = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{(j\omega_0 - p)t} dt = \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(j\omega_0 + p)t} dt = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}.$$

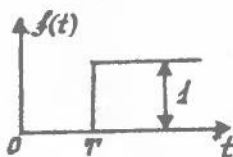


Рис. 2.1

### 2.3 Свойства L-преобразований

#### 1. Теорема задержки (запаздывания):

Пусть  $L[f(t)] = F(p)$ . Тогда для  $T > 0$

$$\mathcal{L}[f(t-T) \cdot 1(t-T)] = F(p) e^{-pT}. \quad (2.7)$$

Рассмотренные выше примеры а) и г) являются иллюстрацией этой теоремы.

#### 2. Теорема линейности.

Пусть  $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(p)$ ,  $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(p)$ , ...,  $\mathcal{L}[f_n(t)] = F_n(p)$ .

Тогда

$$\mathcal{L}\left[\sum_{i=1}^n f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n F_i(p). \quad (2.8)$$

Теоремы линейности и запаздывания полезны тем, что с их помощью можно без интегрирования находить L-преобразования многих функций.

а) Пусть, например,

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \tau, \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

Эту функцию (импульс

- рис. 2.2а) можно представить в виде суммы двух функций (рис. 2.2б,в)  $f(t) =$

$= 1(t) - 1(t-\tau)$ ,  $1 > 0$ ,  $\tau > 0$ , изображения которых известны - формулы (2.2) и

(2.5). Тогда

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\tau}. \quad (2.9)$$

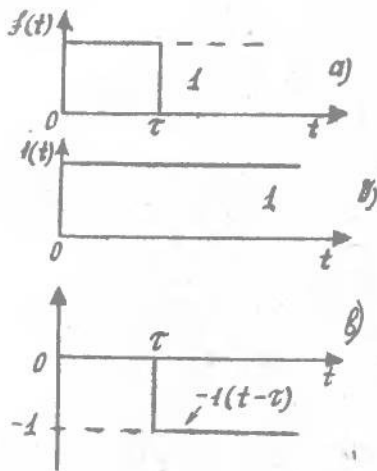


Рис. 2.2

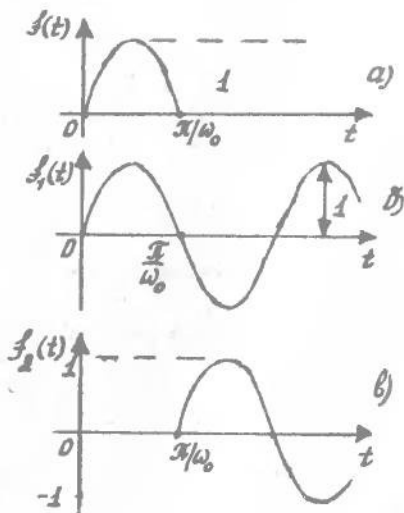


Рис. 2.3

б) Пусть  $f(t)$  - синусоидальный импульс (рис. 2.3), который аналитически запишем в виде

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t, & 0 \leq t \leq \pi/\omega_0, \\ 0 & \text{для } t > \pi/\omega_0. \end{cases}$$

Исходную функцию  $f(t)$  представим в виде суммы двух функций  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ , где  $f_1(t) = \sin \omega_0 t, t \geq 0$  - рис.2.3б, а  $f_2(t) = \sin [\omega_0 (t - \pi/\omega_0)] \cdot 1(t - \pi/\omega_0)$  - рис.2.3в. Тогда, зная  $F_1(p)$  - формула (2.6), находим

$$F(p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} e^{-p\pi/\omega_0} = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} (1 + e^{-p\pi/\omega_0}). \quad (2.10)$$

### 3. Теорема умножения на $t$ .

Пусть  $L[f(t)] = F(p)$ . Тогда

$$L[t f(t)] = - \frac{dF(p)}{dp}. \quad (2.11)$$



Пользуясь этой теоремой, найдем, например, изображение функции  $f(t) = te^{-\alpha t}$ :

$$\mathcal{L} [te^{-\alpha t}] = -\frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{\rho + \alpha} \right) = \frac{1}{(\rho + \alpha)^2}. \quad (2.12)$$

#### 4. Теорема дифференцирования.

Пусть  $\mathcal{L}[f(t)] = F(\rho)$  и  $f(0) = f(t)|_{t=0} \neq 0$ . Тогда

$$\mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = \rho F(\rho) - f(0). \quad (2.13)$$

Повторным применением этой теоремы получим

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = \rho^2 F(\rho) - \rho f(0) - \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0}. \quad (2.14)$$

#### 5. Теорема интегрирования.

Пусть оригинал равен  $\int_0^t f(t) dt$  и  $\mathcal{L}[f(t)] = F(\rho)$ . Тогда

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(t) dt \right] = \frac{1}{\rho} F(\rho). \quad (2.15)$$

### 2.4 Обратное преобразование Лапласа

Анализ систем с помощью L-преобразования требует восстановления функции  $f(t)$  по заданной функции  $F(\rho)$ . Определение оригинала по изображению решается с помощью обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(\rho)] = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(\rho) e^{\rho t} d\rho,$$

где интегрирование ведется вдоль соответствующего контура  $C$  в комплексной плоскости. В нашем случае, когда речь идет об анализе радиотехнических цепей, можно не прибегать к вычислению последнего интеграла и воспользоваться тем, что  $F(\rho)$  является рациональной функцией вида

$$F(\rho) = \frac{V(\rho)}{W(\rho)} = \frac{a_0 \rho^m + a_1 \rho^{m-1} + a_2 \rho^{m-2} + \dots + a_{m-1} \rho + a_m}{b_0 \rho^n + b_1 \rho^{n-1} + b_2 \rho^{n-2} + \dots + b_{n-1} \rho + b_n}, \quad (2.16)$$

где  $V(\rho)$  и  $W(\rho)$  - полиномы степени  $m$ ;  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n$  - положительные действительные числа, имеющие смысл произведений из сопротивлений, емкостей и индуктивностей. В практических задачах всегда

$n \geq m$ , т.е. рациональная функция является правильной дробью: максимальная степень полинома числителя  $m$  меньше или равна максимальной степени  $n$  полинома знаменателя. Идея теперь состоит в том, что любую рациональную функцию можно разложить на элементарные дроби в виде

$$F(p) = \frac{k_1}{p-p_1} + \frac{k_2}{p-p_2} + \dots + \frac{k_n}{p-p_n}, \quad (2.17)$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_n$  - соответствующий набор констант, называемых вычетами<sup>1</sup>, а  $p_i$  - корни уравнения

$$W(p) = 0, \quad (2.18)$$

В то же время  $p_i$  - полюса функции  $F(p)$ . Вычеты  $k_i$  в полюсах определяются по формуле

$$k_i = [F(p)(p-p_i)] / p=p_i, \quad (2.19)$$

или по формуле

$$k_i = \frac{V(p_i)}{dw/dp|_{p=p_i}}. \quad (2.20)$$

Если вычеты  $k_i$  найдены, то оригинал  $f(t)$ , соответствующий изображению (2.17), записывается в виде

$$f(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t}. \quad (2.21)$$

Подставив в (2.21)  $k_i$  из (2.20), получим

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{V(p_i)}{W'(p_i)} e^{p_i t}. \quad (2.22)$$

Эту формулу называют формулой разложения Хэвисайда. Формула (2.22) справедлива для случая, когда уравнение  $W(p) = 0$  не содержит равных (кратных) корней, т.е. когда

$$p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq \dots \neq p_n.$$

<sup>1</sup> Обратите внимание, что нормировка  $F(p)$  в (2.17) осуществляется так, что в знаменателе коэффициент при  $p^n$  равен единице. Невыполнение этого условия является источником ошибок при определении вычетов.

В случаях, когда встречаются кратные корни, нужно прибегать к приемам, при помощи которых можно обойти это затруднение.

Рассмотрим примеры.

а) Пусть  $F(p) = \frac{\rho}{\rho^2 + 2\rho + 2}$ . Требуется найти оригинал от этого

изображения. Находим корни уравнения  $W(p) = p^2 + 2p + 2 = 0$ :  $p_1 = -1 + j$ ,  $p_2 = -1 - j$ . Раскладываем  $F(p)$  на элементарные дроби

$$F(p) = \frac{K_1}{p - p_1} + \frac{K_2}{p - p_2} = \frac{K_1}{p - (-1 + j)} + \frac{K_2}{p - (-1 - j)}.$$

Находим вычеты в полюсах:

$$K_1 = [F(p)(p - p_1)]|_{p=p_1} = (1 + j)/2,$$

$$K_2 = [F(p)(p - p_2)]|_{p=p_2} = (1 - j)/2.$$

Теперь определяем оригинал функции  $F(p)$

$$f(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} = \frac{1 + j}{2} e^{(-1 + j)t} + \frac{1 - j}{2} e^{(-1 - j)t} =$$

$$= \left( \frac{1 + j}{2} e^{jt} + \frac{1 - j}{2} e^{-jt} \right) e^{-t}.$$

Но  $\frac{1 + j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4}$ ,  $\frac{1 - j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4}$ , поэтому

$$f(t) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4} e^{jt} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} e^{-jt} \right) e^{-t} = \sqrt{2} e^{-t} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

б) Пусть  $F(p) = \frac{1 - e^{-(p+\alpha)\tau}}{p + \alpha}$ . Это выражение не является

рациональной функцией. Запишем его в виде

$$F(p) = \frac{1}{p + \alpha} - \frac{e^{-\alpha\tau}}{p + \alpha} e^{-p\tau}.$$

На основании теоремы запаздывания

$$f(t) = e^{-\alpha t} - e^{-\alpha\tau} [e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot 1(t-\tau)] = e^{-\alpha t} - e^{-\alpha\tau} \cdot 1(t-\tau).$$

График функции  $f(t)$  показан на рис. 2.4.

Таким образом, формулу разложения можно применять и для изображений, содержащих экспоненциальные множители вида  $\exp(-pt)$ . В этом случае, как это видно из решения последней задачи, заданное изображение предварительно записывается в виде

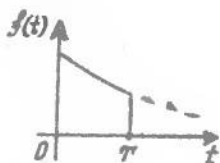


Рис. 2.4

$$F(p) = \sum F_k(p) e^{-p\tau_k}, \quad (2.23)$$

где  $F_k(p)$  - рациональная функция. Затем по теореме запаздывания находят  $f(t) = \sum f_k(t - \tau_k)$ , где  $f_k(t)$  - оригинал  $F_k(p)$ .

## 2.5 Применение L-преобразования для анализа электрических цепей.

В разделе 1 показано, что уравнения, характеризующие поведение цепи, получаются на основе соотношений между напряжениями и токами в ветвях и ограничений, определяемых взаимными соединениями элементов и законами Кирхгофа. Поскольку ток и напряжение для емкостей и индуктивностей связаны дифференциальными (интегральными) соотношениями, то и уравнения, описывающие поведение цепи, являются дифференциальными уравнениями (или интегро-дифференциальными уравнениями). Суть применения L-преобразования для анализа цепей состоит в том, что система интегро-дифференциальных уравнений электрического равновесия, составленная относительно мгновенных значений токов и напряжений ветвей, преобразуется в систему алгебраических уравнений, составленных относительно L-изображений соответствующих токов и напряжений. Решая алгебраическую систему уравнений, находят L-изображения требуемых токов и напряжений. Далее, применяя обратное L-преобразование, переходят от изображений токов и напряжений к оригиналам.

Уравнению баланса мгновенных значений токов (1-й закон Кирхгофа) соответствует уравнение баланса L-изображений токов

$$\sum_k \mathcal{I}_k(p) = 0, \quad (2.24)$$

где  $k$  - число ветвей, сходящихся в узле. Уравнению баланса мгновенных значений напряжений (2-й закон Кирхгофа) соответствует уравнение баланса L-изображений напряжений

$$\sum_k U_k(p) = 0, \quad (2.25)$$

где  $k$  - номера ветвей, входящих в рассматриваемый контур.

Рассмотрим уравнения двухполосных элементов ( $R$ ,  $L$  и  $C$ ) и их схемы замещения, которые называют еще операторными схемами замещения.

Сопротивление:  $U_R(t) = R i_R(t), \quad R = \text{const.}$

Умножение функции времени на постоянное число соответствует умножению  $L$ -изображения этой функции на постоянное число, поэтому

$$U_R(p) = R \cdot \mathcal{I}_R(p). \quad (2.26)$$

Математически выражение (2.26) имеет тот же вид, что и закон Ома для "напряжения"  $U_R(p)$  на резисторе  $R$ , по которому протекает "ток"  $\mathcal{I}_R(p)$ . Но  $U_R(p)$  и  $\mathcal{I}_R(p)$  - не напряжение и ток, а их изображения по Лапласу.

Емкость:  $i_C(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt}$ . Применив к этому соотношению

$L$ -преобразование с учетом теоремы дифференцирования (2.13), получим

$$\mathcal{I}_C(p) = C_p U_C(p) - C U_C(0), \quad (2.27)$$

где  $U_C(0)$  - начальное напряжение на емкости ( $U_C(0) \neq 0$ ).

Запишем (2.27) в виде

$$U_C(p) = \frac{1}{C_p} \mathcal{I}_C(p) + \frac{U_C(0)}{p}. \quad (2.28)$$

Математически (2.28) имеет ту же форму, что и закон Ома для "напряжения"  $U_C(p)$  на "резисторе"  $1/C_p$ , по которому протекает "ток"  $\mathcal{I}_C(p)$  и последовательно с которым включен "источник напряжения"  $U_C(0)/p$ . Таким образом, в схеме замещения, соответствующей "частотной" области, емкость при ненулевых начальных условиях представляется в виде "импеданса"  $Z_C(p) = 1/pC$ , последовательно с которым включен "источник напряжения"  $U_C(0)/p$ , отражающий ее начальное состояние - рис.2.5а.

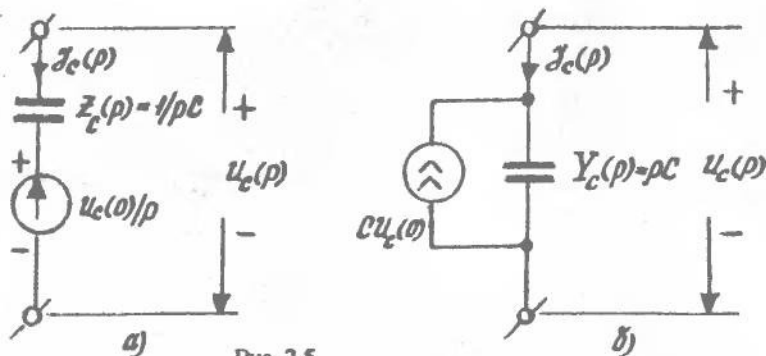


Рис. 2.5

Второй вариант схемы замещения емкости при  $U_C(0) \neq 0$  показан на рис. 2.5б: здесь "проводимость"  $Y_C(p) = pC$  включена параллельно с "источником тока"  $C U_C(0)$ . Такое представление соответствует соотношению (2.27).

Если начальные условия нулевые ( $U_C(0) = 0$ ), то

$$J_c(p) = pC U_c(p), \quad U_c(p) = \frac{1}{pC} J_c(p) \quad (2.29)$$

и операторные сопротивление и проводимость

$$Z_c(p) = \frac{1}{pC}, \quad Y_c(p) = pC. \quad (2.30)$$

Индуктивность:  $U_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ . Определив  $L[U_L(t)]$

с учетом теоремы дифференцирования, получим

$$U_L(p) = Lp J_L(p) - L J_L(0), \quad (2.31)$$

где  $J_L(0)$  - начальный ток в индуктивности. Запишем (2.31) в виде

$$J_L(p) = \frac{1}{Lp} U_L(p) + \frac{J_L(0)}{p}. \quad (2.32)$$

Следовательно, индуктивность в операторной схеме замещения при ненулевых начальных условиях представляется либо в виде "импеданса"  $Z_L(p) = pL$ , последовательно с которым включен "источник напряжения"  $L J_L(0)$  - рис. 2.6а, либо в виде параллельно включенных "проводимости"  $Y_L(p) = 1/pL$  и "источника тока"  $J_L(0)/p$  - рис. 2.6б.

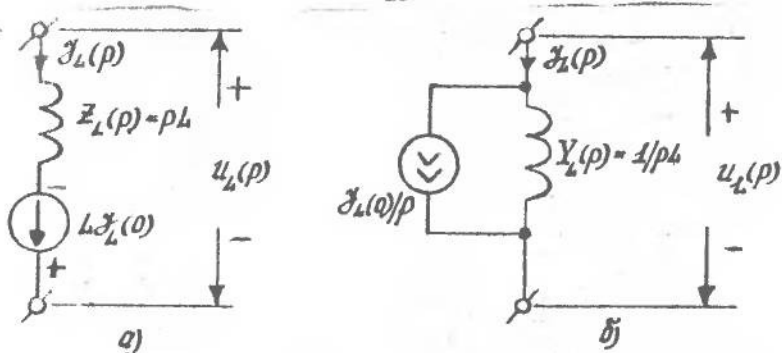


Рис. 2.6

Если начальные условия нулевые ( $I_L(0)=0$ ), то

$$U_L(p) = pL I_L(p) = Z_L(p) I_L(p), \quad I_L(p) = \frac{1}{Lp} U_L(p) = Y_L(p) U_L(p). \quad (2.33)$$

Таким образом, выражения для операторных сопротивлений (проводимостей) пассивных элементов  $L$  и  $C$  имеют такую же структуру, как и выражения для комплексных сопротивлений (проводимостей) этих элементов и могут быть получены одно из другого путем замены  $j\omega$  на  $p$ . Для расчета установившегося режима линейных стационарных цепей при синусоидальном воздействии с частотой  $f$  (Гц) полагаем в полученных уравнениях  $p = 2\pi jf = j\omega$  и пренебрегаем любыми начальными напряжениями и токами в цепи; при этом теряется информация о переходных процессах. Если же эта информация необходима, используют операторные эквивалентные схемы пассивных элементов и получают операторную эквивалентную схему произвольного участка линейной цепи или всей цепи в целом. С этой целью каждый элемент, изображенный на эквивалентной схеме цепи для мгновенных значений (временная область), заменяется операторной эквивалентной схемой ("частотная" область). Операторная эквивалентная схема цепи имеет ту же структуру, как и эквивалентная схема цепи для мгновенных значений, но содержит дополнительные независимые источники энергии, определяющие запасы энергии в цепи в момент времени, непосредственно предшествовавший коммутации. Под коммутацией понимается любое скачкообразное изменение в цепи, приводящее к нарушению установившегося режима. Используя операторную схему замещения цепи, необходимо записать систему уравнений в операторной форме. Определение оригиналов требуемых токов и напряжений производится путем применения таблиц обратного  $L$ -

преобразования, а при их отсутствии - путем использования основных свойств L- преобразования.

Преобразование Лапласа полезно для систем умеренной сложности (не выше 3-го порядка). При исследовании систем более высокого порядка с помощью L- преобразования появляются сложности, связанные с нахождением корней уравнения  $W(p)=0$ .

## 2.6 Примеры решения задач

**Задача 1.** Определить ток через емкость и напряжение на емкости при включении в схему на рис 1.1 в момент  $t=0$  источника  $U_1=E \cdot I(t)$  Начальное напряжение на емкости  $U_C(0)$ .

Решение

Операторная схема замещения цепи с учетом ненулевого начального условия на емкости представлена на рис. 2.7. Находим изображение тока в контуре

$$J(p) = \frac{E/p - U_C(0)/p}{R + 1/pC} = \frac{E - U_C(0)}{R(p + 1/RC)}$$

Найденному изображению соответствует оригинал (см. 2.4)

$$i(t) = \frac{E - U_C(0)}{R} e^{-t/RC}$$

который и определяет поведение тока в контуре и емкости. При нахождении изображения напряжения на емкости  $U_C(p)$  следует иметь в виду, что оно равно сумме изображений напряжения на незаряженной емкости и начального условия, т.е.

$$U_C(p) = J(p)/pC + U_C(0)/p.$$

Подставив сюда  $J(p)$ , получим

$$U_C(p) = \frac{E}{RCp(p + 1/RC)} + \frac{U_C(0)}{p + 1/RC}$$

Этому изображению соответствует оригинал

$$U_C(t) = E(1 - e^{-t/RC}) + U_C(0)e^{-t/RC} = E + [U_C(0) - E]e^{-t/RC}$$

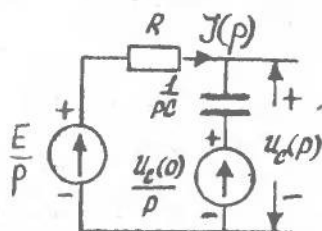


Рис. 2.7



**Задача 2.** Определить ток через индуктивность и напряжение на индуктивности при включении в схему на рис. 1.7 в момент  $t=0$  источника  $U_1 = E \cdot I(t)$ . Начальный ток в индуктивности равен  $i_L(0)$ .

Решение

Операторная схема замещения цепи с учетом ненулевого начального тока через индуктивность представлена на рис. 2.8.

Изображение тока в контуре

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_L(p) &= \frac{E/p + L i_L(0)}{R + pL} = \\ &= \frac{E + pL i_L(0)}{Lp (R/L + p)} \end{aligned}$$

Рис. 2.8

Найденному изображению соответствует оригинал

$$i_L(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L}) + i_L(0) e^{-Rt/L} = \frac{E}{R} + [i_L(0) - \frac{E}{R}] e^{-Rt/L}$$

Изображение напряжения на индуктивности

$$U_L(p) = pL \mathcal{I}_L(p) - L i_L(0)$$

Подставив сюда  $\mathcal{I}_L(p)$ , получим

$$U_L(p) = \frac{E - R i_L(0)}{R/L + p}$$

Этому изображению соответствует оригинал

$$U_L(t) = [E - R i_L(0)] e^{-Rt/L}$$

**Задача 3.** На вход последовательного RLC-контра (рис. 2.9) в момент  $t=0$  подается постоянное напряжение с амплитудой  $E$ . Начального запаса энергии в цепи нет. Найти переходную  $h(t)$  и импульсную  $g(t)$  характеристики цепи, если выходное напряжение снимается с емкости.

Решение

Изображение тока в контуре

$$\mathcal{I}(p) = \frac{E/p}{1/pC + pL + R}$$

Изображение выходного напряжения

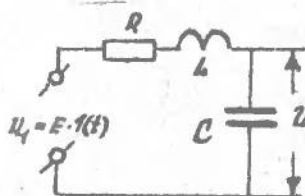


Рис. 2.9

$$U_{\text{вых}}(p) = \frac{1}{pC} \gamma(p) = \frac{E/p}{1/pC + pL + R} \cdot \frac{1}{pC}$$

Запишем последнее выражение в виде

$$U_{\text{вых}}(p) = \frac{E}{p} \cdot \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2} = \frac{V(p)}{W(p)},$$

где введены следующие обозначения:

 $\omega_0^2$  - резонансная частота последовательного контура,  $2\alpha = R/L$ ,  $V(p) = E\omega_0^2$ ,

$$W(p) = p(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2), \quad \omega_0^2 = 1/LC.$$

Чтобы найти оригинал функции  $U_{\text{вых}}(p)$ , воспользуемся формулой Хэвисайда (2.22). Найдем корни уравнения

$$W(p) = 0 = p(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2) = p(p - p_2)(p - p_3).$$

Уравнение  $W(p) = 0$  имеет три корня:  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -\alpha + j\omega_1$ ,  $p_3 = -\alpha - j\omega_1$ , где  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ .

Находим

$$V(p_1) = V/p_1 = 0 = E\omega_0^2 = V(p_2) = V(p_3);$$

$$\frac{dW}{dp} = p(p - p_2) + p(p - p_3) + (p - p_2)(p - p_3);$$

$$\left(\frac{dW}{dp}\right)\Big|_{p=p_1} = \omega_0^2; \quad \left(\frac{dW}{dp}\right)\Big|_{p=p_2} = p_2(p_2 - p_3) = (-\alpha + j\omega_1)2j\omega_1;$$

$$\left(\frac{dW}{dp}\right)\Big|_{p=p_3} = (\alpha + j\omega_1)2j\omega_1.$$

Подставив найденные значения в формулу разложения Хэвисайда, получим

$$U_{\text{вых}}(t) = E \left[ 1 + \frac{e^{-\alpha t}}{2j\omega_1} \left( \frac{e^{j\omega_1 t}}{-\alpha + j\omega_1} + \frac{e^{-j\omega_1 t}}{\alpha + j\omega_1} \right) \right].$$

Используя формулы  $\sin \omega_1 t = \frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j}$  и  $\cos \omega_1 t = \frac{e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}}{2}$

запишем последнее выражение в виде:

$$u_{\text{вх}}(t) = h(t) = E \left[ 1 - e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \cos \omega_1 t \right) \right]$$

Если добротность контура  $Q$  достаточно велика, что соответствует малому затуханию  $\alpha$ , то справедливо неравенство  $\alpha \ll \omega_0$ , откуда  $\alpha \ll \omega_1$ . С учетом последнего неравенства запишем выражение для  $U_{\text{вх}}(t)$  в виде

$$u_{\text{вх}}(t) = h(t) \approx E(1 - e^{-\alpha t} \cos \omega_1 t)$$

Эта зависимость представлена на рис. 2.10 совместно с входным сигналом  $U_1 = E \cdot I(t)$ . Из рис. 2.10 ясно, насколько отклик отличается от воздействия. Различие обусловлено затухающим колебанием, возникающим в цепи в момент включения. Это так называемое собственное или свободное колебание, происходящее с частотой  $\omega_1$  и амплитудой, затухающей по экспоненциальному закону ( $\alpha$  - показатель затухания).

Найдем импульсную  $g(t)$  реакцию контура по формуле

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \approx \omega_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$$

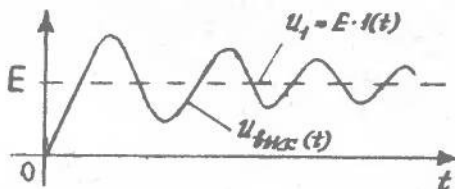


Рис. 2.10

## 2.7 Задачи для самостоятельного решения

2.1 Покажите справедливость L-преобразований следующих функций времени:

а)  $f(t) = t e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$ ,  $F(p) = \frac{(p+\alpha)^2 - \omega_0^2}{[(p+\alpha)^2 + \omega_0^2]^2}$

б)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{в остальных} \\ & \text{точках} \end{cases} \quad F(p) = \frac{1}{p} [e^{-p} - e^{-2p}].$$

2.2 Покажите справедливость обратных L- преобразований для заданных функций F(p).

$$а) F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}, \quad f(t) = e^{-t} - e^{-2t};$$

$$б) F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}, \quad f(t) = 2e^{-t} - e^{-2t};$$

$$в) F(p) = \frac{1}{p^2 - \alpha^2}, \quad f(t) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha t;$$

$$г) F(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}, \quad f(t) = e^{-t} + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{5\pi}{6}\right).$$

2.3 Уравнение состояния, описывающее систему, имеет вид

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -2\lambda(t) + x(t).$$

Найдите, применив к этому уравнению L- преобразование, отклик системы на входное воздействие  $x(t) = 1(t-1)$ .

2.4 В последовательной RC - цепи (рис.1.1) при  $t=0$  включается гармоническая ЭДС  $E(t) = U_m \cos \omega t$ , причем начальное напряжение на емкости равно  $U_0$ . Определить зависимость напряжения на емкости  $U_C(t)$  и построить ее график.

2.5 В момент  $t=0$  на вход цепи (рис. 2.11) подается постоянное напряжение с амплитудой  $E$ . Начальные условия нулевые. Определить ток  $J(t)$  и построить его график.

2.6 В момент  $t=0$  на входе LC - цепи (рис. 2.12) начинает действовать ЭДС  $U_1(t) = E \cdot 1(t)$ . Начального запаса энергии в цепи нет. Найти ток, напряжение на емкости и индуктивности.

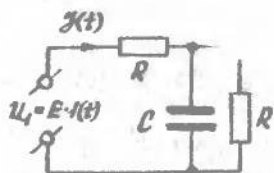


Рис. 2.11

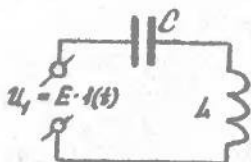


Рис. 2.12

2.7 На вход RC - цепи (рис.1.1) в момент  $t=0$  подается напряжение  $U_1 = E(1 - e^{-\beta t})$ , где  $\beta > 0$ . Найти напряжение  $U_{\text{Вых}}(t)$ , если это напряжение снимается с резистора. Построить график  $U_{\text{Вых}}(t)$ , если  $\beta \gg \alpha$ , где  $\alpha = 1/RC$ . Начальное напряжение на емкости равно нулю.

2.8 На вход RC - цепи (рис.1.1) в момент  $t=0$  подается линейно-нарастающее напряжение  $U_1(t) = b \cdot t$ ,  $b > 0$ . Найти ток в цепи, напряжения на резисторе и емкости. Начальное напряжение на емкости равно нулю. Определить, при каких условиях цепь дифференцирует, если выходной сигнал снимается с резистора.

2.9 Найти напряжение на выходе схемы (рис.2.13), если в момент  $t=0$  на вход подано постоянное напряжение  $E$ . Начальные условия нулевые.

2.10 На вход последовательного контура (рис.2.14) в момент  $t=0$  подано постоянное напряжение  $U_1(t) = E \cdot I(t)$ . Найти  $U_{\text{Вых}}(t)$ . Начальный запас энергии в цепи равен нулю.

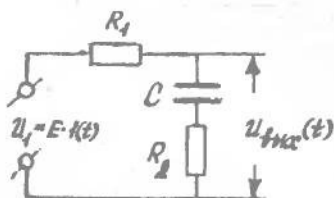


Рис. 2.13

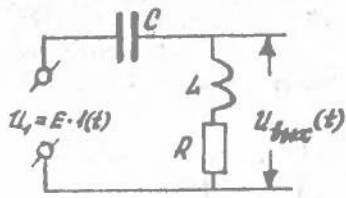


Рис. 2.14

2.11 На вход LC - контура (рис.2.15) подано напряжение  $U_1(t) = E \cdot I(t)$ . Найти  $U_{\text{Вых}}(t)$ , если начальные условия нулевые.

2.12 На входе последовательного контура (рис.2.16) в момент  $t=0$  начинает действовать ЭДС  $U_1(t) = e \cdot \sin \omega t$ . Начальные условия нулевые. Определить ток, напряжение на емкости и индуктивности при условии, что частота ЭДС равна резонансной частоте контура.

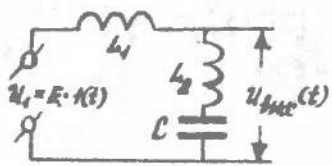


Рис. 2.15

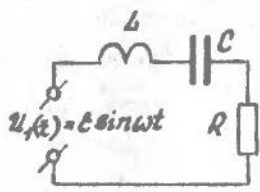


Рис. 2.16

### РАЗДЕЛ III.

#### Метод интеграла Дюамеля

##### 3.1 Основные теоретические сведения

Переходная функция  $h(t)$  - отклик схемы на единичную функцию  $1(t)$ ; импульсная реакция  $g(t)$  - отклик схемы на единичный импульс  $\delta(t)$ . Функции  $h(t)$  и  $g(t)$  связаны соотношением

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (3.1)$$

Если известна переходная функция  $h(t)$  или импульсная реакция  $g(t)$ , то для определения отклика схемы на произвольный сигнал  $U_1(t)$  можно разложить этот сигнал по единичным функциям (рис. 3.1а) или по единичным импульсам (рис. 3.1б).

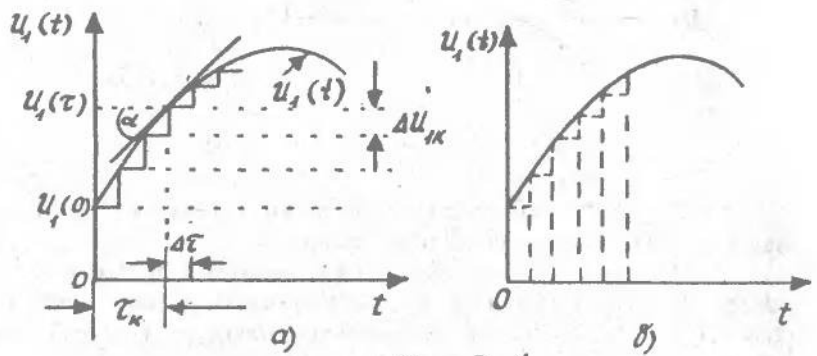


Рис. 3.1

Для определения отклика  $U_2(t)$  схемы на сигнал  $U_1(t)$  в момент времени  $t$  разобьем интервал времени от  $t=0$  до  $t$  на  $n$  равных частей, длительность каждой из которых равна  $\Delta\tau$ . Кривую  $U_1(t)$  заменим ступенчатой кривой. При  $t=0$  высота ступеньки равна  $U_1(0)$ , а при  $t=\tau_k$  высота ступеньки при достаточно малых  $\Delta\tau$

$$\Delta U_{1k} \approx \Delta\tau \operatorname{tg} \alpha = \Delta\tau U_1'(\tau_k).$$

Отклик схемы на элементарный сигнал  $U_1(0) \cdot I(t)$ , представленный первой ступенькой, в момент времени  $t$  равен  $U_1(0) \cdot h(t)$ . В тот же момент времени  $t$  сигнал, имеющий высоту ступеньки  $\Delta U_{1k}$  и возникающий в момент  $\tau_k$ , обусловит составляющую отклика  $\Delta U_{1k} \cdot h(t - \tau_k)$ . Суммируя составляющие отклика по всем ступенькам на интервале  $0 < \tau_k < t$ , получаем

$$U_2(t) = U_1(0) \cdot h(t) + \sum_{k=1}^n U_1'(\tau_k) h(t - \tau_k) \Delta\tau.$$

При  $\Delta\tau \rightarrow 0$  величины  $\tau_k$  соответствуют значениям текущего времени  $\tau$ , а сумма переходит в интеграл с пределами интегрирования от 0 до  $t$

$$U_2(t) = U_1(0) h(t) + \int_0^t U_1'(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (3.2)$$

Эта формула получила название интеграла суперпозиции или интеграла Дюамеля.

Другие формы записи интеграла Дюамеля

$$U_2(t) = U_1(t) h(0) + \int_0^t U_1(\tau) h'(t - \tau) d\tau, \quad (3.3)$$

$$U_2(t) = U_1(0) h(t) + \int_0^t U_1'(t - \tau) h(\tau) d\tau, \quad (3.4)$$

$$U_2(t) = U_1(t) h(0) + \int_0^t U_1(t - \tau) h'(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Приведенные формулы являются совершенно равноценными, а выбор той или иной формулы определяется исключительно соображениями упрощения вычислений. Так, например, если сигнал  $U_1(t)$  после дифференцирования принимает более простой вид, следует пользоваться формулами (3.2) или (3.4). Если же при дифференцировании упрощается выражение для переходной характеристики, то следует пользоваться формулами (3.3) или (3.5).

Требуемые для решения задач методом интеграла Дюамеля переходные характеристики  $h(t)$  той или иной схемы могут быть определены любым из методов, изложенных в разделах I и II.

### 3.2 Примеры решения задач

**Задача 1.** На вход дифференцирующей цепи (рис.3.2а) подается напряжение  $U_1(t)=bt$ . Начального запаса энергии в цепи нет. Определить выходное напряжение  $U_{\text{вых}}(t)$  и построить его график.

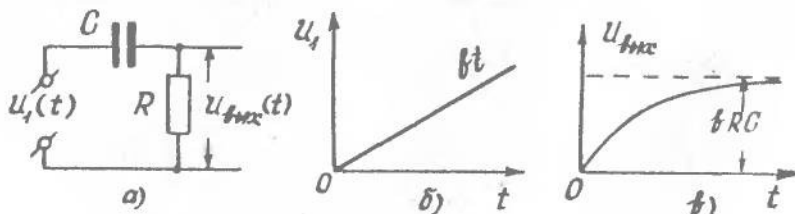


Рис. 3.2

Решение

Воспользуемся формулой (3.2), подставив в нее  $U_1(0)=0$ ,  $U_1(\tau)=b\tau$ ,  $U_1'(\tau)=b$ . Отклик рассматриваемой цепи на единичную функцию равен  $h(t) = e^{-\alpha t}$ , где  $\alpha=1/RC$ . Итак,

$$\begin{aligned}
 U_{\text{вых}}(t) &= U_1(0)h(t) + \int_0^t U_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau = \\
 &= \int_0^t b \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = bRC(1 - e^{-\alpha t}).
 \end{aligned}$$

График функции  $U_{\text{вых}}(t)$  представлен на рис. 3.2в.

**Задача 2.** На вход дифференцирующей цепи (рис. 3.3а) подается симметричный треугольный импульс длительностью  $\delta$  и высотой  $E$  - рис. 3.3б. Найти форму напряжения на выходе и построить его график.



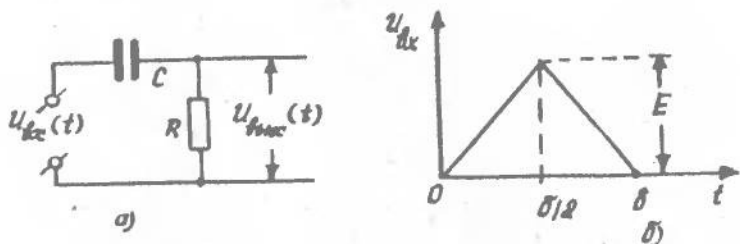


Рис. 3.3

Решение

Представим входной сигнал  $U_{вх}(t)$  в виде суммы

$$U_{вх}(t) = U_1(t) + U_2(t) + U_3(t),$$

где

$$U_1(t) = b \cdot t \cdot 1(t), \quad U_2(t) = -2b \left(t - \frac{\delta}{2}\right) \cdot 1\left(t - \frac{\delta}{2}\right),$$

$$U_3(t) = b(t - \delta) \cdot 1(t - \delta), \quad b = 2E/\delta.$$

Входной сигнал  $U_{вх}(t)$  и его составляющие представлены на рис. 3.4а-г. Найдем реакцию цепи на каждый из этих сигналов, воспользовавшись результатом решения задачи 1. Тогда

$$U_{вых1}(t) = \frac{b}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \cdot 1(t),$$

$$U_{вых2}(t) = -\frac{2b}{\alpha} [1 - e^{-\alpha(t - \frac{\delta}{2})}] \cdot 1\left(t - \frac{\delta}{2}\right),$$

$$U_{вых3}(t) = \frac{b}{\alpha} [1 - e^{-\alpha(t - \delta)}] \cdot 1(t - \delta),$$

где  $\alpha = 1/RC$ . Зависимости  $U_{вых 1,2,3}(t)$  представлены на рис. 3.5 а-в. Просуммировав три кривые на рис. 3.5 а-в, получим форму выходного сигнала - рис. 3.5г.

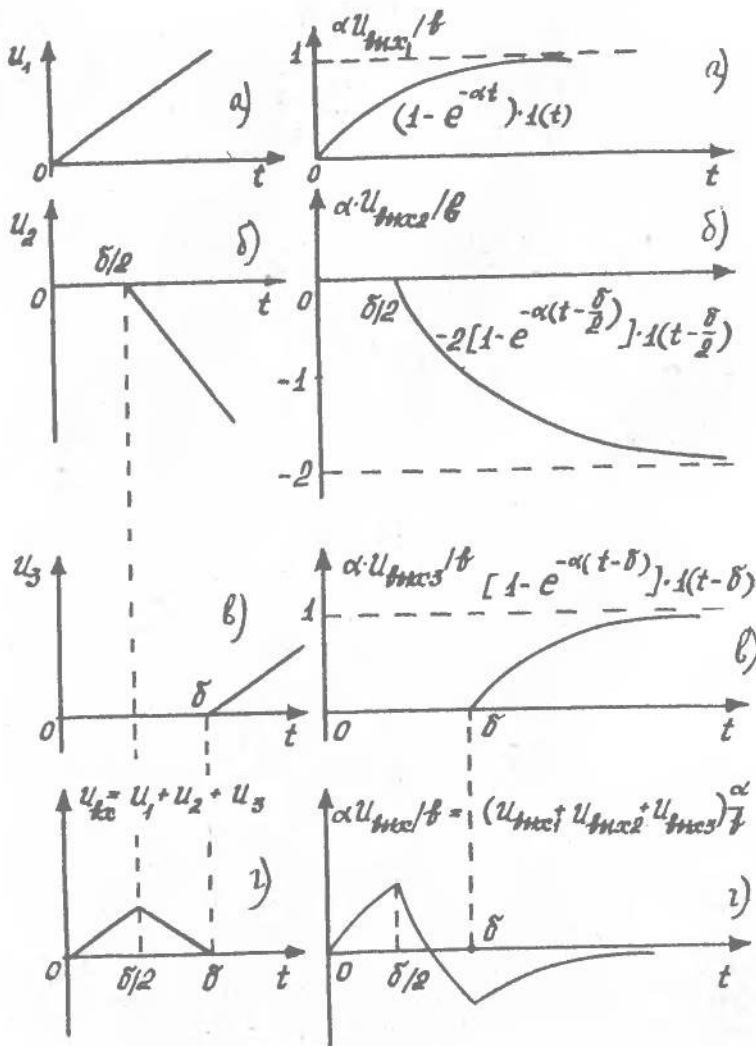


Рис. 3.4

Рис. 3.5

## 3.3 Задачи для самостоятельного решения

3.1 На вход интегрирующей цепи (рис.3.6) подается линейно-растущее напряжение  $U_1(t)=b \cdot t$ ,  $b>0$ . Начальное напряжение на емкости равно нулю. Определить напряжение  $U_{\text{вых}}(t)$  и построить его график.

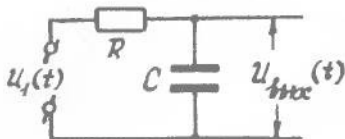


Рис. 3.6

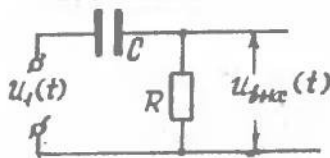


Рис. 3.7

3.2 На вход дифференцирующей цепи (рис.3.7) подается напряжение  $U_1(t)=b \cdot t^2$ . Начальное напряжение на емкости равно нулю. Определить напряжение  $U_{\text{вых}}(t)$ .

3.3 На вход цепи (рис.3.7) подается прямоугольный импульс с амплитудой  $E$  и длительностью  $\delta$ . Начального запаса энергии в цепи нет. Определить напряжение  $U_{\text{вых}}(t)$ .

3.4 На вход интегрирующей цепи (рис.3.6) подано напряжение  $U_1(t)$ , имеющее форму, показанную на рис. 3.8. Начального запаса энергии в цепи нет. Найти напряжение  $U_{\text{вых}}(t)$ .

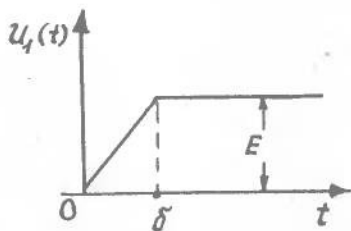


Рис. 3.8

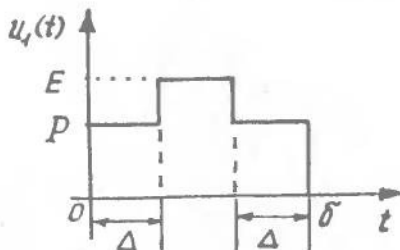


Рис. 3.9

3.5 На вход дифференцирующей цепи (рис.3.7) подается импульс с pedestalом (рис. 3.9). Начального запаса энергии в цепи нет. Найти напряжение  $U_{\text{вых}}(t)$ .

## Литература

1. Дезоер Ч.А., Ку Э.С. Основы теории цепей. М.: Связь, 1976.
2. Попов В.П. Основы теории цепей. М.: Высшая школа, 1985.
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач. М.: Высшая школа, 1987.
4. Радиотехнические цепи и сигналы. Примеры и задачи. Учебное пособие для вузов. Под ред. И.С.Гоноровского. М.: Радио и связь, 1989.
5. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. Часть I. М.: Мир, 1988.
6. Харкевич А.А. Основы радиотехники. М.: Гос. издательство литературы по вопросам связи и радио, 1962.
7. Звездный А.М. Сборник задач и упражнений по курсу "Теоретическая радиотехника". М.: Гос. издательство литературы по вопросам связи и радио, 1957.

## Содержание

стр.

Раздел I. Исследование цепей I-го порядка методом дифференциальных уравнений .....	3-13
1.1 Основные теоретические сведения.....	3-5
1.2 Примеры решения задач.....	5-10
1.3 Задачи для самостоятельного решения.....	10-13
Раздел II. Преобразование Лапласа (L-преобразование) и его применение к решению дифференциальных уравнений.....	13-30
2.1 Определение L-преобразования.....	13-14
2.2 Примеры L-преобразований.....	14-15
2.3 Свойства L-преобразований.....	15-17
2.4 Обратное преобразование Лапласа.....	17-20
2.5 Применение L-преобразований для анализа электрических цепей.....	20-24
2.6 Примеры решения задач.....	24-27
2.7 Задачи для самостоятельного решения.....	27-30
Раздел III. Метод интеграла Дюамеля.....	30-36
3.1 Основные теоретические сведения.....	30-32
3.2 Примеры решения задач.....	32-34
3.3 Задачи для самостоятельного решения.....	35
Литература.....	36