Федеральное агентство по образованию
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Национальный проект «Образование»
Инновационная образовательная программа ННГУ. Образовательно-научный центр «Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение»

В.И. Кривошеев

Современные методы цифровой обработки сигналов (цифровой спектральный анализ)

Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «Современные системы мобильной цифровой связи, проблемы помехозащищенности и защиты информации»

Нижний Новгород
2006

Учебно-методические материалы подготовлены в рамках инновационной образовательной программы: Образовательно-научный центр «Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение»

Кривошеев В.И. Современные методы цифровой обработки сигналов (цифровой спектральный анализ). Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Современные системы мобильной цифровой связи, проблемы помехозащищенности и защиты информации». Нижний Новгород, 2006, -117 с.

Настоящие учебно-методические материалы содержат основные теоретические сведения по классическим методам нахождения оценок спектральной плотности мощности (СПМ) стационарных случайных последовательностей, включающим периодограммный и коррелограммный методы, а также по методам оценки СПМ на основе параметрических моделей случайных процессов, таких как модель авторегрессии и модель авторегрессии-скользящего среднего. Рассмотрены также метод моделирования процесса суммой комплексных экспонент (метод Прони) и его спектральная интерпретация, и методы оценки частоты, основанные на анализе собственных значений соответствующих матриц. Рассмотрены характеристики частотно-временного разрешения алгоритмов спектрального анализа, приведены результаты их экспериментального исследования.

Материалы могут быть полезны студентам, аспирантам, преподавателям, а также специалистам-практикам, занимающимся обработкой сигналов.

© Кривошеев В.И., 2006

ВВЕДЕНИЕ

Оценивание спектральной плотности мощности (СПМ) или просто спектра дискретизованных детерминированных и случайных процессов обычно выполняется с помощью процедур, использующих быстрое преобразование Фурье (БПФ). Такой подход к спектральному анализу эффективен в вычислительном отношении и обеспечивает получение приемлемых результатов для большого класса сигнальных процессов. Однако, несмотря на указанные достоинства, подходу, основанному на вычислении БПФ, присущ ряд принципиальных ограничений. Наиболее важное из них - это ограничение частотного разрешения, т.е. способности различать спектральные линии двух и более сигналов. Частотное разрешение в герцах примерно равно величине, обратной временному интервалу в секундах, на котором можно получить отсчеты сигнала. Второе ограничение обусловлено неявной весовой обработкой данных при вычислении БПФ. Взвешивание проявляется в виде «утечки» в частотной области, т.е. энергия главного лепестка спектральной линии «утекает» в боковые лепестки, что приводит к наложению и искажению спектральных линий других присутствующих сигналов. При этом спектральные линии слабых сигналов могут маскироваться боковыми лепестками спектральных линий более сильных сигналов. Правильный выбор функции окна, значения которой спадают на краях, позволяют ослабить утечку в боковые лепестки, однако лишь за счет снижения разрешающей способности.

Два указанных ограничения подходов на основе БПФ особенно сильно проявляются при анализе коротких записей данных, с которыми чаще всего и приходится иметь дело на практике. Многие измеряемые процессы обладают малой длительностью или же медленно изменяющимися во времени спектрами, которые можно считать постоянными только на коротких участках записей данных. Например, для изучения характеристик внутриимпульсной модуляции в радиолокаторах в пределах очень короткого радиолокационного импульса можно осуществить лишь несколько временных отсчетов. В случае гидролокатора можно сделать большее число подобных отсчетов, но движение цели заставляет ограничиваться короткими интервалами наблюдения, с тем, чтобы гарантировать неизменность статистик цели на интервале анализа.

В течение трех последних десятилетий предложено большое число самых различных процедур спектрального оценивания, которые разработаны для того, чтобы, так или иначе, ослабить ограничения, присущие подходу на основе БПФ. Часто о процессе, из которого

берутся отсчеты, известна некоторая совокупность сведений, позволяющая выбрать модель процесса, которая является хорошей его аппроксимацией. В этом случае можно, как правило, получить более точную спектральную оценку, определяя параметры выбранной модели по результатам измерений. Так называемый моделирующий подход к спектральному оцениванию становится трехэтапной процедурой. Первый этап состоит в выборе модели исследуемого временного ряда. Второй этап состоит в оценивании параметров принятой модели либо с использованием имеющихся отсчетов данных, либо значений автокорреляционной функции (известной или оцениваемой по имеющимся данным). Наконец, третий этап состоит в получении спектральной оценки путем подстановки оценок параметров модели в расчетное выражение для СПМ, соответствующее этой модели. Ценность такого подхода в том, что при хорошем соответствии выбранной модели наблюдаемым данным получаются более точные оценки СПМ при более высоком разрешении, чем при традиционном подходе на основе БПФ, поскольку отпадает необходимость в функциях окна и устраняются связанные с ними искажения. Платой за улучшение оценок СПМ оказывается возрастание вычислительной сложности алгоритмов получения оценок, которая стала успешно преодолеваться только на современном уровне развития вычислительной техники. Современный цифровой спектральный анализ - это оценка СПМ на основе параметрических моделей случайных процессов. Основной интерес к методам параметрического спектрального оценивания связан с высокой разрешающей способностью, достигаемой с их помощью при обработке последовательностей данных, содержащих очень малое число отсчетов. Ниже мы рассмотрим классические методы спектрального анализа случайных процессов, включающие коррелограммный и периодограммный методы, а также методы спектрального оценивания высокого разрешения, основанные на использовании параметрических моделей, таких как модели авторегрессии и авторегрессии-скользящего среднего. Кроме этого рассмотрены также метод моделирования наблюдаемых данных суммой экспоненциальных функций (метод Прони) и методы оценивания частоты, основанные на анализе собственных значений соответствующих матриц.

ГЛАВА 1. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЦИФРОВОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

1.1. Спектральные представления детерминированных сигналов

Напомним определения понятий, связанных со спектральными представлениями детерминированных сигналов непрерывного и дискретного времен.

Для непрерывных во времени детерминированных сигналов $x(t)$ понятие спектральной плотности амплитуды $X(f)$ связано с парой преобразований Фурье (НВПФ):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2pft} dt;$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2pft} df. \tag{1.1}$$

Энергия E сигнала $x(t)$ определяется соотношением

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} E(f)df,$$

где $E(f) = |X(f)|^2$ – спектральная плотность энергии (СПЭ), описывающая распределение энергии сигнала по частоте. Для сигналов с ограниченной мощностью вводят спектральную плотность мощности, описывающую распределение мощности (энергии, рассеиваемой в единицу времени) по частоте. Заметим, что в обозначениях функций дискретный аргумент будем заключать в квадратные [дискретные] скобки, а непрерывный аргумент – в круглые (непрерывные) скобки, в соответствии с обозначениями, принятыми в книге С. Л. Марпла [1].

В случае, когда мы располагаем лишь отсчетами (выборками) непрерывной функции времени $x[n] = x(t)\big|_{t=nT}$, взятыми с периодом T, понятие спектральной плотности амплитуды последовательности отсчетов определяется парой дискретно-временного преобразования Фурье (ДВПФ)

$$X_p(f) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2pfnT},$$

$$x[n] = \int_{-1/2T}^{1/2T} X_p(f) e^{j2pfnT} df, n = 0, \pm 1, \ldots \qquad (1.2)$$

Заметим, что $X_p(f)$ определяет периодическую (с периодом *1/T*) функцию частоты, которая является периодическим продолжением спектральной плотности $X(f)$ сигнала $x(t)$. Если $X(f)$ имеет ограниченную локализацию по оси частот, например, в интервале $-f_в \le f \le f_в$, а период отсчетов удовлетворяет соотношению $T \le 1/2 f_в, (f_д = \frac{1}{T} \ge 2 f_в)$, то спектральные полосы функции $X_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_д)$ не перекрываются, поэтому

$$X_p(f) = X(f), -1/2T \le f \le 1/2T.$$

Следовательно, спектр дискретной последовательности $x[n]$ повторяет форму спектра функции $x(t)$, которая может быть восстановлена по ее отсчетам. В противном случае имеет место эффект наложения спектров и восстановление функции $x(t)$ по ее отсчетам $x[n]$ оказывается невозможным.

Заметим также, что $X_p(f)$ связано с *z*-преобразованием последовательности $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$:

$$X_p(f) = T X(z)\big|_{z=e^{j2p\,fT}}.$$

Поэтому пару соотношений ДВПФ можно записать с введением шкалы частот, нормированной к частоте дискретизации $f / f_д = fT$ в виде

$$X(e^{j2p\,f}) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2p\,fn},$$

$$x[n] = \frac{1}{T}\int_{-0.5}^{0.5} X(e^{j2p\,f})e^{j2p\,fn}df. \qquad (1.3)$$

Для сигнала $x(t)$, ограниченного по длительности интервалом *0-NT* секунд, спектральные представления иногда связывают с непрерывно-временным рядом Фурье (НВРФ):

$$X(k) = \int_{0}^{NT} x(t)e^{-j2p\,kt/NT}dt,$$

$$x_p(t) = \frac{1}{NT}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{j2p\,kt/NT}, \qquad (1.4)$$

который по существу на всей временной оси представляет периодически (с периодом *NT*) продолженную функцию $x(t)$, т.е. $x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-kNT).$ Для $0 \le t \le NT$ $x_p(t) = x(t),$ а $X[k] = X(f_k)\Big|_{f_k = k/NT}$, т.е. коэффициенты ряда Фурье суть отсчеты непрерывного по частоте спектра $X(f)$ в дискретной последовательности точек на оси частот $f_k = k/NT$.

Наконец, для последовательности $x[n]$ конечной длины в *N* отсчетов спектральные представления связываются с дискретно - временным рядом Фурье (ДВРФ):

$$X[k] = T\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2p\,kn/N},\ 0 \le k \le N-1;$$

$$x[n] = \frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2p\,kn/N}, 0 \le n \le N-1. \qquad (1.5)$$

Обе последовательности $X[k]$ и $x[n]$ периодичны с периодом N и на интервале в один период представляют соответственно совокупность отсчетов спектра $X(f)$ в точках $f_k = k/NT$ и отсчетов сигнала $x(t)$ в точках $t = nT$.

Соотношения (1.5) называют еще парой дискретного преобразования Фурье (ДПФ), их отличия от традиционно используемых, вызванные наличием множителей T и $1/T$, связаны с желанием обеспечить корректность масштабов при вычислении энергии и мощности. Теорема об энергии для ДПФ имеет вид

$$E = T\sum_{n=0}^{N-1}\left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X[k]\right|^2.$$

Поэтому спектральная плотность энергии примет вид

$$E[k] = \left|X[k]\right|^2 = \left|T\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2p\,kn/N}\right|^2, \qquad (1.6)$$

а соотношение для спектральной плотности мощности (СПМ) примет форму

$$P[k] = \frac{1}{NT}E[k] = \frac{T}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2p\,kn/N}\right|^2, 0 \le k \le N-1. \qquad (1.7)$$

Таким образом, ДПФ (1.5) позволяет преобразовать N отсчетов $x[n]$ непрерывного во времени сигнала $x(t)$ со спектральной плотностью $X(f)$ в N отсчетов $X[k]$ его спектральной плотности. Для получения большего количества отсчетов спектра $L>N$, т.е. для частот $f_k = k/L$, следует доопределить исходную последовательность $x[n]$, заданную на интервале $0 \le n \le N-1$, необходимым числом нулевых отсчетов, полагая $x[n] = 0$, $N \le n \le L-1$. Алгоритм ДПФ, реализуемый одним из вариантов БПФ, является основным при реализации спектрального анализа сигналов на основе цифровых вычислительных устройств.

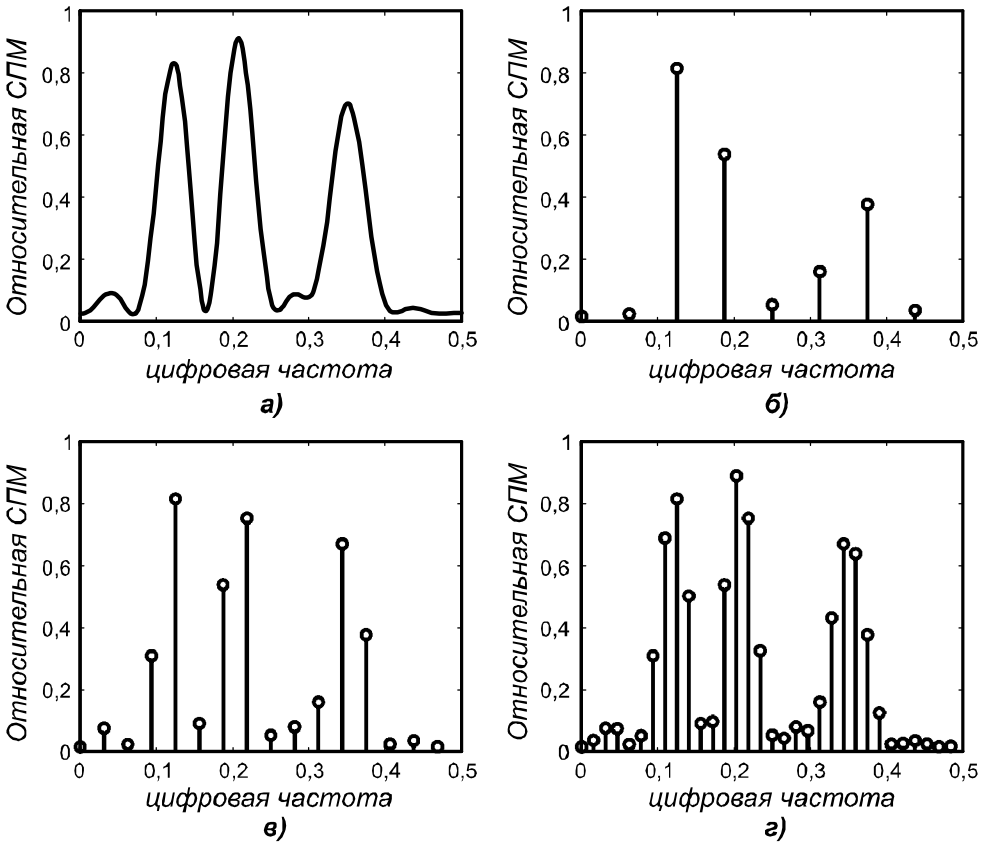


Рис. 1.1. Интерполяция за счет дополнения нулями: *а* - модуль ДВПФ 16-точечной записи данных, содержащих три синусоиды; б - модуль ДПФ той же последовательности данных без дополнения нулями (неопределенности не разрешены); *в* - модуль ДПФ той же последовательности после двукратного увеличения ее отсчетов за счет дополнения нулями (неопределенности разрешены, так как различимы все три синусоиды); *г* -модуль ДПФ той же последовательности данных после четырехкратного увеличения числа ее отсчетов за счет дополнения нулями

Рис.1.1 показывает как влияет дополнение нулями исходной 16-точечной последовательности данных, содержащих три синусоиды, с соответствующим увеличением объема ДПФ на воспроизведение ее спектра.

1.2. Разрешение и произведение длительности на ширину спектра

Одним из важных параметров устройства спектрального оценивания является его разрешающая способность, под которой понимается способность разрешать (раздельно измерять) спектральные отклики двух синусоидальных сигналов, близких по частоте и амплитуде. Считается, что спектральные пики разрешены, если провал между ними составляет величину не менее 3 дб.

Обычно полагают, что разнесение частот двух синусоид не может быть меньше эквивалентной ширины полосы частот B_e спектра окна, через которое наблюдаются отрезки этих синусоид. Поэтому говорят, что разрешение в герцах приближенно равно величине, обратной времени наблюдения T_e в секундах, поскольку $T_e B_e \approx 1$. Обосновать это утверждение можно на основе следующих соображений.

Сигнал $x[n]$ не может быть одновременно быть ограниченным по длительности и по ширине полосы спектра. Однако его можно охарактеризовать некоторым интервалом T_e секунд, в котором сосредоточена большая часть его энергии при представлении во временной области, и некоторым интервалом B_e герц, в котором сосредоточена большая часть его энергии при представлении в частотной области. Для количественного описания временной концентрации энергии дискретно-временной последовательности отсчетов сигнала и соответствующей частотной концентрации ее ДВПФ предложены несколько различных мер. Определим две из них.

Эквивалентная длительность T_e сигнала $x[n]$ определяется как

$$T_e = \frac{T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]}{x(0)}, \tag{1.8}$$

т. е. иными словами, как «площадь» этого дискретного сигнала, поделенная на его центральное значение. Эквивалентная длительность сигнала равна длительности сигнала с прямоугольной огибающей, высота которого равна значению $x[n]$ в начале координат, т. е. $x[0]$, а площадь равна площади исходного сигнала; см. рис. 1.2*а* и 1.2б. Заметим, что в общем случае T_e не будет целочисленно кратным интервалу отсчетов T. *Эквивалентная ширина полосы* B_e дискретно-временного преобразования Фурье $X(f)$ сигнала $x[n]$ определяется аналогично как

$$B_e = \frac{\int_{-1/2T}^{1/2T} X(f)df}{X(0)} \tag{1.9}$$

см. рис. 1.2 *в* и 1.2 *г*. Эти две меры временной и частотной концентраций применимы лишь к действительнозначным симметричным сигналам с максимальным значением в начале координат, интеграл от которых имеет конечное ненулевое значение. Эти условия

точно выполняются для весовых функций (окон), которые рассматриваются в связи с обсуждением классических спектральных оценок.

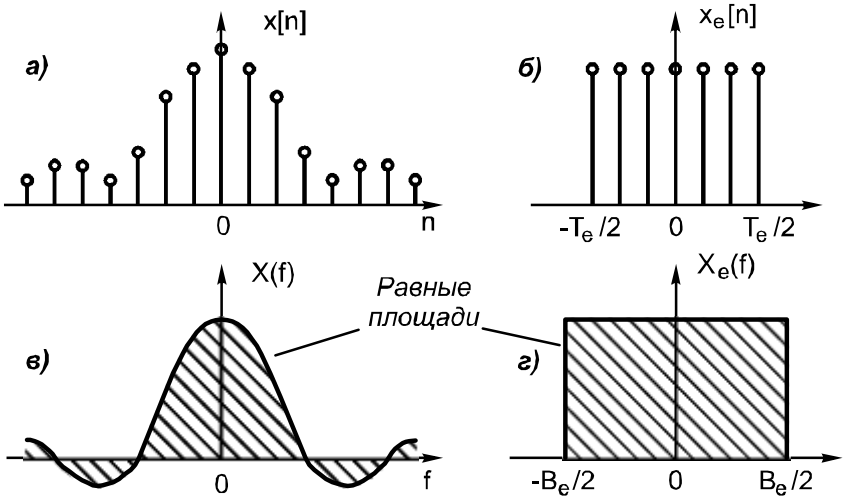


Рис.1.2. *а* – последовательность отсчетов исходного сигнала; *б* – эквивалентный сигнал с прямоугольной огибающей; *в* – ДВПФ исходного сигнала; *г* – эквивалентное ДВПФ прямоугольной формы

Из соотношений ДВПФ с очевидностью следует, что

$$X(0) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n],$$

$$x[0] = \int_{-1/2T}^{1/2T} X(f)df,$$

откуда получаем, что произведение длительности и ширины полосы равно

$$T_e B_e = \frac{T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]}{x[0]} \frac{\int_{-1/2T}^{1/2T} X(f)df}{X(0)} = 1, \qquad (1.10)$$

а это означает, что эквивалентная длительность сигнала и эквивалентная ширина его преобразования являются взаимно обратными величинами. Именно это равное единице произведение, в котором T_e полагается равным интервалу наблюдения, и положено в основу эмпирического правила, определяющего частотное разрешение.

Возможно другое определение произведения длительности и ширины полосы, основанное на понятии среднеквадратичной длительности (ширины). Среднеквадратичная ширина является мерой дисперсии (среднеквадратичного отклонения) некоторой функции от ее

среднего значения. Для того чтобы получить возможность оперировать с более широким классом функций, чем это возможно при использовании эквивалентных длительности (1.8) и ширины полосы (1.9), можно использовать определения среднеквадратичной ширины для функций вида $|x[n]|^2$ и $|X(f)|^2$. Такой подход позволяет получать значимые среднеквадратичные величины ширины для комплексных функций, осциллирующих функций и функций, которые имеют нулевую интегральную площадь [1].

На рис. 1.3 – 1.6 показано, как влияет на величину частотного разрешения длина N окна данных на примере вычисления ДПФ объемом 512 точек суммы двух комплексных синусоид с равными амплитудами и близкими частотами 0,2 и 0,24. Длина N окна данных выбиралась равной 10, 30, 100 и 300 отсчетов соответственно и обрабатываемая реализация дополнялась необходимым количеством нулевых отсчетов до длины 512 отсчетов, весовая обработка не применялась.

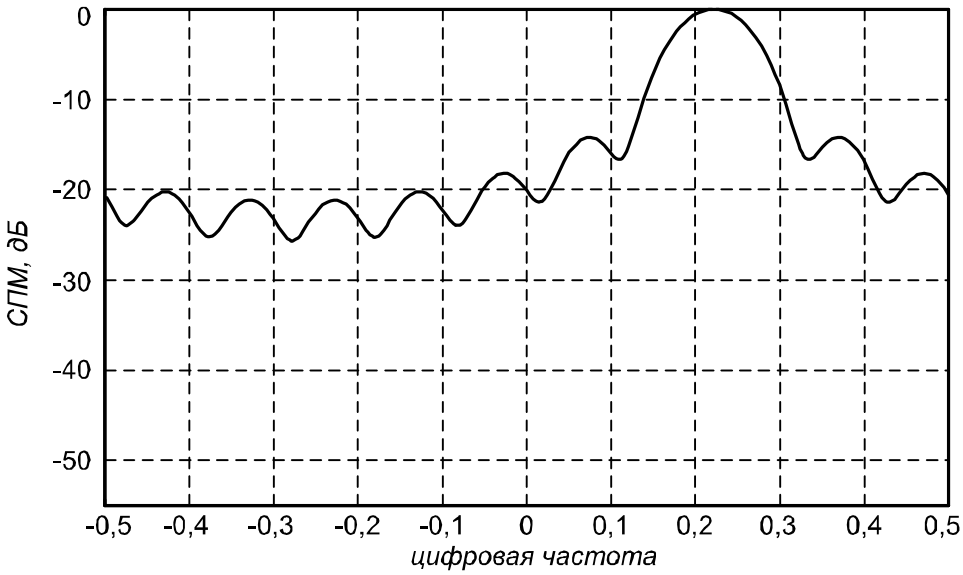


Рис. 1.3. Спектр суммы двух комплексных синусоид с равными амплитудами и близкими частотами 0,2 и 0,24, N=10

На рис.1.3 синусоиды не разрешены, поскольку разнос их частот составляет величину Δf=0,04, а частотное разрешение $1/N$=1/10. На рис.1.4 синусоиды уже разрешены, поскольку частотное разрешение $1/N$=1/30 ≈ 0,033. Рис.1.5 и 1.6 иллюстрируют спектры разрешенных синусоид при N=100 и N=300 соответственно.

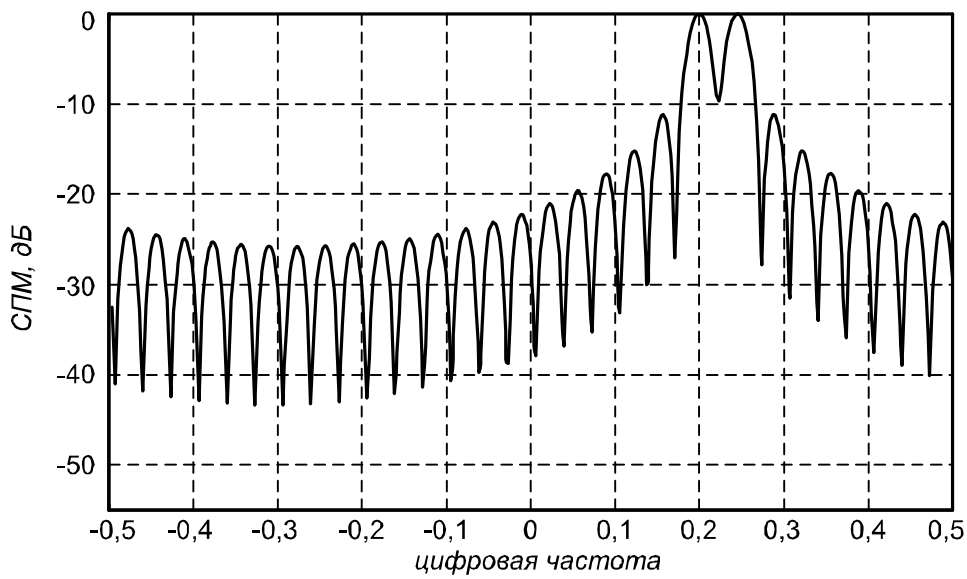


Рис. 1.4. Спектр суммы двух комплексных синусоид с равными амплитудами и близкими частотами 0,2 и 0,24, N=30

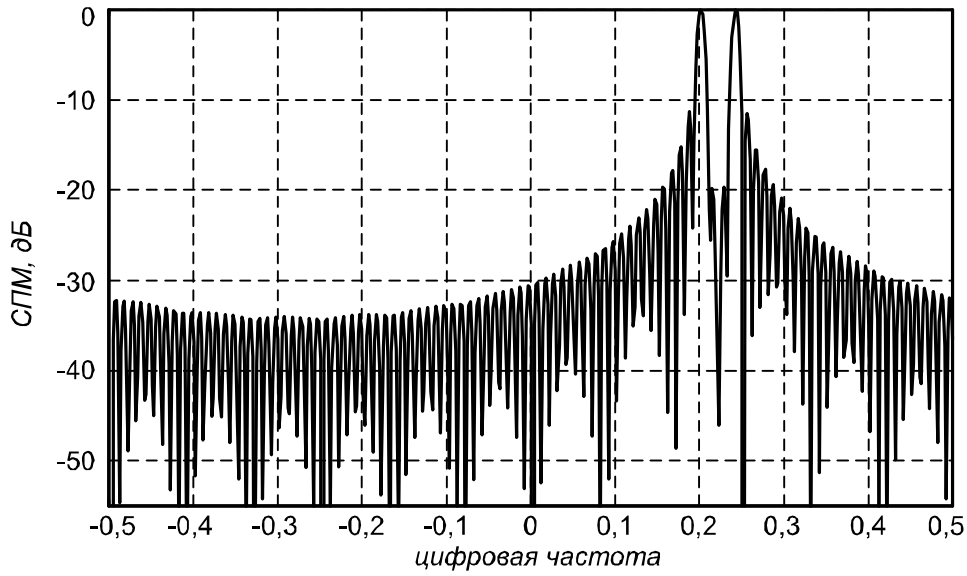


Рис. 1.5. Спектр суммы двух комплексных синусоид с равными амплитудами и близкими частотами 0,2 и 0,24, N=100

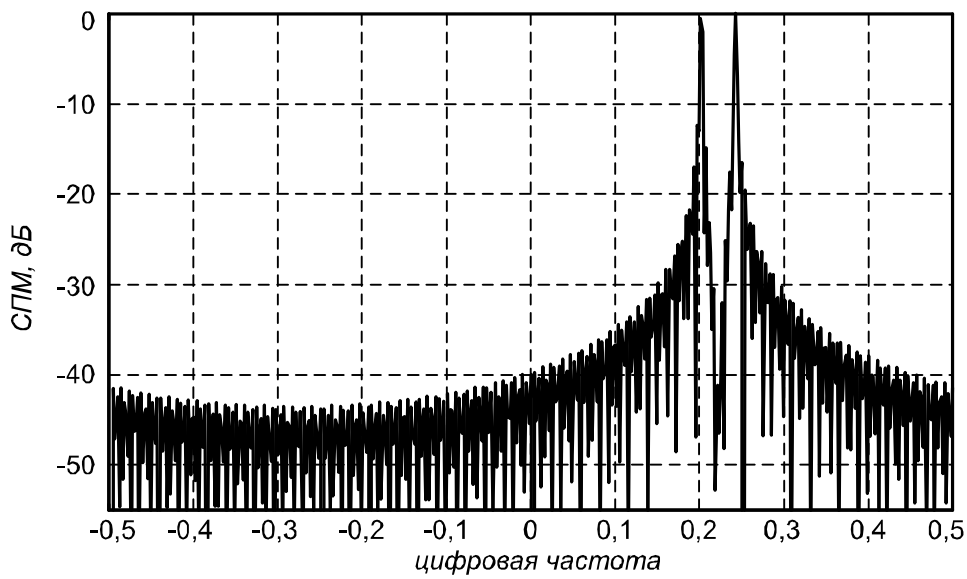


Рис. 1.6. Спектр суммы двух комплексных синусоид с равными амплитудами и близкими частотами 0,2 и 0,24, N=300

1.3. Спектральные представления случайных процессов

Дискретный случайный процесс можно рассматривать как некоторую совокупность или ансамбль действительных или комплексных дискретных временных последовательностей $\{x_i[n]\}, i = 0,1,2,3,\ldots$, каждую из которых можно было бы наблюдать как результат проведения некоторого эксперимента. При фиксации временного индекса n в сечениях случайного процесса образуются случайные величины, при задании распределений плотностей вероятностей которых можно определить соответствующие моменты распределений.

Среднее значение (момент 1-го порядка) определяется выражением

$$< x[n] >= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_i[n] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x,n)dx .$$

Автокорреляция случайного процесса в два различных момента времени n_1 и n_2 определяется выражением

$$r_{xx}[n_1,n_2] =< x[n_1]x^*[n_2] >= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2^* p_2(x_1,n_1,x_2,n_2)dx_1dx_2 ,$$

где * - знак комплексного сопряжения. Автокорреляция центрированного случайного процесса, т.е. с удаленным средним значением, называется автоковариацией:

$$c_{xx}[n_1,n_2] = <(x[n_1] - <x[n_1]>)(x^*[n_2] - <x^*[n_2]>)> =$$
$$= r_{xx}[n_1,n_2] - <x[n_1]><x^*[n_2]>.$$

Случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если его среднее значение не зависит от времени, а автокорреляционная последовательность (АКП) зависит только от разности индексов времени $m=n_1-n_2$.

Спектральная плотность мощности (СПМ) стационарного случайного процесса определяется как дискретно - временное преобразование Фурье автокорреляционной последовательности

$$P_{xx}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] e^{-j2p\, f mT} . \qquad (1.11)$$

СПМ дискретного случайного процесса периодически (с периодом $1/T$ Гц) размножает по оси частот СПМ исходного непрерывного во времени процесса в предположении, что она локализована в интервале частот $-1/2T \le f \le 1/2T$.

Обратное ДВПФ имеет вид

$$r_{xx}[m] = \int_{-1/2T}^{1/2T} P_{xx}(f) e^{j2p\, f mT} df , \qquad (1.12)$$

поэтому при $m=0$ имеем

$$r_{xx}[0] = <|x[n]|^2> = \int_{-1/2T}^{1/2T} P_{xx}(f) df .$$

Последнее соотношение оправдывает трактовку $P_{xx}(f)$ как распределение средней мощности процесса по частоте. Пару преобразований Фурье (1.11) и (1.12) называют соотношениями Винера - Хинчина для случая дискретного времени. Поскольку $r_{xx}[-m] = r_{xx}^*[m],$ то СПМ должна быть действительной и неотрицательной функцией. Если АКП – действительная функция, то $r_{xx}[-m] = r_{xx}[m],$ и СПМ можно представить в форме

$$P_{xx}(f) = 2T \sum_{m=0}^{\infty} r_{xx}[m]\cos(2pfmT), \qquad (1.13)$$

а это означает четность СПМ как функции частоты, т.е. $P_{xx}(-f) = P_{xx}(f)$.

Если стационарный случайный процесс обладает свойством эргодичности, то процедуру усреднения по ансамблю при вычислении среднего значения и автокорреляции можно заменить усреднением по времени с использованием одной единственной реализации процесса.

Допущение об эргодичности позволяет ввести еще одно определение СПМ:

$$P_{xx}(f) = \lim_{M \to \infty} < \frac{1}{(2M+1)T} \left| T \sum_{n=-M}^{M} x[n] e^{-j2p\, f nT} \right|^2 >. \qquad (1.14)$$

Эта эквивалентная (1.12) форма СПМ получается путем статистического усреднения квадрата модуля ДВПФ взвешенной совокупности данных, поделенного на длину записи данных, при увеличении числа отсчетов данных до бесконечности. Метод определения СПМ на основе оценки автокорреляционной последовательности называют косвенным (коррелограммным), поскольку случайный процесс $x(n)$ непосредственно не используется для оценки СПМ. Определение СПМ по формуле (1.14) называют прямым методом (периодограммным), т.к. процесс $x(n)$ непосредственно используется в расчете СПМ.

1.4. Коррелограммный метод оценки СПМ

Рассмотрим подробнее практическую реализацию коррелограммного метода оценивания СПМ. Автокорреляционная последовательность $r_{xx}[m]$ эргодического процесса как предел среднего по времени определяется соотношением

$$r_{xx}[m] = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x[n+m] x^*[n]. \qquad (1.15)$$

На практике эта последовательность, как правило, не известна и поэтому должна оцениваться по имеющейся конечной последовательности данных.

Предположим, что мы располагаем *N* отсчетами данных $x[n], n = \overline{0,\ldots,N-1}$, тогда одним из вариантов соотношения для оценки *АКП* может быть, например, следующее:

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n], \tag{1.16}$$

применимое при $0 \le m \le N-1$..

При отрицательных значениях индекса m значения *АКП* получаются из свойства сопряженной симметрии $\hat{r}_{xx}[-m] = \hat{r}^*[m]$. Таким образом, (*2N-1*) значений *АКП* могут быть оценены по *N* отсчетам данных. Дискретная последовательность $\hat{r}_{xx}[m]$ является несмещенной оценкой истинной *АКП*, поскольку

$$< \hat{r}_{xx}[m] >= \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} < x[n+m]x^*[n] > = r_{xx}[m].$$

При увеличении *N* значение дисперсии оценки $\hat{r}_{xx}[m]$ стремится к нулю, поэтому это статистически состоятельная оценка *АКП* [2].

Другой вариант соотношения для оценки *АКП* имеет вид

$$\check{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n], 0 \le m \le N-1. \tag{1.17}$$

Эта оценка отличается от $\hat{r}_{xx}[m]$ только нормирующим множителем $\check{r}_{xx}[m] = \frac{N-|m|}{N} \hat{r}_{xx}[m]$, поэтому при конечном *N* она является смещенной, поскольку

$$< \check{r}_{xx}[m] >= (1 - \frac{|m|}{N}) r_{xx}[m].$$

Для типичных приложений средний квадрат ошибки будет, как правило, больше для оценки $\hat{r}_{xx}[m]$, чем для оценки $\check{r}_{xx}[m]$. По этой и ряду других причин [1] предпочтение часто отдается смещенной оценке АКП.

Суммирование, предусматриваемое в выражениях (1.16) и (1.17) можно записать как линейную свертку

$$\sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n] = x[n] * x^*[-n].$$

Следовательно, для вычисления оценок дискретной автокорреляции можно применить эффективные в вычислительном отношении процедуры, такие как «быстрая свертка», в которых используются алгоритмы БПФ.

Коррелограммный метод оценивания СПМ есть подстановка в соотношение (1.11) конечной последовательности значений оценки автокорреляции (коррелограммы) на место бесконечной последовательности неизвестных истинных значений АКП. Так, при подстановке несмещенной оценки АКП $\hat{r}_{xx}[m]$ с максимальными значениями временного сдвига $\pm L$ получается оценка СПМ в виде

$$\hat{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^{L} \hat{r}_{xx}[m] e^{-j2p\, f mT}, -\frac{1}{2T} \le f \le \frac{1}{2T}. \qquad (1.18)$$

Максимальный индекс временного сдвига L обычно ограничивают величиной $L \approx N/10$. Причина выбора такого максимального значения – стремление устранить большие значения дисперсии, связанные с оценками автокорреляции при больших временных сдвигах.

Среднее значение оценки $\hat{P}_{xx}(f)$ определяется соотношением

$$< \hat{P}_{xx}(f) >= T \sum_{m=-L}^{L} < \hat{r}_{xx}[m] > e^{-j2p\, f mT} =$$

$$= T \sum_{m=-L}^{L} r_{xx}[m] e^{-j2p\, f mT} = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m] r_{xx}[m] e^{-j2p\, f mT}, \qquad (1.19)$$

где прямоугольная функция (окно) единичной амплитуды

$$w[m]=\begin{cases} 1, -L \le m \le L, \\ 0, m<-L; m>L. \end{cases}$$

Соотношение (1.19) есть ДВПФ произведения последовательностей АКП $r_{xx}[m]$ и $w[m]$, которое выражается через свертку ДВПФ сомножителей:

$$<\hat{P}_{xx}(f)>= P_{xx}(f) * D_{2L+1}(f) \ , \qquad (1.20)$$

где ДВПФ прямоугольного окна

$$D_{2L+1}(f) = \frac{\sin(2L+1)pfT}{\sin pfT} .$$

Таким образом, среднее значение оценки $\hat{P}_{xx}(f)$ отличается от истинного спектра $P_{xx}(f)$, поскольку это свертка истинного спектра и спектра прямоугольного окна.

Для уменьшения эффекта просачивания (растекания) спектра из-за влияния прямоугольного окна и уменьшения смещения оценки в соотношение (1.18) следует ввести весовую функцию (корреляционное окно) $w[m]$, $-L \le m \le L$, симметричное относительно начала отсчета. Тогда оценка СПМ, получаемая на основе коррелограммного метода, принимает форму

$$\hat{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^{L} w[m]\hat{r}_{xx}[m]e^{-j2p\ fmT} . \qquad (1.21)$$

Среднее значение этой оценки будет сверткой истинного спектра и спектра окна $W(f)$:

$$<\hat{P}(f)>= T \sum_{m=-L}^{L} w[m]r_{xx}[m]e^{-j2p\ fmT} = P_{xx}(f) * W(f).$$

Правильный выбор окна позволит уменьшить растекание спектра и его смещение.

Показано [3], что дисперсия коррелограммной оценки СПМ определяется соотношением

$$\mathrm{var}[\hat{P}_{xx}(f)] \cong \left(\frac{1}{N} \sum_{m=-L}^{L} w^2[m] \right) P_{xx}^2(f)$$

поэтому уменьшение дисперсии связано с соответствующим выбором параметра L и формы корреляционного окна.

Для вычисления оценки СПМ, определяемой на сетке из K частот $f_i = i/KT$, где $0 \le i \le K-1$, можно использовать алгоритм БПФ. Обычно значение $K=2^M >> L$, а это требует доопределения $\hat{r}_{xx}^*(m) = 0$, при $L<m£K-L-1$ и $\hat{r}_{xx}(K-m) = \hat{r}_{xx}^*(m)$ при $0<m£L$.

1.5. Периодограммный метод оценки СПМ

Как уже отмечалось выше, для эргодического случайного процесса эквивалентным определением СПМ является следующая дискретно-временная форма:

$$P_{xx}(f) = \lim_{N\to\infty} < \frac{1}{(2N+1)T}\left| T\sum_{n=-N}^{N} x[n]e^{-j2p\,fnT}\right|^2 >.$$

При наличии конечного множества данных $x[n]$, $0 \le n \le N-1$ и единственной реализации это соотношение преобразуется в СПМ выборки или периодограмму:

$$\tilde{\tilde{P}}_{xx}(f) = \frac{1}{NT}\left| T\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2p\,fnT}\right|^2 = \frac{T}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2p\,fnT}\right|^2. \qquad (1.22)$$

Можно показать, что периодограмма совпадает с коррелограммной оценкой СПМ при использовании смещенной оценки корреляции $\check{r}_{xx}[m]$ и полного диапазона корреляционного сдвига ($-N+1 \le m \le N-1$):

$$\tilde{\tilde{P}}_{xx}(f) = \frac{T}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2p\,fnT}\right|^2 = T\sum_{n=0}^{N-1} \check{r}_{xx}[m]e^{-j2p\,fnmT}.$$

Показано [2], что среднее значение оценки $\tilde{\tilde{P}}_{xx}(f)$ такое же, как и у коррелограммной оценки, т.е. представляет свертку истинной СПМ и спектра треугольного окна, дисперсия периодограммы не стремится к нулю при $N \to \infty$, а среднеквадратичное значение периодограммы при любом N сравнимо с истинной СПМ $P_{xx}(f)$:

$$< \tilde{\tilde{P}}_{xx}(f) >= P_{xx}(f) * \frac{1}{N} D_N^2(f) \ ,$$

$$\mathrm{var}\left\{ \tilde{\tilde{P}}_{xx}(f) \right\} = P_{xx}^2(f) \left\{ 1 + \left(\frac{\sin 2pfTN}{N \sin 2pfT} \right)^2 \right\}.$$

Следовательно, выборочный спектр не является состоятельной (статистически устойчивой) оценкой СПМ. На рис.1.7 – 1.10 показаны периодограммы, вычисленные по (1.22), для суммы комплексной синусоиды с амплитудой, равной 1,0 и частотой 0,2 и белого нормального (гауссова) шума с дисперсией, равной 1,0 при N=50, 100, 200, 500 соответственно. Из сравнения рис. 1.7 – 1.10 видно, что с ростом N дисперсия спектральной оценки не уменьшается, а значения периодограммы начинают быстрее флюктуировать.

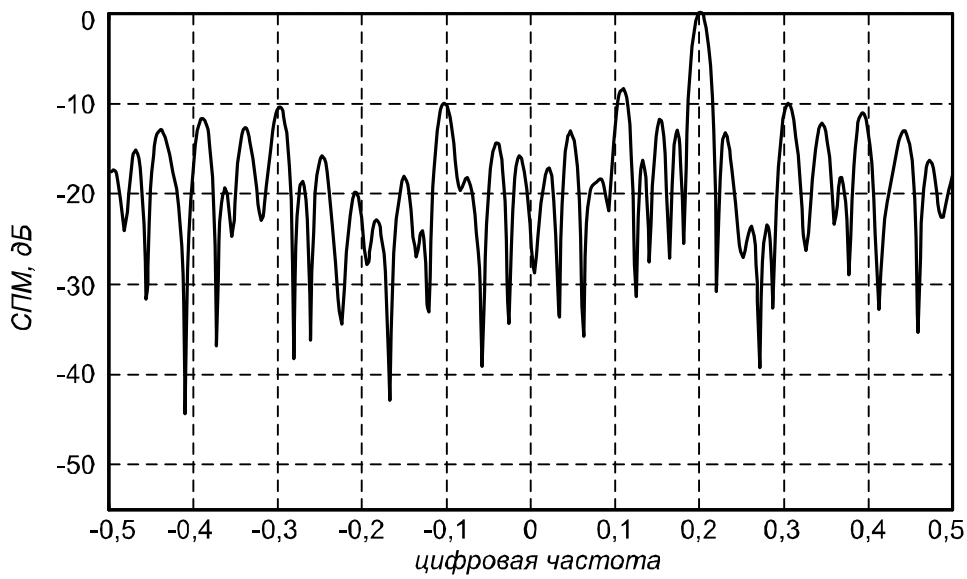


Рис. 1.7. Периодограмма суммы комплексной синусоиды с амплитудой, равной 1,0 и частотой 0,2 и белого нормального (гауссова) шума с дисперсией, равной 1,0 при N=50

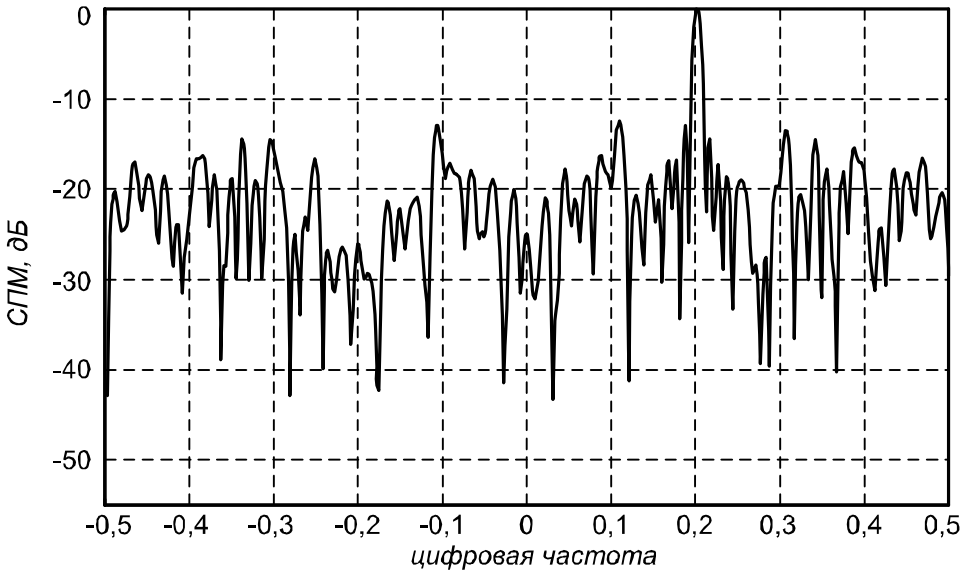


Рис. 1.8. Периодограмма суммы комплексной синусоиды с амплитудой, равной 1,0 и частотой 0,2 и белого нормального (гауссова) шума с дисперсией, равной 1,0 при N=100

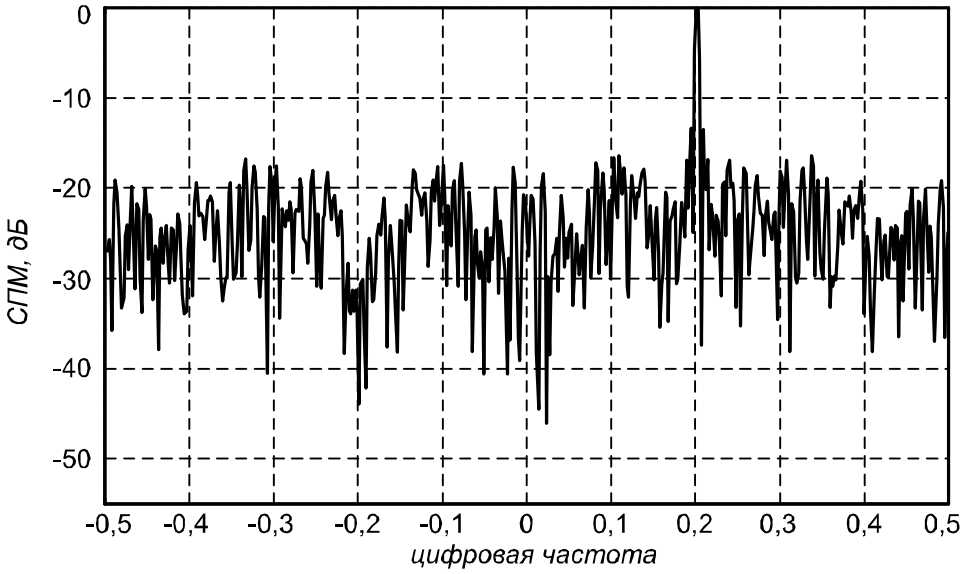


Рис. 1.9. Периодограмма суммы комплексной синусоиды с амплитудой, равной 1,0 и частотой 0,2 и белого нормального (гауссова) шума с дисперсией, равной 1,0 при N=200

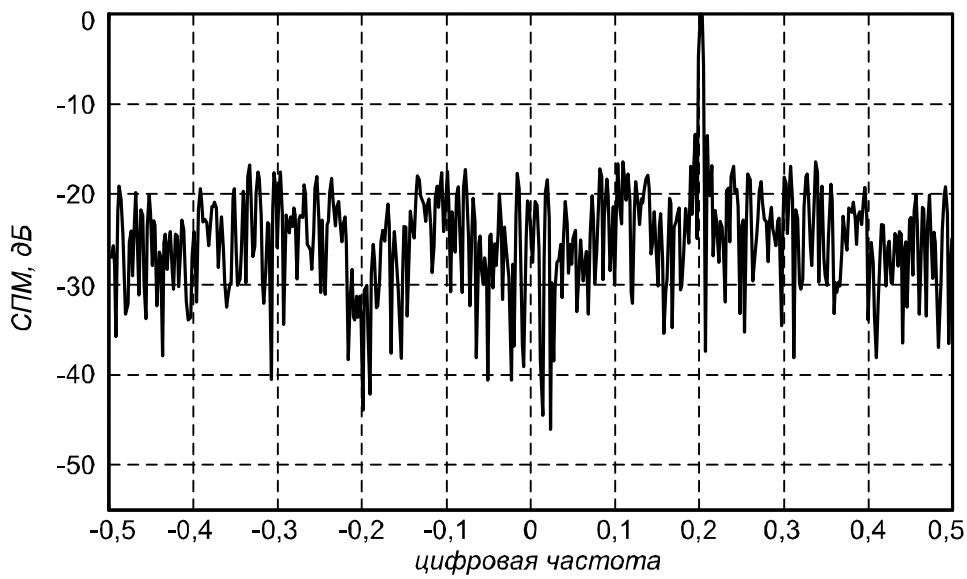


Рис. 1.10. Периодограмма суммы комплексной синусоиды с амплитудой, равной 1,0 и частотой 0,2 и белого нормального (гауссова) шума с дисперсией, равной 1,0 при N=500

Предложен ряд модификаций соотношения (1.22), суть которых сводится к сглаживанию оценки путем введения псевдоусреднения по некоторому ансамблю [1]. Наибольшую популярность в настоящее время получил метод Уэлча, идея которого состоит в образовании псевдоансамбля периодограмм за счет разбиения наблюдаемых данных на перекрывающиеся сегменты и обработки каждого сегмента с помощью окна данных.

Если запись комплексных данных $x[n]$, $0 \le n \le N-1$ разбита на P сегментов по D отсчетов в каждом со сдвигом S отсчетов между соседними сегментами $(S \le D)$, то максимальное число сегментов P есть целая часть величины $(N-D)/S+1$. После взвешивания окном $w[n]$ сегмент с номером $p(0 \le p \le P-1)$ будет содержать отсчеты

$$x^{(p)}[n] = w[n]x[n+pS],\ 0 \le n \le D-1.$$

Выборочный спектр p - го сегмента определяется выражением

$$\overset{\approx}{P}{}_{xx}^{(p)}(f) = \frac{1}{UDT}\left|X^{(p)}(f)\right|^2, \qquad (1.23)$$

где $X^{(p)}(f) = T\sum_{n=0}^{D-1} x^{(p)}[n]e^{-j2p\,fnT}$ - ДВПФ сегмента, $U = T\sum_{n=0}^{D-1} w^2[n]$ - энергия окна. Среднее значение сегментных периодограмм определяет оценку *СПМ*:

$$\tilde{\tilde{P}}_{xx}(f) = \frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}\tilde{\tilde{P}}_{xx}^{(p)}(f). \tag{1.24}$$

Уэлч, в частности, предложил использовать окно Ханна и 50%-ное перекрытие сегментов, которое обеспечивало очень эффективные реализации его метода на основе алгоритма БПФ. Кроме того, при 50%-ном перекрытии сегментов все данные используются дважды, за исключением $D/2$ отсчетов на каждом конце исходной N-точечной последовательности данных, а это выравнивает обработку большинства отсчетов данных, поскольку те отсчеты, которые имели малые веса на одном сегменте, получают большие веса на следующем сегменте. Анализ поведения периодограммы Уэлча для гауссовских процессов показал, что минимальная дисперсия для окна Ханна достигается при 65%-ном перекрытии, при этом величина дисперсии увеличивается приблизительно на 8% при использовании 50%-ного перекрытия сегментов. Дисперсия периодограммы Уэлча примерно обратно пропорциональна числу сегментов, т.е.

$$\mathrm{var}\{\tilde{\tilde{P}}_{xx}(f)\} = \frac{P_{xx}^2(f)}{P} \tag{1.25}$$

в предположении независимости сегментов (хотя перекрытие сегментов приводит, конечно, к некоторой их взаимозависимости). Благодаря перекрытию по заданной записи данных можно сформировать большее число сегментов и уменьшить величину дисперсии. На рис. 1.11 представлена периодограмма Уэлча суммы комплексной синусоиды с амплитудой, равной 1,0 и частотой 0,2 и белого нормального (гауссова) шума с дисперсией, равной 1,0 при N=500, D=50, S=25 (19 сегментов).

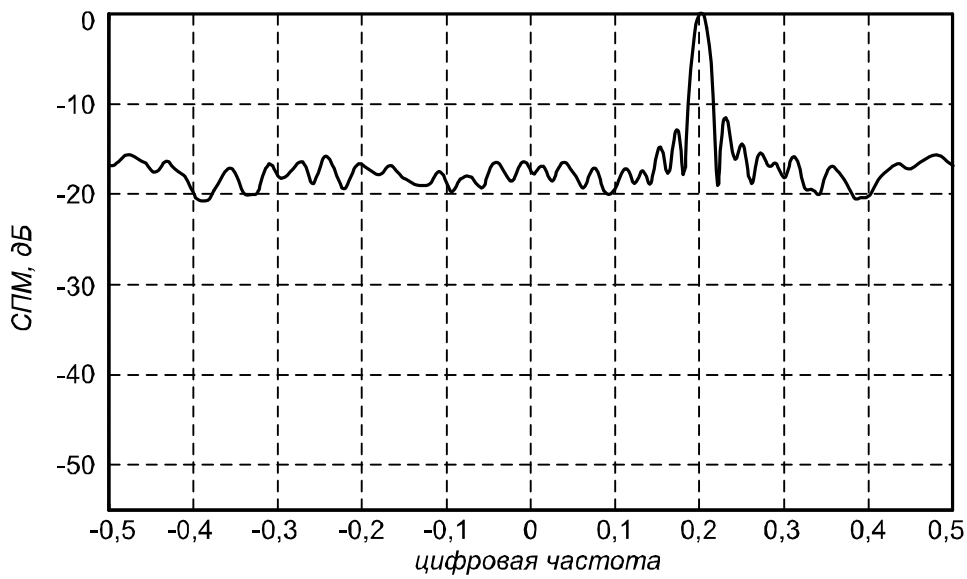


Рис. 1.11. Периодограмма Уэлча суммы комплексной синусоиды с амплитудой, равной 1,0, и частотой 0,2 и белого нормального (гауссова) шума с дисперсией, равной 1,0, при N=500, D=50, S=25 (19 сегментов)

1.6. Использование окон при спектральных измерениях

Один из важных вопросов, который является общим для всех классических методов спектрального оценивания, связан с применением функций окна.

Заметим, что конечную запись данных $x(n)$ из N отсчетов можно представить как некоторую часть исходной бесконечной последовательности $x_u(n)$, видимую через прямоугольное окно $w(n)$, в форме произведения:

$$x[n] = x_u[n]w[n],$$

где

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

При этом мы полагаем, что все ненаблюдаемые отсчеты равны нулю независимо от того, так ли это на самом деле или нет.

ДВПФ взвешенной окном последовательности, выраженное через преобразования последовательности $x_u[n]$ и прямоугольного окна $w[n]$, равно свертке этих преобразований:

$$X(f) = X_u(f) * D_N(f),$$

где $D_N(f) = Te^{-jpfT(N-1)} \dfrac{\sin(pfTN)}{\sin(pfT)}$ - ядро Дирихле, представляющее ДВПФ прямоугольной функции. ДВПФ наблюдаемой конечной последовательности является искаженной версией ДВПФ бесконечной последовательности. Влияние прямоугольного окна на дискретно-временную синусоиду с частотой f_0 иллюстрирует рис.1.12, из которого видно, что острые спектральные пики ДВПФ исходной синусоидальной последовательности расширились из-за воздействия ДВПФ окна. При этом минимальная ширина спектральных пиков конечной последовательности ограничена шириной, определяемой главным лепестком ДВПФ окна, и не зависит от исходных данных. Боковые лепестки ДВПФ окна, называемые растеканием [просачиванием (spectral leakage)] будут изменять амплитуды соседних спектральных пиков, приводя к смещению спектральных оценок. Аналогичные искажения будут наблюдаться и в случае несинусоидальных сигналов. Просачивание приводит не только к появлению амплитудных ошибок, но может также маскировать присутствие слабых сигналов и, следовательно, затруднять их обнаружение.

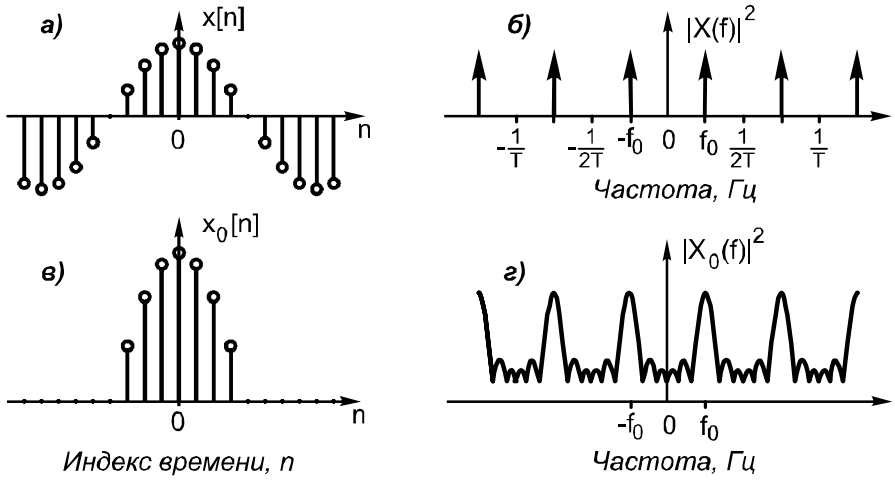


Рис.1.12. Иллюстрация эффекта растекания спектра из-за взвешивания данных: *а* – исходная синусоидальная последовательность; *б* – модуль периодического ДВПФ синусоидальной последовательности; *в* – взвешенная синусоидальная последовательность; *г* - модуль ДВПФ взвешенной синусоидальной последовательности

Предложен ряд других функций окна, имеющих меньший уровень боковых лепестков их спектра, чем в случае прямоугольного окна [14]. Однако, как правило, это достигается ценой расширения главного лепестка спектра окна. Следовательно, окно должно

выбираться с учетом компромисса между шириной главного лепестка и уровнем подавления боковых лепестков.

В таблице 1.1 приведены определения и сравнительные характеристики некоторых используемых N -точечных функций окна, симметричных относительно n=0. Именно такие окна используются в качестве корреляционных окон в коррелограммном методе оценки СПМ. При этом используются только окна нечетной длины с $w[0]=1$. Для окон данных (в периодограммном методе оценки СПМ) применяются окна четной и нечетной длины, начинающиеся с n=0 и имеющие симметрию относительно точки *(N-1)/2*. При этом у окон четной длины точка симметрии находится посередине между отсчетами. Из всех приведенных окон самый узкий главный лепесток имеет спектральная характеристика прямоугольного окна, однако, у него самый высокий уровень боковых лепестков.

Таблица 1.1. Характеристики оконных функций

Окно	Дискретно-временная функция *w(n)*, $-(N-1)/2 \le n \le (N-1)/2$	Максимальный уровень боковых лепестков (дб)	Ширина полосы по уровню 0,5 мощности относительно 1/NT Гц
Прямоугольное	1	-13,3	0,89
Треугольное (Бартлетта)	$1-\frac{2\lvert n\rvert}{N}$	-26,5	1,28
Ханна	$0,5+0,5\cos(\frac{2p\ n}{N})$	-31,5	1,44
Хэмминга	$0,54+0,46\cos(\frac{2p\ n}{N})$	-43	1,3

На рис. 1.13 представлены типичные дискретно-временные функции окна (слева) и логарифм модуля их ДВПФ (справа) для прямоугольного окна, треугольного окна, окна Ханна и окна Хэмминга.

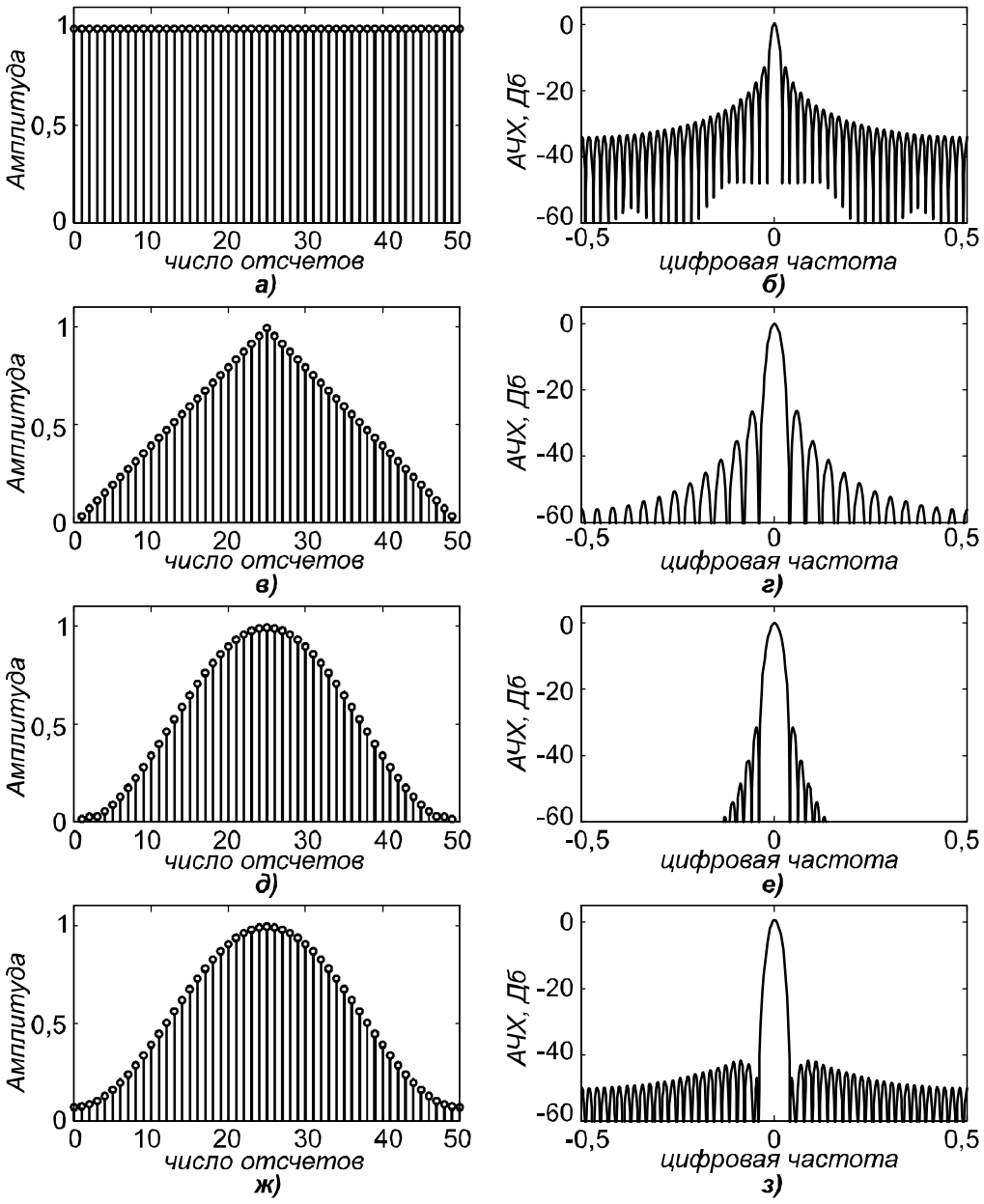


Рис.1.13. Типичные дискретно-временные функции окна (слева) и логарифм модуля их ДВПФ (справа): *а-б* -прямоугольное окно; *в-г* -треугольное окно; *д-е* -окно Ханна; *ж-з*- окно Хэмминга.

1.7. Разрешение и произведение «устойчивость´длительность´ширина полосы»

Для детерминированного сигнала с длительностью $T_e = NT$ секунд произведение длительности на ширину полосы удовлетворяет условию $T_e B_e = 1$. Поэтому разрешение спектральной плотности энергии, полученной по конечной последовательности отсчетов детерминированного сигнала, равно B_e герц, т.е. приблизительно равно величине, обратной интервалу записи данных. Для того чтобы определить разрешение спектральной плотности мощности, получаемой по конечной последовательности отсчетов случайного сигнала, произведение длительности на ширину полосы необходимо несколько видоизменить, с тем чтобы учесть случайный характер сигнала, влияющий на статическое “качество” спектральной оценки.

Одной из подходящих модификаций этого произведения является произведение “устойчивость×длительность×ширина полосы” $QT_e B_e$, где Q-статистический показатель качества, определяемый как отношение дисперсии оценки СПМ к квадрату математического ожидания этой оценки

$$Q = \frac{\operatorname{var}\left\{\hat{P}(f)\right\}}{\left[<\hat{P}(f)>\right]^2}. \tag{1.26}$$

Показатель качества Q - это инвертированное отношение сигнал/шум (SNR), которое непосредственно связано со статистической устойчивостью спектральной оценки. Значения Q, много меньшие единицы, соответствуют гладким спектральным оценкам с малой дисперсией. Значения Q, много большие единицы, соответствуют весьма зашумленным спектральным оценкам с большой дисперсией. Эквивалентная ширина полосы B_e замеряется теперь величиной B_s- эффективной статистической шириной полосы, которая в случае спектрального окна $W(f)$ определяется выражением

$$B_s = \frac{\left[\int_{-0.5T}^{0.5T} W(f)df\right]^2}{\int_{-0.5T}^{0.5T} W^2(f)df}.$$

Величина B_s характеризует ширину полосы эквивалентного прямоугольного окна с тем же значением отношения дисперсии к квадрату среднего значения на его выходе, как и у окна $W(f)$ в том случае, когда на его вход подан белый шумовой процесс. Однако обе эти величины можно связать соотношением $B_s = aB_e$, где α выбирается в зависимости от окна, так для прямоугольного окна a*=0.8*, для окна Хана - *1.3* и для окна Хемминга - *1.4*. Ширина полосы B_s позволяет грубо судить о разрешении спектральной оценки

Показано [1], что для гауссовского случайного процесса условие

$$QT_eB_s \geq 1. \qquad (1.27)$$

применимо ко всем классическим процедурам спектрального оценивания. Если $T_eB_s \cong 1$, то, как правило $QT_eB_s > 1$,. С другой стороны, если значение произведения T_eB_s выбрано значительно большим единицы, то для всех классических спектральных оценок будет выполнятся приближенное равенство

$$QT_eB_s \approx 1. \qquad (1.28)$$

Произведение «устойчивость×длительность×ширина полосы» устанавливает взаимосвязь между тремя фундаментальными параметрами, от которых зависят характеристики спектральных оценок. Для заданной записи данных длительностью T_e невозможно получить оценки, которые одновременно обладают высоким разрешением (малыми значениями B_S) и высокой устойчивостью (малыми значениями Q). Например, если необходимо, чтобы дисперсия спектральной оценки составляла десятую часть от ее среднего значения, то Q=0,1 и достижимое разрешение будет равно B_s»$10/T_e$ герц. Это значение в 10 раз больше эмпирического значения $1/T_e$ для разрешения детерминированного сигнала. Этот пример подчеркивает важность принятия такого компромиссного решения, которое не нарушало бы баланс между статистической устойчивостью и разрешением, которые требуются от всех методов спектрального

оценивания. Заметим, что увеличение числа отсчетов за счет увеличения частоты дискретизации при неизменном интервале T_e не будет влиять на максимально достижимое разрешение, так как на него влияет только длина записи данных, но не число отсчетов. На рис.1.14 и 1.15 показаны периодограммы Уэлча суммы двух комплексных синусоид с амплитудами, равными 1,0 и частотами 0,2 и 0,24 и белого нормального (гауссова) шума с дисперсией, равной 1,0 при N=500, D=50, S=25 (19 сегментов) и при N=500, D=250, S=125 (3 сегмента) соответственно, которые иллюстрируют соотношение между устойчивостью и разрешением. Рис. 1.14 соответствует спектральной оценке с большей устойчивостью, но меньшим разрешением, а рис. 1.15 соответствует спектральной оценке с меньшей устойчивостью, но большим разрешением.

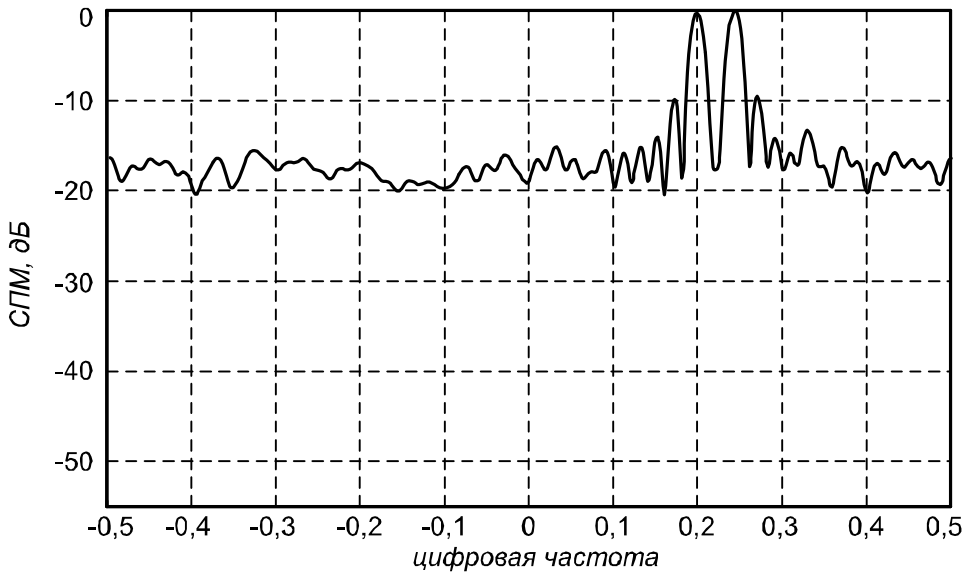


Рис. 1.14. Периодограмма Уэлча суммы двух комплексных синусоид с амплитудами, равными 1,0 и частотами 0,2 и 0,24 и белого нормального (гауссова) шума с дисперсией, равной 1,0 при N=500, D=50, S=25 (19 сегментов)

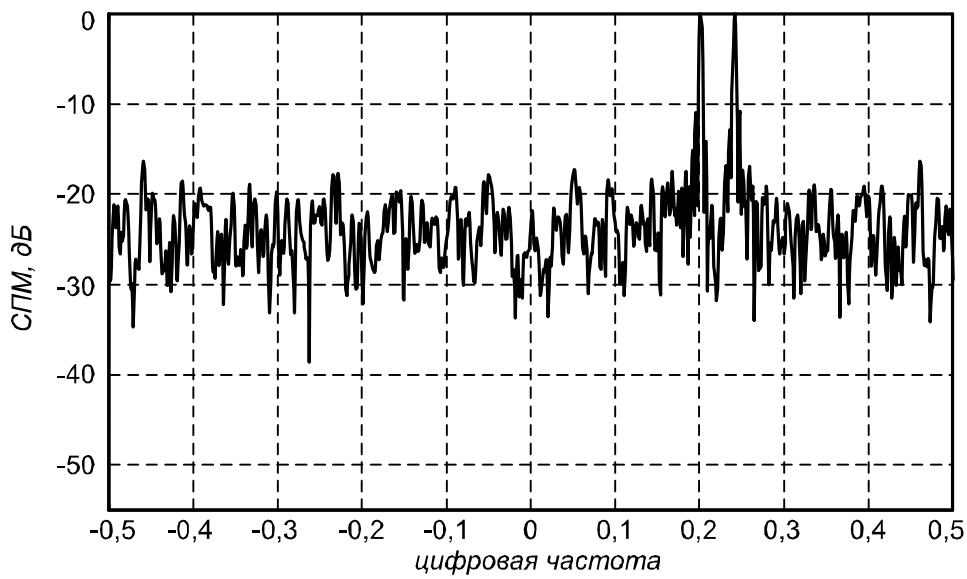


Рис. 1.15. Периодограмма Уэлча суммы двух комплексных синусоид с амплитудами, равными 1,0 и частотами 0,2 и 0,24 и белого нормального (гауссова) шума с дисперсией, равной 1,0 при N=500, D=250, S=125 (3 сегмента).

1.8. Классические спектральные оценки тест-последовательности

Для того, чтобы охарактеризовать поведение каждой спектральной оценки при анализе короткой последовательности данных Марпл [1] предложил использовать искусственно синтезированную последовательность данных с заранее известными свойствами. Эта тест-последовательность данных содержит 64 отсчета некоторого комплекснозначного процесса, состоящего из 4-х комплексных синусоид и комплексного аддитивного окрашенного шума. Истинный спектр тест-последовательности показан на рис. 1.16.

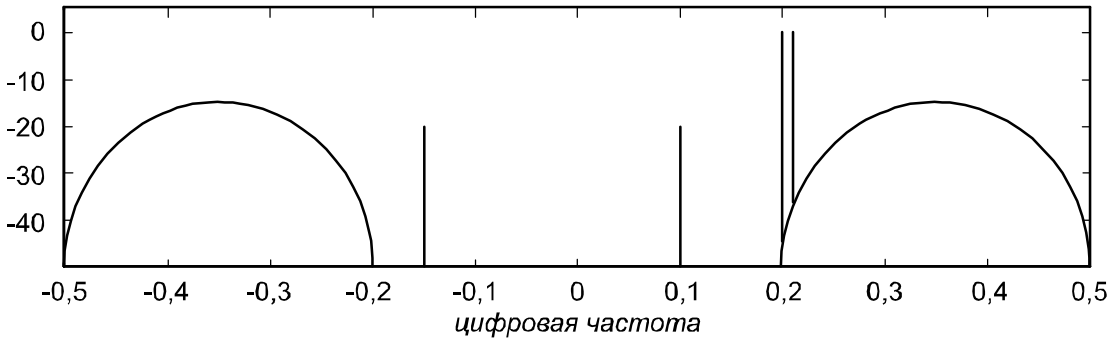
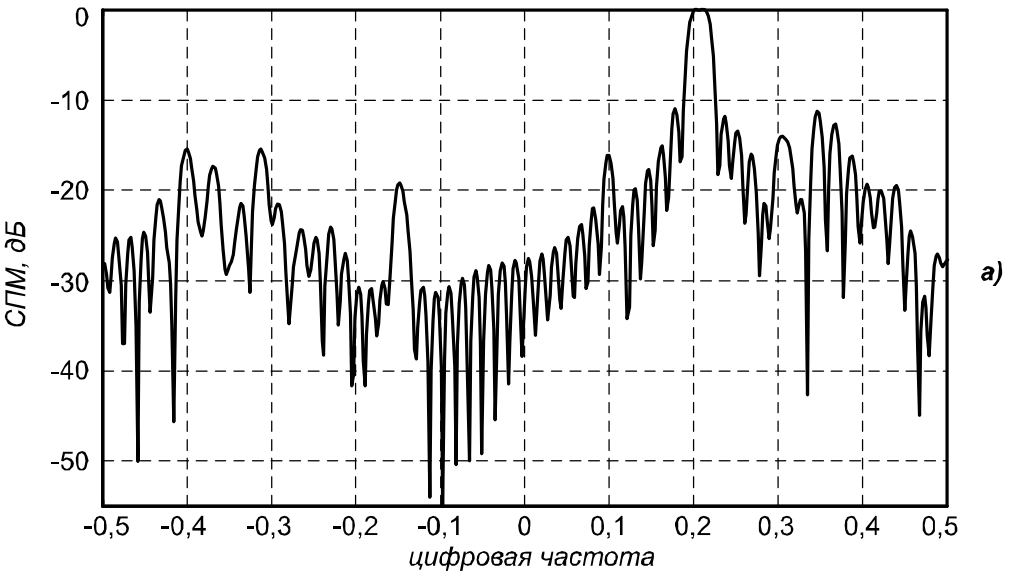


Рис. 1.16. Истинный спектр процесса, соответствующего тест-последовательности данных

Частоты двух синусоид выбраны очень близкими друг к другу(0,2 и 0,21) с тем, чтобы проверить разрешающую способность той или иной спектральной оценки. Мощность двух более слабых синусоид с частотами 0,1 и –0,15 на 20 дб меньше мощности двух более

сильных. Эти слабые синусоиды используются для испытания способности спектральных оценок обеспечить обнаружение слабых компонент сигналов на фоне сильных сигналов. Окрашенный шумовой процесс был сформирован пропусканием двух независимых белых шумов через идентичные фильтры с частотными характеристиками типа приподнятой косинусоиды для раздельного получения действительной и мнимой составляющих шумового процесса в тест-последовательности. Высота линий, характеризующих синусоидальные составляющие, выбрана так, чтобы отображать мощность каждой синусоиды относительно мощности окрашенного шума. Следовательно, мощность каждой из сильных синусоид превышает мощность шума, а мощность каждой из 2-х слабых синусоид меньше мощности шума.

Приведем примеры классических периодограммного и коррелограммного методов спектрального оценивания СПМ тест-последовательности. На рис. 1.17 приведены две периодограммы тест-последовательности Марпла. Периодограмма этой последовательности, соответствующая максимальному разрешению и минимальной устойчивости, показана на рис.1.17а. Она получена для случая только одного сегмента (полной записи данных) без применения окна. Заметим, что близкие по частоте синусоиды с разносом 0,01 не разрешены, поскольку предельное разрешение в данном случае составляет величину 1/64=0,0156. Слабая синусоида с частотой 0,1 маскируется боковыми лепестками сильных синусоид. На рис. 1.17б показана гладкая усредненная периодограмма с низким разрешением, которая получена разбиением записи данных на три сегмента по 32 отсчета в каждом, взвешенным окном Хэмминга, с перекрытием сегментов, равным 16 отсчетов. На этой периодограмме отчетливо видны слабые синусоиды.



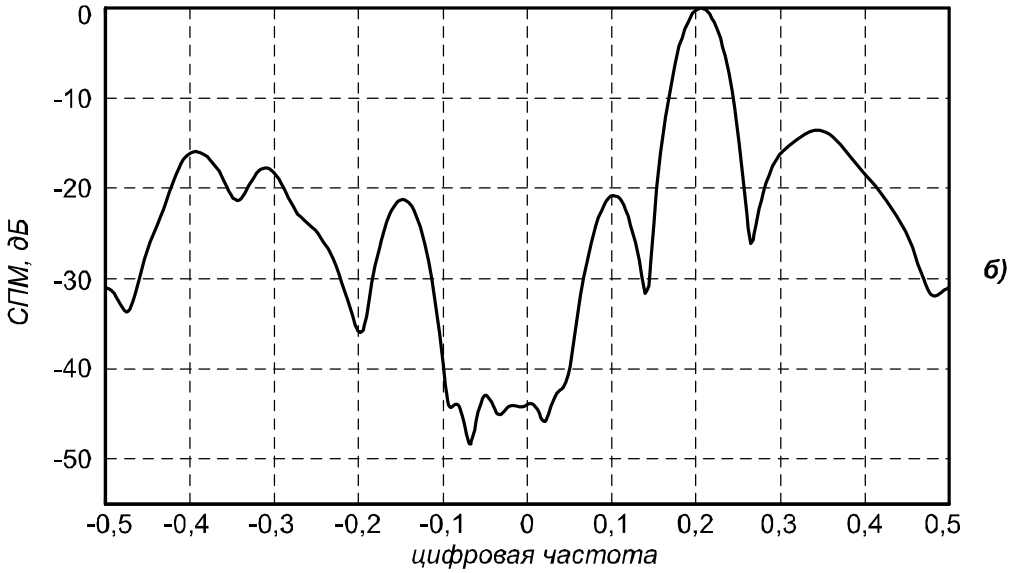
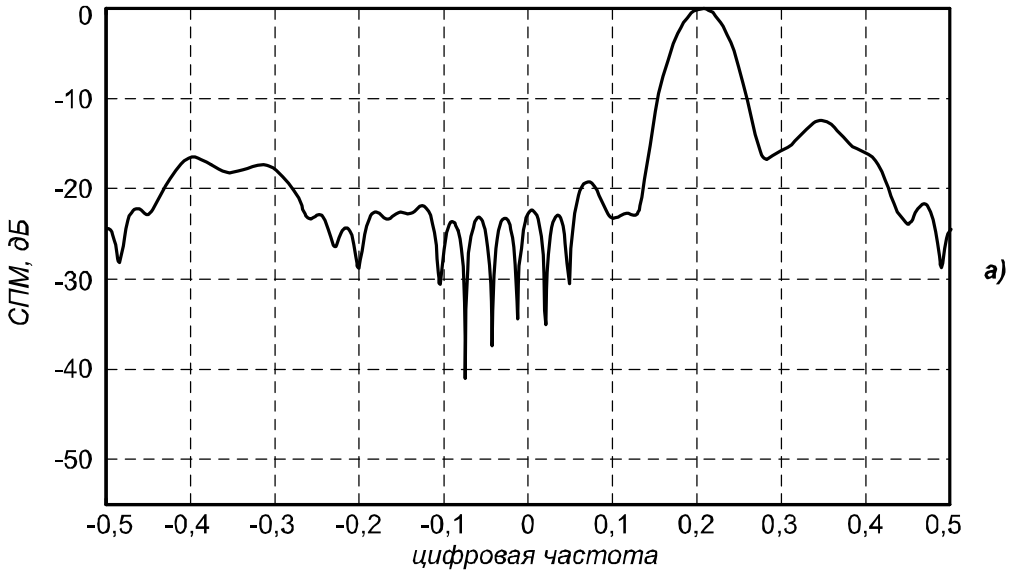
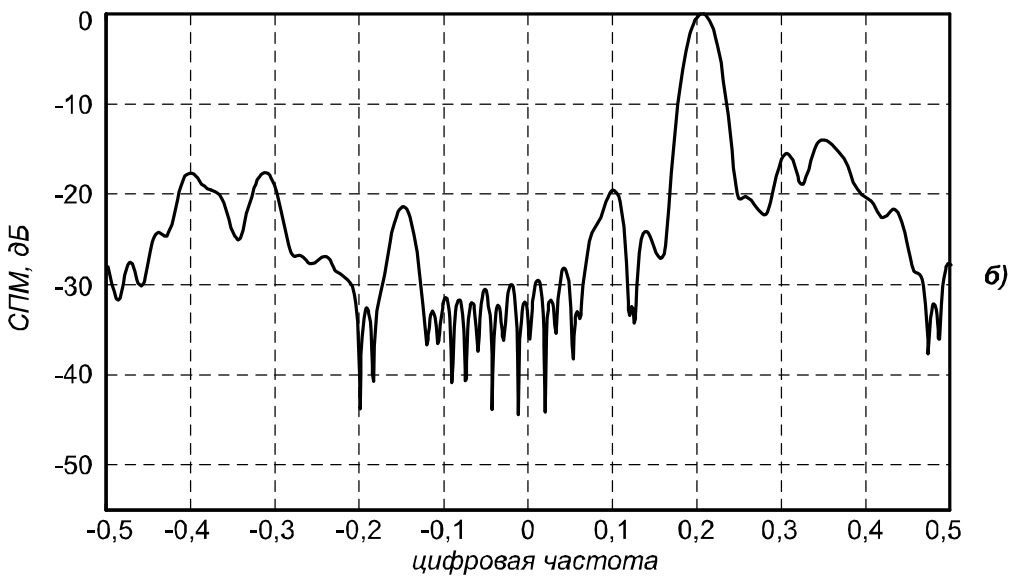


Рис. 1.17. Периодограммные оценки СПМ для 64-точечной тест-последовательности: а- один сегмент, окно не применялось; б – три сегмента, окно Хэмминга

Коррелограммные оценки СПМ тест-последовательности показаны на рис.1.18а,б для 16 и 32 значений автокорреляции соответственно и взвешивания окном Хэмминга. Графики на рис 1.18 дают полное представление о взаимосвязи между разрешением и гладкостью оценки.





б)

Рис. 1.18. Коррелограммные оценки СПМ для 64-точечной тест-последовательности: а – 16 значений автокорреляции, окно Хэмминга; б – 32 значения автокорреляции, окно Хэмминга

Заметим, что если не известно как выбирать компромиссное решение относительно устойчивости и разрешения оценок, то рекомендуется начать с выбора максимальной устойчивости (наиболее гладкой оценки), а это значит – с минимального разрешения, а затем постепенно увеличивать длину сегментов (в случае периодограммы) или число корреляционных членов (в случае коррелограммы). Эта процедура будет увеличивать дисперсию оценки и уменьшать ширину спектральных пиков (повышать разрешение). Следует продолжать указанную процедуру до тех пор, пока достигнутое разрешение не позволит передать наиболее тонкие и важные детали спектра и дальнейшее увеличение разрешения к существенным изменениям в спектральных оценках уже не приводит.

ГЛАВА 2. СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ И АВТОРЕГРЕССИИ-СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

2.1. Параметрические модели случайных процессов

Модель временного ряда, которая пригодна для аппроксимации многих встречающихся на практике случайных процессов с дискретным временем, описывается выходом фильтра, выражаемым следующим линейным разностным уравнением с комплексными коэффициентами:

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b[k]u[n-k] = \tag{2.1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h[k]u[n-k] \quad , \tag{2.2}$$

где $x[n]$ - последовательность на выходе физически реализуемого (каузального) фильтра, $u[n]$ - входная возбуждающая последовательность (белый шум с нулевым средним и дисперсией r_w), $h[n]$ - импульсная характеристика фильтра ($h[k]=0$, при $k<0$, $h[0]=1$), $a[k]$ - коэффициенты авторегрессии, $b[k]$ - коэффициенты скользящего среднего ($b[0]=1$). Системная функция, связывающая вход и выход этого фильтра, имеет рациональную форму (отношение полиномов):

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \tag{2.3}$$

где

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a[k]z^{-k} \quad , \tag{2.4}$$

$$B(z) = 1 + \sum_{k=1}^{q} b[k]z^{-k} \quad , \tag{2.5}$$

$$H(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h[k]z^{-k} . \tag{2.6}$$

При этом полагается, что нули $A(z)$, $B(z)$ расположены внутри единичной окружности в Z-плоскости с тем, чтобы гарантировать принадлежность функции $H(z)$ устойчивому минимально - фазовому каузальному фильтру. Процесс на выходе фильтра (2.1) называют соответствующим модели авторегрессии - скользящего среднего (*АРСС*), параметры $a[k]$ характеризуют авторегрессионую часть этой модели порядка *p*, а параметры $b[k]$- ее часть, соответствующую скользящему среднему порядка *q*.

Спектральная плотность мощности для АРСС-модели имеет вид

$$P_{APCC}(f) = Tr_w \,|\, B(f) / A(f) \,|^2, \tag{2.8}$$

где

$$A(f) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a[k] \exp(-j2p\,kT\,f),$$
$$B(f) = 1 + \sum_{k=1}^{q} b[k] \exp(-j2p\,kT\,f), \tag{2.9}$$

$-\frac{1}{2T} \le f \le \frac{1}{2T}$, *T*- период взятия отсчетов.

Можно заметить, что значения *АР*-параметров $a[k]$ (k=1,2,...,p), *СС* -параметров $b[k]$ (k=1,2,...,q) и дисперсии белого шума r_w полностью характеризуют спектральную плотность мощности *АРСС*-процесса $x[n]$. Воспользуемся обозначением АРСС (*p* ,*q*) для краткого обозначения АРСС-модели с параметрами авторегрессии порядка p и параметрами скользящего среднего порядка q

Найдем соотношения, связывающие параметры АРСС-процесса с его автокорреляционной последовательностью (АКП) $r_{xx}[m]$. Домножая обе части уравнения (2.1) на $x^*[n-m]$, где *- знак комплексного сопряжения и определяя математическое ожидание, получим соотношение

$$r_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^{p} a[k] r_{xx}[m-k] + \sum_{k=0}^{q} b[k] r_{ux}[m-k], \tag{2.10}$$

в котором взаимную корреляцию между входом и выходом можно записать в виде

$$r_{ux}[i] = \langle u[n+i]x^*[n]\rangle = \langle u[n+i][u^*[n] + \sum_{k=1}^{\infty} h^*[k]u^*[n-k]\rangle =$$

$$= r_{uu}[i] + \sum_{k=1}^{\infty} h^*[k] r_{uu}[i+k].$$

Поскольку $u[k]$ - белый шум, для которого $r_{uu}[i] = r_w d[i]$, то функция взаимной корреляции между входным и выходным процессами фильтра примет вид

$$r_{ux}[i] = \begin{cases} 0, & i > 0; \\ r_w, & i = 0; \\ r_w h^*[-i], & i < 0, \end{cases}$$

Отсюда получаем окончательное выражение, связывающее параметры *АРСС*-модели и автокорреляционную последовательность процесса $x[k]$:

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} r^*_{xx}[-m], & m < 0, \\ -\sum_{k=-1}^{p} a[k] r_{xx}[m-k] + r_w \sum_{k=m}^{q} b[k] h^*[k-m], & 0 \le m \le q, \\ -\sum_{k=1}^{p} a[k] r_{xx}[m-k], & m > q, \end{cases} \qquad (2.11)$$

где учтено, что $h[0] = 1$.

АР-параметры *АРСС*-модели и автокорреляционная последовательность связаны системой линейных уравнений. Выражение (2.11) можно, например, записать для p значений индекса временного сдвига $q+1 \le m \le q+p$ и затем представить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[q] & r_{xx}[q-1] & \cdot & \cdot & \cdot & r_{xx}[q-p+1] \\ r_{xx}[q+1] & r_{xx}[q] & \cdot & \cdot & \cdot & r_{xx}[q-p+2] \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ r_{xx}[q+p-1] & r_{xx}[q+p-2] & \cdot & \cdot & \cdot & r_{xx}[q] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d[1] \\ d[2] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d[p] \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{xx}[q+1] \\ r_{xx}[q+2] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{xx}[q+p] \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Таким образом, если задана автокорреляционная последовательность для $q-p+1 \le m \le q+p$, то *АР*-параметры можно найти отдельно от *СС* - параметров как решение системы линейных уравнений (2.12). Уравнения (2.12) называются *нормальными уравнениями Юла-Уолкера для АРСС - процесса;* иногда их также называют *модифицированными уравнениями Юла-Уолкера*. Следует заметить, что *СС*-параметры не являются, к сожалению, решением системы линейных уравнений, поскольку в (2.12) они входят в виде сверток с коэффициентами импульсной характеристики $h[k]$, что приводит к нелинейной связи с автокорреляционной последовательностью.

Соотношения (2.12) позволяют сделать вывод о том, что для *АРСС(p,q)*- процесса задание *p* последовательных значений автокорреляционной функции позволяет однозначно продолжить ее до бесконечности с помощью рекуррентного соотношения. Именно этим обстоятельством можно объяснить высокую разрешающую способность оценок СПМ на основе *АРСС*-модели в сравнении с классическими процедурами получения оценок СПМ, в которых АКП вне интервала наблюдения полагается нулевой или периодически повторяемой, что , как правило, не соответствует поведению реальной АКП.

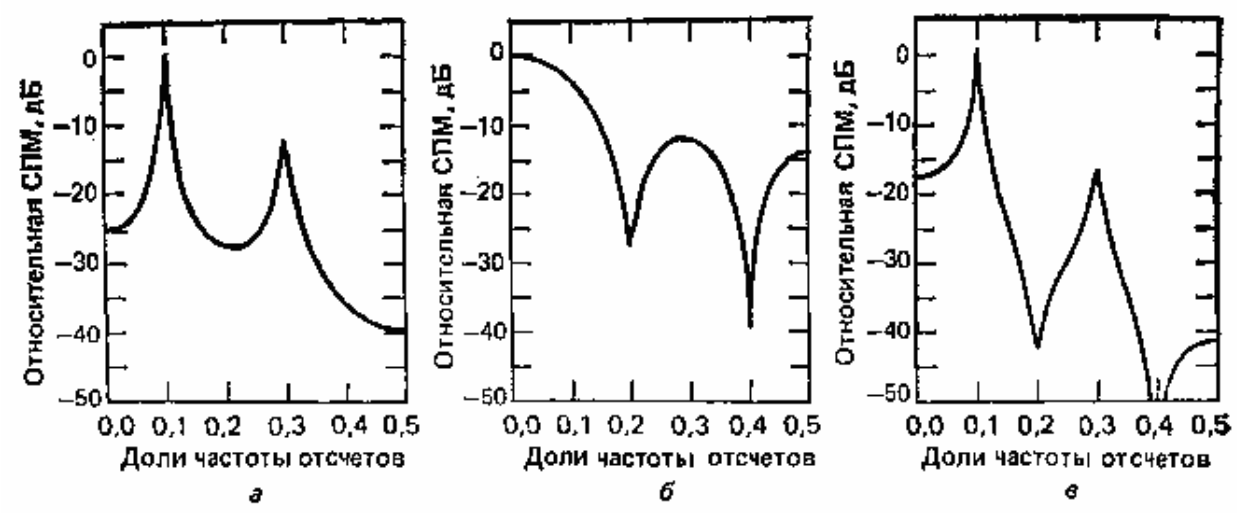


Рис.2.1. Типичные параметрические модели спектра: *а* — АР (4)-спектр; б — СС (4) -спектр; *в* — АРСС (4, 4) -спектр

Если все *АР*-параметры, за исключением $a(0)=1$, положить равными нулю, то уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$x[n] = \sum_{k=1}^{q} b[k]u[n-k] + u[n],$$

и будет соответствовать модели процесса скользящего среднего порядка *q*, или *СС (q)*-процессу. Спектральная плотность мощности *СС*-процесса получается из (2.8) при $p=0$ в виде:

$$P_{CC}(f) = Tr_w \mid B(f) \mid^2 .$$

Соотношения связи *СС*-параметров *b(k)* и АКП получатся из (2.12) при $p=0$ в виде следующих нелинейных уравнений

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} r^*_{xx}[-m], & m < 0, \\ r_w \sum_{k=m}^{q} b[k]b^*[k-m], & 0 \le m \le q, \\ 0, & m > q. \end{cases}$$

Наконец, если в уравнении (2.1) все *СС*-параметры, кроме $b(0)=1$, положить равными нулю, получим модель процесса авторегрессии порядка *p* или *АР(p)*- процесс, подробному рассмотрению которого посвящен следующий раздел. На рис.2.1 показаны спектры типичных *АРСС*-, *СС*- и *АР*-процессов. Отметим острые пики, характерные для *АР*-

спектров, и глубокие провалы, характерные для *СС*-спектров. *АРСС*-спектр, показанный на рис.2.1в, представляет собой результат объединения *АР*- и *СС*-спектров, показанных на рис.2.1а и 2.1б. *АРСС*-спектр пригоден для моделирования как острых пиков, так и глубоких провалов.

2.2. Авторегрессионный процесс и свойства его спектра

Из всех описанных выше моделей временных рядов наибольшее внимание в технической литературе уделяется *АР*-процессам по двум причинам. Во-первых, *АР*-модель применяется для спектрального оценивания, если необходимы спектры с острыми пиками, что часто связывается с высоким частотным разрешением. Кроме того, оценки *АР*-параметров получаются из решения системы линейных уравнений, в отличие от других моделей. Итак, *АР*-процесс описывается следующим линейным разностным уравнением с комплексными коэффициентами, которое получается, если в уравнении (2.1) все *СС*-параметры, за исключением $b[0]=1$, положить равными нулю:

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]x[n-k] + u[n], \tag{2.13}$$

где $x[n]$ - *АР* - последовательность на выходе каузального фильтра, который формирует наблюдаемые данные, $u[n]$ - входная возбуждающая последовательность, соответствующая белому шуму с нулевым среднем и дисперсией r_w.

Если в уравнении (2.8) положить $q = 0$, то получим спектральную плотность мощности *АР*-процесса:

$$P_{AP}(f) = \frac{Tr_w}{|A(f)|^2} = \frac{Tr_w}{\mathbf{e}_p^H(f)\mathbf{a}\mathbf{a}^H\mathbf{e}_p(f)}, \tag{2.14}$$

где полином $A(f) = 1 + \sum_{k=1}^{p} a(k)\exp(-j2pfkT)$, вектор комплексных синусоид $\boldsymbol{e_p(f)}$ и вектор параметров $\boldsymbol{a}$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{e}_p(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j2pfT) \\ . \\ . \\ . \\ \exp(j2pfpT) \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ a[1] \\ . \\ . \\ . \\ a[p] \end{bmatrix},$$

а надстрочный символ «^{H}» означает эрмитово сопряжение (или эрмитово транспонирование) вектора, получаемое в результате комплексного сопряжения его элементов с последующей их транспозицией, т.е. образованием вектор-строки.

Полагая в (2.12) $q = 0$, получаем уравнение, связывающее автокорреляционную последовательность с параметрами автокорреляционной модели:

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a[k] r_{xx}[m-k], \ m > 0, \\ -\sum_{k=1}^{p} a[k] r_{xx}[-k] + r_w, m = 0, \\ r_{xx}^{*}[-m], \qquad m < 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Это выражение можно записать для $p+1$ значений индекса временного сдвига $0 \le m \le p$, затем представить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & . & . & . & r_{xx}[-p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & . & . & . & r_{xx}[-p+1] \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & . & . & . & r_{xx}[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a[1] \\ . \\ . \\ . \\ a[p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_w \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Таким образом, если задана автокорреляционная последовательность для $0 \le m \le p$, то *АР*-параметры можно найти в результате решения уравнений (2.16), которые называются *нормальными уравнениями Юла-Уолкера для АР-процесса*. Автокорреляционная матрица в (2.16) является теплицевой и эрмитовой, поскольку $r_{xx}^{*}[k] = r_{xx}[-k]$. Очевидно, что для *СПМ АР*-процесса справедливы следующие эквивалентные выражения:

$$P_{AP}(f) = \frac{Tr_w}{|A(f)|^2} = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k] \exp(-j2pfkT). \quad (2.17)$$

Заметим, что значения автокорреляции, соответствующие индексам временного сдвига от 0 до *p*, позволяют определить из уравнения Юла-Уолкера дисперсию белого шума r_w и *АР* - параметры $a[1], a[2], ..., a[p]$, а затем по (2.17) вычислить *АР СПМ*. Можно также рассчитать значения автокорреляции для $m > p$ по соотношению

$$r_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^{p} a[k] r_{xx}[m-k], \quad (2.18)$$

и далее воспользоваться второй частью (2.17) для вычисления *АР СПМ*, хотя это и не всегда эффективно на практике. Здесь уместно сравнить *АР СПМ* с оценкой *СПМ*, полученной классическим коррелограммным методом. Напомним, что этот метод позволяет по $p+1$ значениям автокорреляции получить оценку *СПМ* в виде

$$P_{кор}(f) = T \sum_{k=-p}^{p} r_{xx}[k] \exp(-j2pfkT).$$

Можно заметить, что в коррелограммном методе значения *АКП* вне интервала суммирования, то есть для $|k| > p$, полагаются нулевыми, в то время как для АР - оценки они экстраполируются в соответствие с (2.18). Этот факт отображен на рис.2.2. Именно применением этой ненулевой экстраполяции *АКП* при вычислении *АР СПМ* с помощью (2.17) и объясняется то высокое разрешение, которое характерно для оценок *АР СПМ*. Поскольку при получении оценок *АР СПМ* не используется обработка *АКП* с помощью функции окна, им не свойственны эффекты, вызванные наличием боковых лепестков, всегда присутствующих в классических спектральных оценках.

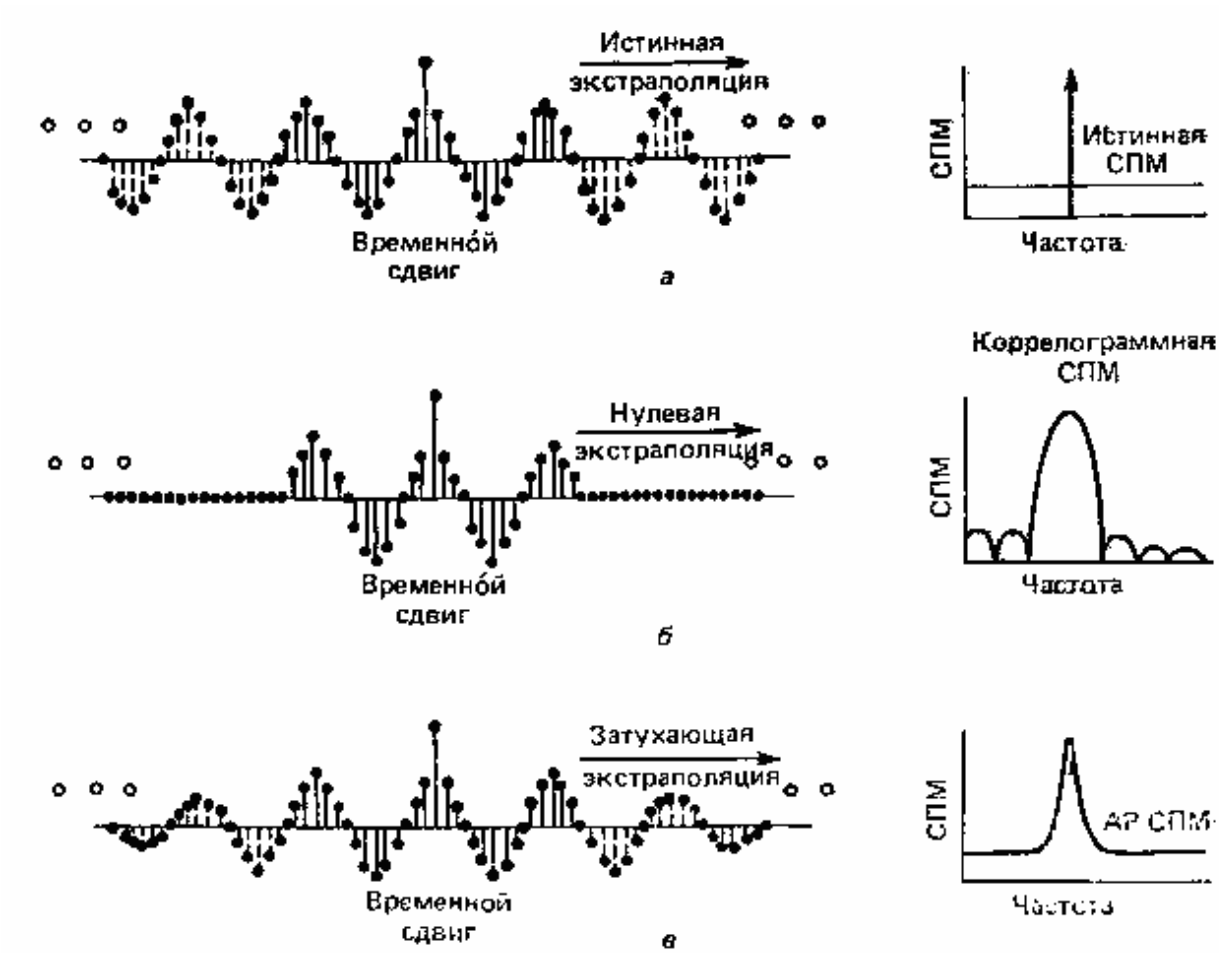


Рис.2.2. Экстраполяция автокорреляционной последовательности (АКП): *а* — исходная бесконечная АКП и истинный спектр процесса, состоящего из одной действительной синусоиды в белом шуме; *б* — нулевая экстраполяция АКЩ подразумеваемая при использовании коррелограммного метода оценивания СПМ, и соответствующая спектральная оценка; *в* — экстраполяция при использовании авторегрессионного метода оценивания СПМ и соответствующая спектральная оценка.

2.2.1. Связь с анализом, основанным на линейном предсказании

Уравнения, соответствующие линейному предсказанию, по своей структуре идентичны уравнениям Юла-Уолкера для авторегрессионного процесса, а потому существует тесная связь между фильтром линейного предсказания и *AP*-процессом.

Рассмотрим оценки линейного предсказания вперед:

$$\hat{x}^f[n] = -\sum_{k=1}^{m} a^f[k]x[n-k] \tag{2.19}$$

где крышка « ^ » обозначает оценку, надстрочный индекс f (от forward - вперед) используется для обозначения оценки вперед. Предсказание вперед понимается в том смысле, что оценка, соответствующая временному индексу n, вычисляется по m предыдущим временным отсчетам. Комплексная ошибка линейного предсказания вперед:

$$e^f[n] = x[n] - \hat{x}^f[n], \tag{2.20}$$

имеет действительную дисперсию:

$$r^f = <|e^f[n]|^2>, \tag{2.21}$$

Показано [1], что коэффициенты линейного предсказания вперед, минимизирующие дисперсию ошибки (2.21), определятся из следующей системы нормальных уравнений, представленной в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}^*[1] & . & . & . & r_{xx}^*[m] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & . & . & . & r_{xx}^*[m-1] \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ r_{xx}[m] & r_{xx}[m-1] & . & . & . & r_{xx}[0] \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ a^f[1] \\ . \\ . \\ . \\ a^f[m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^f \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{2.22}$$

Можно заметить, что эти матричные уравнения по своей структуре идентичны уравнениям Юла-Уолкера (2.16) для авторегрессионного процесса. Если выражение (2.20) переписать в виде

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{m} a[k]x[n-k] + e^{f}[n], \tag{2.23}$$

то можно заметить его подобие уравнению (2.13) для авторегрессионного процесса. В уравнении (2.13) последовательность $u[n]$ соответствует белому шумовому процессу, который используется в качестве входного воздействия авторегрессионного фильтра, а $x[n]$- представляет собой выходной сигнал фильтра. В отличие от (2.13) в уравнении (2.23) последовательность значений ошибки $e^{f}[n]$ представляет собой выход фильтра ошибки линейного предсказания вперед, а $x[n]$- входное воздействие фильтра ошибки предсказания. Если последовательность $x[n]$ генерируется как *АР*(*p*) - процесс с *m*=*p*, то последовательность значений ошибки будет белым шумовым процессом, коэффициенты линейного предсказания вперед будут идентичны *АР*-параметрам $(a^{f}[k] = a[k])$, а фильтр ошибки предсказания можно рассматривать как фильтр, отбеливающий процесс $x[n]$. На рис.2.3 показаны БИХ-фильтр с передаточной функцией $1/A(z)$, формирующий *АР*-процесс из белого шума, и КИХ-фильтр с передаточной функцией $A(z)$, отбеливающий *АР*-процесс.

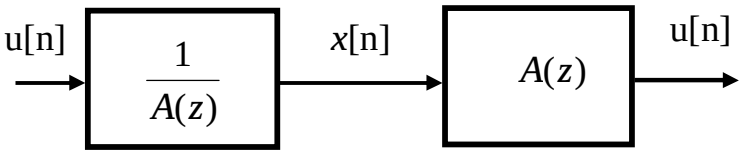


Рис. 2.3.

Аналогичные рассуждения можно провести относительно оценки линейного предсказания назад [надстрочный индекс *b* (от back - назад)]:

$$x^{b}[n] = -\sum_{k=1}^{m} a^{b}[k]x[n+k], \tag{2.24}$$

которая определяется по m последующим временным отсчетам, ввести ошибку линейного предсказания назад

$$e^{b}[n] = x[n-m] - \hat{x}^{b}[n-m] = x[n-m] + \sum_{k=1}^{m} a^{b}[k]x[n-m+k] \tag{2.25}$$

и показать [1], что коэффициенты линейного предсказания назад $a^b[k]$, минимизирующие дисперсию ошибки $r^b = <|e^b[n]|^2>$, будут комплексно - сопряженными величинами коэффициентам линейного предсказания вперед $a^b[k] = (a^f[k])^*$, где $1 \le k \le m$, а дисперсии ошибок одинаковы $r^b = r^f$.

2.2.2. Алгоритм Левинсона

Решение системы эрмитовых теплицевых уравнений Юла-Уолкера (2.16) и системы (2.22) возможно с помощью эффективной рекуррентной процедуры, получившей название алгоритма Левинсона. Согласно этому алгоритму систему уравнений решают для последовательно увеличивающихся порядков АР-модели m=1,2,…,p. Так рекурсивное решение уравнений Юла-Уолкера методом Левинсона связывает *АР*-параметры порядка *m* с параметрами порядка (*m*-1) соотношением:

$$a_m[n] = a_{m-1}[n] + K_m a^*_{m-1}[m-n], \qquad (2.26)$$

где *n* изменяется от 1 до (*m*-1).

Коэффициент $K_m = a_m[m]$, получивший название коэффициента отражения, определяется по значениям автокорреляции, соответствующим сдвигам от 0 до (*m*-1):

$$K_m = a_m[m] = -\frac{1}{r_{m-1}} \sum_{n=0}^{m-1} a_{m-1}[n] r_{xx}[m-n], \text{ для } m=2,3,\ldots \qquad (2.27)$$

где полагается $a_{m-1}[0] = 1$, а $K_1 = a_1[1] = -r_{xx}[1]/r_{xx}[0]$.

Рекурсивное уравнение для дисперсии белого шума имеет вид:

$$r_m = r_{m-1}(1 - |K_m|^2), \qquad (2.28)$$

с начальным условием $r_0 = r_{xx}[0]$.

В рекурсии Левинсона без дополнительных вычислительных затрат находятся *АР*-коэффициенты всех моделей, порядок которых m=1, 2, …, p. Можно также заметить, что коэффициенты *АР*(*p*)-модели могут быть определены по известным (вычисленным) величинам $r_{xx}(0)$ и коэффициентам отражения $K_1, K_2, \ldots, K_p$. Поэтому эти коэффициенты также полностью определяют АР(*p*)-процесс, который, следовательно, имеет три эквивалентных представления, как это отображено на рис.2.4.

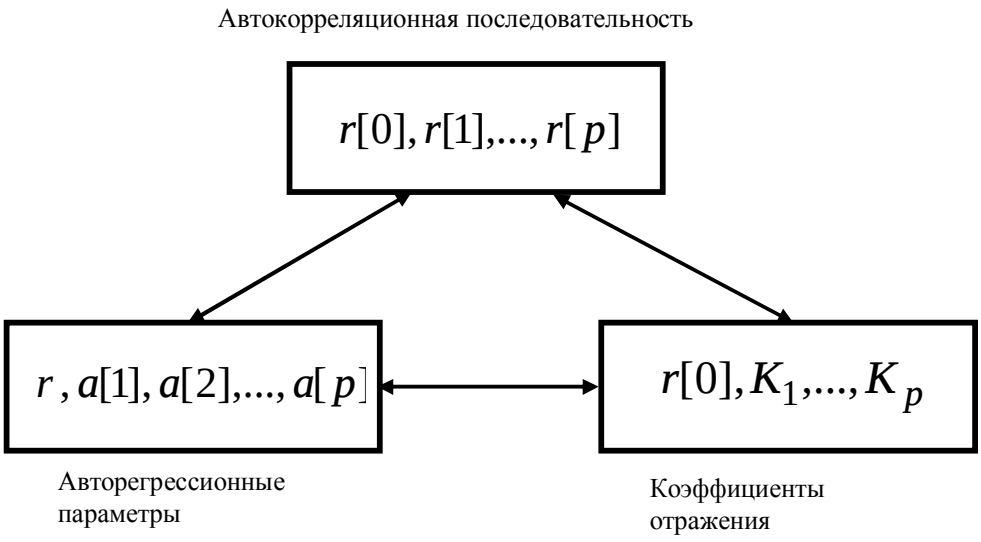


Рис.2.4. Три эквивалентных представления авторегрессионного процесса

АР(p)-процесс может быть представлен: в виде бесконечно протяженной автокорреляционной последовательности, в виде конечной последовательности авторегрессионных коэффициентов и в виде конечной последовательности коэффициентов отражения. Хотя АКП *АР*(p)-процесса бесконечна, полная АКП однозначно определяется конечной последовательностью $r_{xx}[0],...,r_{xx}[p]$ с помощью рекуррентного соотношения (2.18). Алгоритм Левинсона, описанный соотношениями (2.26) – (2.28), позволяет определить и *АР*-параметры, и коэффициенты отражения по заданной АКП, соответствующей временным сдвигам от 0 до p. Используя только уравнение (2.26) с начальным условием $a_1[1] = K_1$, можно получить рекурсивное соотношение, которое будет определять *АР*-параметры для всех порядков от m=1 до m=p на основе заданной последовательности коэффициентов отражения от K_1 до K_p, и в результате определить однозначное соответствие между коэффициентами отражения и авторегрессионными параметрами. Можно также обратить направление рекурсий Левинсона, что позволит вычислять АКП, используя либо набор *АР*-параметров, либо набор коэффициентов отражения.

2.3. Методы авторегрессионного спектрального оценивания

Рассмотренные свойства *АР*-модели, позволяют рассчитать ее параметры и, следовательно, функцию *СПМ* по известным значениям *АКП*, исследуемого случайного процесса. При практических измерениях эта функция (*АКП*) обычно неизвестна, поэтому разработано большое количество методов нахождения *АР СПМ*, по имеющимся отсчетам

данных. Все эти методы можно разбить на два класса: алгоритмы для обработки *блоков* данных и алгоритмы для обработки *последовательных* данных. Мы рассмотрим методы, предназначенные для обработки целых блоков накопленных отсчетов данных некоторого фиксированного объема. Блочные методы можно описать как алгоритмы с фиксированным временем, рекурсивные относительно порядка в том смысле, что они применяются к фиксированным блокам временных отсчетов данных и позволяют рекурсивным образом получать оцени параметров *АР*-модели более высокого порядка по оценкам параметров *АР*- модели более низкого порядка. С другой стороны, последовательные методы можно рассматривать как алгоритмы с фиксированным порядком, рекурсивные относительно времени в том смысле, что они применяются для последовательной обработки данных с целью обновления оценок параметров *АР*-модели фиксированного порядка. Применение таких алгоритмов целесообразно для слежения за спектрами, медленно изменяющимися во времени.

Блочные алгоритмы, в свою очередь, также можно разделить на три категории в соответствии с эквивалентными представлениями АР-процессов и их связью с процедурой линейного предсказания по критерию наименьших квадратов. Так называемый метод Юла-Уолкера использует оценивание АР-параметров по последовательности оценок АКП. В методе Берга АР-параметры определяются по оценкам коэффициентов отражения. Ковариационный и модифицированный ковариационный методы предполагают вычисление коэффициентов линейного предсказания по критерию наименьших квадратов.

2.3.1. Метод Юла-Уолкера

Наиболее очевидный подход к *АР* - оцениванию *СПМ* состоит в решении уравнений Юла-Уолкера (2.16), в которые вместо значений неизвестной автокорреляционной функции подставляются их оценки. Так для отсчетов данных $x[0], x[1]..., x[N-1]$ можно получить оценки автокорреляции в форме:

$$\hat{r}_{xx}[m] = \begin{cases} \dfrac{1}{(N-m)} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n], 0 \le m \le N-1; \\ \dfrac{1}{(N-|m|)} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x^*[n+|m|]x[n], -(N-1) \le m < 0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Эти оценки являются несмещенными, поскольку $<\hat{r}_{xx}[m]>= r_{xx}[m]$ и состоятельными, поскольку при неограниченном возрастании *N*, дисперсия оценки

стремится к нулю. Другой вариант получения смещенных оценок автокорреляции, имеет вид:

$$\overset{\vee}{r}_{xx}[m] = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-m-1} x[n-m]x^*[n], 0 \le m \le N-1; \\ \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-|m|-1} x^*[n-|m|]x[n], -(N-1) \le m < 0. \end{cases} \tag{2.30}$$

При конечном N эта оценка будет смещенной, поскольку $< \overset{\vee}{r}_{xx}[m] >= (1-\dfrac{|m|}{N})r_{xx}[m]$. При использовании смещенных оценок автокорреляции получаемая оценка *АР*-параметров, всегда соответствуют устойчивому *АР* - фильтру, что для несмещенных оценок не всегда имеет место.

Поскольку автокорреляционная матрица в системе уравнений (2.16) по своей структуре является теплицевой, так как элементы любой ее диагонали одинаковы, и эрмитовой, так как $r_{xx}[-k] = r_{xx}^*[k]$, то для получения решения $r_w, a[1], a[2], ..., a[p]$ при подстановке оценок автокорреляции в (2.16) можно использовать рекурсивный алгоритм Левинсона.

Таким образом, метод Юла-Уолкера отвечает совокупности соотношений (2.26) - (2.30) для определения *АР*-параметров, по которым в соответствие с (2.17), определяется оценка *СПМ*. В случае длинных записей данных, метод Юла-Уолкера, может давать вполне приемлемые спектральные оценки, однако для коротких записей данных, получаемые с его помощью, спектральные оценки имеют худшее разрешение, по сравнению с оценками, получаемыми другими *АР*-методами. В [1] приведена программа YULEWALKER , реализующая метод Юла-Уолкера.

2.3.2. Метод Берга

Один из первых алгоритмов, послужившим толчком к активному исследованию методов авторегрессионного спектрального оценивания, был предложен Бергом [1]. Идея алгоритма использует тот факт, что в рассмотренных выше формулах (2.26) - (2.28) только коэффициент отражения K_p непосредственно зависит от автокорреляционной функции *АКП*, а это означает, что одна из процедур получения *АР* - оценки *СПМ* в том случае, когда имеется некоторый блок отсчетов данных, может быть основана на

оценивании коэффициента отражения по этим отсчетам на каждом шаге рекурсии Левинсона.

Подставляя в уравнения (2.20) и (2.25) значения $a_p[n]$, определяемые выражением (2.26), можно получить рекурсивные соотношения:

$$e_p^f[n] = e_{p-1}^f[n] + K_p e_{p-1}^b[n-1], \tag{2.31}$$

$$e_p^b[n] = e_{p-1}^b[n-1] + K_p^* e_{p-1}^f[n], \tag{2.32}$$

которые связывают ошибки предсказания порядка p с ошибками предсказания порядка (p-1), с начальными условиями $e_0^f[n] = e_0^b[n] = x[n]$. Показано [1], что коэффициенты отражения можно рассматривать как взятый со знаком минус нормированный коэффициент корреляции между ошибками линейного предсказания вперед и назад с единичным временным сдвигом:

$$K_m = \frac{-\langle e_{m-1}^f[n] e_{m-1}^{b*}[n-1] \rangle}{\sqrt{\langle \left| e_{m-1}^f[n] \right|^2 \rangle} \sqrt{\langle \left| e_{m-1}^b[n-1] \right|^2 \rangle}}. \tag{2.33}$$

Соотношения (2.31) и (2.32) позволяют реализовать КИХ-фильтр ошибки линейного предсказания с помощью коэффициентов отражения в форме, называемой решетчатым фильтром, представленным на рис.2.5.

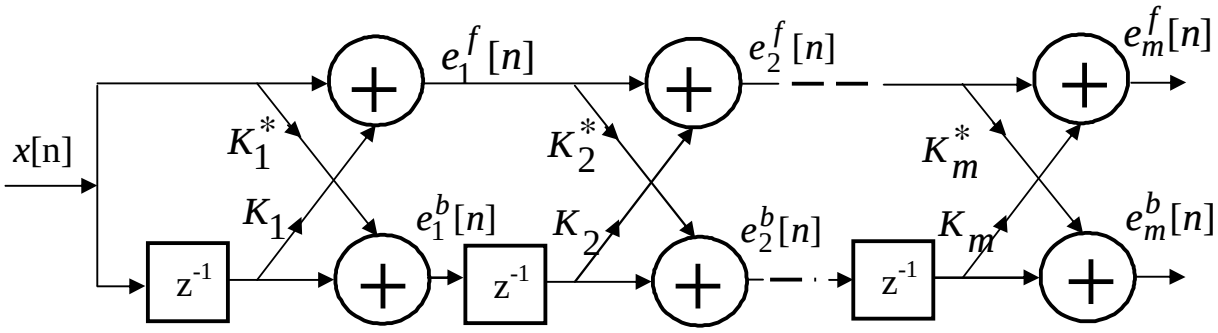


Рис.2.5. Решетчатая реализация фильтра ошибки линейного предсказания: z^{-1} означает задержку на один отсчет

Параметрами каждой ступени решетчатого фильтра являются коэффициенты отражения. В этой структуре одновременно распространяются ошибки предсказания вперед и назад, причем ошибки предсказания назад на выходе каждой ступени взаимно ортогональны.

В алгоритме Берга используется оценка коэффициента отражения, определяемая по методу наименьших квадратов. При каждом значении порядка p в нем минимизируется среднее арифметическое мощности ошибок линейного предсказания вперед и назад (выборочная дисперсия ошибки предсказания):

$$r_p^{fb} = \frac{1}{2N}\left[\sum_{n=p+1}^{N}\left|e_p^f[n]\right|^2 + \sum_{n=p+1}^{N}\left|e_p^b[n]\right|^2\right],$$

r_p^{fb} - является функцией только одного параметра комплексного коэффициента отражения K_p. Приравнивая комплексную производную от r_p^{fb} к нулю:

$$\frac{dr_p^{fb}}{d\,\mathrm{Re}\{K_p\}} + j\frac{dr_p^{fb}}{d\,\mathrm{Im}\{K_p\}} = 0,$$

и решая полученное уравнение относительно K_p, получаем следующее выражение для оценки по методу наименьших квадратов:

$$\hat{K}_p = \frac{-2\sum_{n=p+1}^{N} e_{p-1}^f[n]e_{p-1}^{b^*}[n-1]}{\sum_{n=p+1}^{N}|e_{p-1}^f[n]|^2 + \sum_{n=p+1}^{N}|e_{p-1}^b[n-1]|^2}. \qquad (2.34)$$

В (2.34) предполагается, что имеется N отсчетов данных $x[1]$, ..., $x[N]$ и ошибки предсказания формируются в диапазоне индексов от $n=p+1$ до $n=N$, поскольку используются только имеющиеся отсчеты данных. Таким образом, алгоритм Берга использует рекурсивный алгоритм Левинсона, в котором вместо K_p, вычисляемого по АКП используется его оценка (2.34). Базовый алгоритм Левинсона дополняется уравнениями (2.31) и (2.32), вычисления по которым начинаются с $e_0^f[n]= e_0^b[n] = x[n]$, $1\le n\le N$. Начальное значение дисперсии ошибки предсказания равно

$$r_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|x[n]\right|^2.$$

Последовательность действий в рекуррентной процедуре вычисления коэффициентов $a_p[k]$, k=1,2,…,p будет следующей.

1). Положив m=1, из (2.34) найдем

$$\hat{K}_1 = \frac{-2\sum_{n=2}^{N} x[n]x^*[n-1]}{\sum_{n=2}^{N}\{|x[n]|^2 + |x[n-1]|^2\}}, \quad r_1 = r_0(1-|\hat{K}_1|^2), \; a_1[1] = \hat{K}_1 .$$

2). После определения $\hat{K}_1$ по соотношениям (2.31) и (2.32) вычисляются ошибки прямого $e^f_1[n]$ и обратного $e^b_1[n]$ предсказания на выходе 1-й ступени решетчатого фильтра (рис.2.5).

3). Положив m=2, из (2.34) найдем оценку коэффициента отражения $\hat{K}_2$. На основе соотношений Левинсона найдем коэффициенты фильтра ошибки линейного предсказания 2-го порядка в виде:

$$a_2(1) = a_1[1] + \hat{K}_1 a_1^*[1] = \hat{K}_1 + \hat{K}_1 \hat{K}_1^*, \; a_2[2] = \hat{K}_2, \; r_2 = r_1(1-|\hat{K}_2|^2).$$

4). По известной оценке $\hat{K}_2$ вычислим ошибки $e^f_2[n]$ и $e^b_2[n]$ на выходе 2-й ступени решетчатого фильтра. Далее, полагая m=3, определяем $\hat{K}_3$ и т.д. для более высоких значений m. Вычисления закончим для m=p.

5). Имея полный набор коэффициентов $a_p[k]$, k=1,2,…,p и r_p вычисляем СПМ по соотношению (2.14).

Оценка коэффициента отражения (2.34) представляет собой гармоническое среднее коэффициентов частной корреляции ошибок предсказания вперед и назад. Рекурсивная формула, которая упрощает вычисление знаменателя в выражении для оценки (2.34)

$$DEN_P = \sum_{n=p+1}^{N} \left\{ \left| e_{p-1}^{f}[n] \right|^2 + \left| e_{p-1}^{b}[n-1] \right|^2 \right\};$$

$$DEN_P = (1 - \left| \hat{K}_p \right|^2) DEN_{P-1} - \left| e_{p-1}^{f}[n] \right|^2 - \left| e_{p-1}^{b}[N] \right|^2. \qquad (2.35)$$

Гармонический метод дает несколько смещенные оценки частоты синусоид. Для уменьшения этого смещения предложено взвешивание среднего квадрата ошибки предсказания:

$$r_p^{fb} = \frac{1}{2N} \sum_{n=p+1}^{N} W_p[n] \left\{ \left| e_p^{f}[n] \right|^2 + \left| e_p^{b}[n] \right|^2 \right\}, \qquad (2.36)$$

что приводит к следующей оценке коэффициента отражения:

$$\hat{K}_p = \frac{-2 \sum_{n=p+1}^{N} W_{p-1}[n] e_{p-1}^{f}[n] e_{p-1}^{b^*}[n-1]}{\sum_{n=p+1}^{N} W_{p-1}[n] (| e_{p-1}^{f}[n] |^2 + | e_{p-1}^{b}[n-1] |^2)}, \qquad (2.37)$$

где $W_{p-1}[n]$ - определяет весовую функцию. Показано [1], что частотное смещение уменьшается при использовании окна Хэмминга. В [1] приведена программа BURG , реализующая метод Берга.

2.3.3. Ковариационный метод

Налагая на *AP* - коэффициенты ограничения, с тем чтобы они удовлетворяли рекурсивному соотношению Левинсона, Бергу удалось осуществить оптимизацию по методу наименьших квадратов единственного параметра - коэффициента отражения. Другой подход состоит в минимизации в методе наименьших квадратов одновременно по всем коэффициентам линейного предсказания, что позволяет полностью устранить ограничение, налагаемое рекурсией Левинсона. Такой подход будет несколько улучшать характеристики спектральной оценки.

Предположим, что для оценивания *AP*- параметров порядка *p* используется *N*-точечная последовательность данных $x[1],...x[N]$. Оценка линейного предсказания вперед для отсчета $x[n]$ будет иметь форму

$$\hat{x}^f[n] = -\sum_{k=1}^{p} a^f[k]x[n-k]. \qquad (2.38)$$

Ошибка линейного предсказания вперед определяется выражением:

$$e_p^f[n] = x[n] - \hat{x}^f[n] = x[n] + \sum_{k=1}^{p} a_p^f[k]x[n-k], \qquad (2.39)$$

Ошибку линейного предсказания вперед можно определить в диапазоне временных индексов от $n=1$ до $n=N+p$, если предположить, что данные до первого и после последнего отсчетов равны нулю (т.е. $x[n]=0$, при $n<1, n>N$). $N+p$ - членов ошибки линейного предсказания вперед, определяемых выражением (2.39), можно записать, используя матрично-векторное обозначение, в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} e_p^f[1] \\ \vdots \\ e_p^f[p+1] \\ \vdots \\ e_p^f[N-p] \\ \vdots \\ e_p^f[N] \\ \vdots \\ e_p^f[N+p] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x[1] & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ x[p+1] & \cdots & x[1] \\ \vdots & & \vdots \\ x[N-p] & \cdots & x[p+1] \\ \vdots & & \vdots \\ x[N] & \cdots & x[N-p] \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & x[N] \end{bmatrix}}_{X_P} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a^f[1] \\ \vdots \\ a^f[p] \end{bmatrix},$$

где X_P - прямоугольная теплицева $(N+p)\times(p+1)$ - матрица данных. Модуль среднего квадрата ошибки линейного предсказания вперед, который необходимо минимизировать, это величина:

$$r_p^f = \sum_n \left| e_p^f[n] \right|^2 . \qquad (2.41)$$

Поделив (2.41) на N, получим выборочную дисперсию. Выбор диапазона суммирования в (2.41) зависит от конкретного применения. Выбирая полный диапазон суммирования от $e_p^f[1]$ до $e_p^f[N+p]$, получаем так называемый взвешенный случай, поскольку отсутствующие значения данных приравниваются к нулю. Выбирая диапазон суммирования от $e_p^f[1]$ до $e_p^f[N]$, получаем предвзвешенный случай, поскольку при этом полагается, что значения данных, предшествующие отсчету $x[1]$, равны нулю. Диапазон суммирования от $e_p^f[p+1]$ до $e_p^f[N]$ соответствует невзвешенному случаю, поскольку используются только имеющиеся отсчеты данных. Взвешенный случай получил название *автокорреляционного* метода линейного предсказания. Случай отсутствия взвешивания называется *ковариационным* методом линейного предсказания.

Показано [1], что нормальные уравнения для нахождения коэффициентов линейного предсказания в автокорреляционном методе, совпадают с уравнениями Юла-Уолкера, в которых используются смещенные оценки АКП. Обработка данных с помощью окна, применяемая в этом методе, ухудшает разрешение по сравнению с другими методами спектрального оценивания на основе линейного предсказания, поэтому для коротких записей данных автокорреляционный метод редко применяется.

Соотношение между ошибками линейного предсказания вперед и коэффициентами линейного предсказания для ковариационного (т.е. без взвешивания) метода, можно в матричной форме записать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} e_p^f[p+1] \\ . \\ . \\ e_p^f[N-p] \\ . \\ . \\ e_p^f[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[p+1] & . & . & . & x[1] \\ . & . & & & . \\ . & & & . & . \\ x[N-p] & . & . & . & x[p+1] \\ . & . & & & . \\ . & & & . & . \\ x[N] & . & . & . & x[N-p] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \\ a^f[1] \\ . \\ . \\ a^f[p] \end{bmatrix}. \qquad (2.42)$$

Нормальные уравнения, минимизирующие средний квадрат ошибки:

$$r_p^f = \sum_{n=p+1}^{N} \left| e_p^f[n] \right|^2 \tag{2.43}$$

порядка p, имеют вид:

$$\mathbf{R}_p \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_p^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_p^f \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Элементы эрмитовой $(p+1)\times(p+1)$ матрицы $\boldsymbol{R}_p$ имеют вид корреляционных форм

$$r_p[i,j] = \sum_{n=p+1}^{N} x^*[n-i]x[n-j],\ 0 \le i, j \le p\ . \tag{2.45}$$

Элементы матрицы $\boldsymbol{R}_p$ в ковариационном методе не могут быть записаны как функции разности (i-j), а это означает, что $\boldsymbol{R}_p$ не является теплицевой матрицей. Однако тот факт, что матрица является произведением теплицевых матриц, все же обеспечивает возможность построения быстрого алгоритма, аналогичного алгоритму Левинсона [1]. Необходимым, но недостаточным условием того, чтобы матрица была невырожденной, является условие $N - p \ge p$ или $p \le N/2$. Отсюда следует, что выбранный порядок модели не должен превышать половины длины записи данных. Аналогичное рассмотрение можно провести применительно и к оценке линейного предсказания назад. В [1] приведена программа COVAR , реализующая ковариационный метод. Быстрый алгоритм для ковариационного метода одновременно решает нормальные уравнения относительно коэффициентов линейного предсказания вперед и назад при всех промежуточных значениях порядка модели, поэтому оба набора коэффициентов получаются здесь без дополнительных вычислительных затрат.

Коэффициенты линейного предсказания вперед и назад, определяемые с помощью ковариационного метода, вообще говоря, не гарантируют получение устойчивого фильтра. Однако это не приводит к каким-либо затруднениям, если их значения используются только для целей спектрального оценивания. В действительности спектральные оценки, получаемые по оценкам *АР*- коэффициентов с помощью

ковариационного метода обычно имеют меньшие искажения, чем спектральные оценки, получаемые с помощью методов, гарантирующих устойчивость фильтра.

2.3.4. Модифицированный ковариационный метод

Для стационарного случайного процесса авторегрессионные коэффициенты линейного предсказания вперед и назад представляют собой комплексно - сопряженные величины, поэтому ошибку линейного предсказания назад можно записать в следующем виде:

$$e_p^b[n] = x[n-p] + \sum_{k=1}^{p} a_p^{f\,*}[k]x[n-p+k]. \qquad (2.46)$$

Поскольку оба направления предсказания обеспечивают получение одинаковой статистической информации, представляется целесообразным объединить статистики ошибок предсказания вперед и назад с тем, чтобы получить большее число точек, в которых определяются ошибки, и улучшить оценку *AP* - параметров.

Минимизируя среднее значение квадратов ошибок предсказания вперед и назад:

$$r_p^{fb} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=p+1}^{N}\left|e_p^f[n]\right|^2 + \sum_{n=p+1}^{N}\left|e_p^b[n]\right|^2\right]$$

по коэффициентам линейного предсказания, получаем систему нормальных уравнений:

$$\mathbf{R}_p\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{a}_p^{fb}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2r_p^{fb}\\ \mathbf{0}_p\end{pmatrix}, \qquad (2.47)$$

где элементы матрицы $\mathbf{R}_p$ имеют вид:

$$r_p[i,j] = \sum_{n=p+1}^{N}(x^*[n-i]x[n-j] + x[n-p+i]x^*[n-p+j]), \qquad (2.48)$$

где $0 \le i, j \le p$. Процедура, основанная на совместном использовании ошибок линейного предсказания вперед и назад по методу наименьших квадратов, получила название *модифицированного ковариационного метода*.

Модифицированный ковариационный метод и гармонический метод Берга основаны на минимизации средних квадратов ошибок линейного предсказания вперед и назад. В первом из них минимизация выполняется по всем коэффициентам предсказания, во втором выполняется условная (т.е. с наложенным ограничением) минимизация только по

одному коэффициенту предсказания $a_p[p]$ (т.е. по коэффициенту отражения K_p). При использовании метода Берга возникает ряд проблем, включая расщепление спектральных линий и смещение частотных оценок, которые устраняются при использовании модифицированного ковариационного метода.

Необходимым условием невырожденности матрицы $\mathbf{R}_p$ является условие $2(N-p) > p$ или $p \le \frac{2N}{3}$, т.е. порядок модели не должен превышать две трети длины записи данных. В [1] приведена программа MODCOVAR, реализующая модифицированный ковариационный метод.

2.3.5. Выбор порядка модели

Поскольку наилучшее значение порядка модели заранее, как правило, не известно, на практике приходится испытывать несколько порядков модели.. При слишком низком порядке модели получаются сильно сглаженные спектральные оценки, при излишне высоком – увеличивается разрешение, но в спектре появляются ложные пики. Интуитивно ясно, что следует увеличивать порядок *АР*–модели до тех пор, пока вычисляемая ошибка предсказания не достигнет минимума. Однако во всех процедурах оценивания по методу наименьших квадратов мощности ошибок предсказания монотонно уменьшаются с увеличением порядка модели *p*. Так, например, в алгоритме Берга и в уравнениях Юла-Уолкера используется соотношение

$$r_p = r_{p-1}(1 - |a_p[p]|^2).$$

До тех пор, пока величина $a_p[p]$ отлична от нуля (она должна быть равной или меньше 1), мощность ошибки предсказания уменьшается. Следовательно, сама по себе мощность ошибки предсказания не может служить достаточным критерием окончания процедуры изменения порядка модели.

Для выбора порядка *АР*–модели предложено несколько целевых критериев. Акаике предложил два критерия. Первым из них является величина окончательной ошибки предсказания (*ООП*). Согласно этому критерию, порядок *АР* –процесса выбирается таким образом, чтобы средняя дисперсия ошибки на каждом шаге предсказания была минимальна. Акаике рассматривал ошибку как сумму мощностей в непредсказуемой (или не обновляемой) части процесса и как некоторую величину, характеризующую неточность

оценивания *АР*–параметров. Окончательная ошибка предсказания для *АР*–процесса определяется

$$ООП_p = \hat{\sigma}_p \left(\frac{N + p + 1}{N - p + 1} \right),$$

где N – число отсчетов данных, p – порядок *АР*-процесса, $\hat{\sigma}_p$ -оценочное значение дисперсии шума (дисперсии ошибки предсказания). Член в круглых скобках увеличивает оконечную ошибку предсказания по мере того, как p приближается к N, характеризуя тем самым увеличение неопределенности оценки $\hat{\sigma}_p$ для дисперсии ошибки предсказания. Выбирается порядок p, при котором величина оконечной ошибки предсказания минимальна. Критерий на основе оконечной ошибки предсказания исследовался в различных приложениях, и для идеальных *АР*–процессов он обеспечивает хорошие результаты. Однако при обработке реальных сигналов этот критерий приводит к выбору слишком малого порядка модели.

Второй критерий Акаике основан на методе максимального правдоподобия и получил название информационного критерия Акаике (*ИКА*). Согласно этому критерию, порядок модели выбирается посредством минимизации некоторой теоретико-информационной функции. Если исследуемый процесс имеет гауссовы статистики, то *ИКА* определяется выражением

$$ИКА[p] = N \ln(\hat{\sigma}_p) + 2p.$$

И здесь выбирается порядок модели, при котором *ИКА* минимален.

Третий метод выбора критерия предложен Парзеном и получил название авторегрессионой передаточной функции критерия (*АПФК*). Порядок модели p выбирается в этом случае равным порядку, при котором оценка разности среднеквадратичных ошибок между истинным фильтром предсказания ошибки (его длина может быть бесконечной) и оцениваемым фильтром минимальна. Парзен показал, что эту разность можно вычислить, даже если истинный предсказывающий ошибку фильтр точно не известен:

$$АПФК[p] = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\overline{r}_j}\right) - \frac{1}{\overline{r}_p},$$

где $\overline{r}_j = [N/(N-j)]\hat{\sigma}_j$. И здесь p выбирается так, чтобы минимизировать *АПФК*.

Результаты оценивания спектра при использовании трех указанных критериев мало отличаются друг от друга, особенно в случае реальных данных, а не моделируемых процессов. Исследования показали, что в случае коротких записей данных ни один из этих критериев не обеспечивает удовлетворительных результатов. Для гармонических процессов в присутствии шума использование первого и второго критериев приводит к заниженной оценке порядка модели, если отношение сигнал / шум велико. При анализе коротких сегментов данных предложено выбирать порядок модели равным от *N/3* до *N/2*, что во многих случаях приводит к удовлетворительным результатам. Заметим, что выбор порядка модели для данных, полученных из реальных процессов, пока еще носит субъективный, а не строго научный характер.

2.3.6. Характеристики оценок

Свойства спектров, получаемых по оценкам авторегрессионных параметров, рассмотренным выше, подробно исследованы в многочисленных опубликованных работах. Так как метод Берга является одним из первых и наиболее широко используемых алгоритмов, то проверке и сравнению чаще всего подвергались результаты, получаемые именно с его помощью. Появление каждой новой процедуры спектрального оценивания было, как правило, вызвано необходимостью устранить те или иные аномалии в спектральных оценках, получаемых с помощью гармонического алгоритма Берга. К такого рода аномалиям относятся ложные спектральные пики, смещения частотных оценок и расщепление спектральных линий.

Если выбран большой порядок *AP*- модели относительно имеющегося числа отсчетов данных, то в авторегрессионных спектральных оценках могут появляться ложные пики. Из-за ошибок оценивания матрица нормальных уравнений для большинства *AP*-методов будет иметь полный ранг, равный большим значениям порядка моделей, так что решения для *AP*-параметров получаются даже тогда, когда истинная модель имеет значительно меньший порядок. Дополнительные полюсы, порождаемые лишними *AP*-параметрами, приводят к появлению ложных спектральных пиков. Для уменьшения числа ложных пиков следует использовать методы определения порядка модели.

Следует заметить, что уменьшение порядка модели с целью борьбы с ложными пиками снижает также и разрешение спектральной оценки. Из описанных выше *AP*-методов спектрального оценивания более высокое разрешение при заданном порядке модели обеспечивают метод Берга, ковариационный метод и модифицированный ковариационный метод. Обусловлено это главным образом отсутствием в них эффектов,

связанных с применением окна. Именно по этой причине наихудшее разрешение из всех описанных здесь методов имеет автокорреляционный метод (Юла-Уолкера).

При использовании метода Берга и автокорреляционного метода было замечено, что при некоторых условиях в спектральной оценке могут появляться два близко расположенных спектральных пика там, где должен присутствовать только один спектральный пик. Это явление названо расщеплением спектральной линии.

В работах ряда исследователей [1] отмечается, что в случае процесса, состоящего из смеси одной или двух синусоид и аддитивного белого шума, спектральные пики авторегрессионной спектральной оценки по методу Берга оказываются сдвинутыми, причем величина их сдвига зависит от начальной фазы этих синусоид.

Наттолл [1], используя усреднение по ансамблю из большого числа наборов данных, проанализировал дисперсию оценок СПМ, получаемых с помощью различных *АР*-методов. Полученные им результаты показывают, что в случае несинусоидальных процессов из всех этих методов лишь метод Берга и модифицированный ковариационный метод дают, как правило, оценки СПМ и частоты с минимальной дисперсией.

Хотя выше основное внимание было уделено характеристикам авторегрессионных спектральных оценок для коротких последовательностей отсчетов данных, следует также кратко упомянуть и об их асимптотических статистических свойствах. Так, Сакаи [1] экспериментально показал, что в случае процесса, состоящего из синусоид и аддитивного шума, дисперсия частоты авторегрессионной спектральной оценки оказывается обратно пропорциональной длине записи данных и квадрату отношения сигнал/шум. Килер [1] представил экспериментальное доказательство того, что в случае несинусоидальных процессов дисперсия обратно пропорциональна длине записи данных и отношению сигнал/шум (а не квадрату этого отношения, как в случае синусоидальных процессов).

2.4. Экспериментальное исследование алгоритмов спектрального оценивания на основе АР-моделей

2.4.1. Измерение характеристик разрешения алгоритмов

Для определения частотного разрешения алгоритмов ЦСА используют тест - сигнал, состоящий из пары синусоид равной амплитуды с близкими частотами в сумме с шумом наблюдения. Частотная расстройка, при которой спектральная оценка позволяет зафиксировать два пика с провалом между ними не менее 3 дб, зависит как от способа получения оценки, так и от совокупности параметров сигнала: длины реализации, отношения сигнал / шум , порядка модели. Для классических методов ЦСА процедурой

закрытия окна добиваются нужного компромисса между частотным разрешением и устойчивостью (дисперсией) получаемой спектральной оценки при фиксированной длине реализации. При этом, увеличивая длину временного окна, достигают нужного частотного разрешения за счет возрастания дисперсии флюктуаций спектральной оценки, которое вызвано соответствующим уменьшением числа сегментов в процедуре усреднения оценки СПМ. Предельное частотное разрешение, обеспечиваемое классическими методами, не превосходит величины, обратной длине записи данных, и не зависит от характеристик анализируемых данных. Авторегрессионные методы оценки СПМ требуют правильного выбора важного параметра - порядка АР-модели. Увеличение порядка модели приводит к возрастанию частотного разрешения, однако при этом в спектральных оценках могут появляться ложные пики, что ассоциируется с ухудшением устойчивости оценки (большей ее дисперсией). Предельное значение порядка не должно, как правило, превышать половины длины записи данных. Для определения наиболее подходящего порядка АР-модели приходится испытывать много различных порядков, и эта процедура, называемая «закрытием» порядка модели, сходна с процедурой закрытия окна в классических методах.

Временное разрешение как характеристика анализатора спектра, а также понятие частотно - временной разрешающей способности возникают при оценке качества измерения нестационарных (изменяющихся во времени) спектров. При скользящих спектральных измерениях временное разрешение отождествляется с минимальной длиной временного окна, перемещающегося по длине реализации обрабатываемого сигнала, при котором раздельно измеряются спектральные пики двух близких по частоте синусоид.

Измерения параметров разрешения различных алгоритмов АР-оценивания СПМ показали, что наихудшее разрешение имеет алгоритм Юла-Уолкера, а лучшее - реализует модифицированный ковариационный метод, основанный на линейном предсказании вперед и назад. Метод Берга и ковариационный метод имеют сравнимые характеристики разрешения и существенно лучшие, чем у классических методов оценки СПМ. В качестве примера сравнительных измерений частотного и временного разрешений алгоритмов АР-оценивания СПМ приведем численные значения параметров для пары комплексных синусоид в шуме. Так синусоиды с относительными частотами f_1 = 0.2 и f_2 =0.25 и равными амплитудами ($A_1 = A_2 = 1.0$) удавалось разрешить при минимально возможном числе временных отсчетов N = 4 и порядке модели p= 2 только модифицированным ковариационным методом при отношении сигнал / шум SNR > 40 дб, что соответствовало

частотно - временному разрешению ΔfN = 0.05 * 4 = 0.2. При увеличении числа отсчетов до N = 6 (p= 2, SNR = 40 дб) разрешает синусоиды и алгоритм Берга, а при N = 7 (p = 2, SNR = 40 дб) - ковариационный алгоритм. Алгоритм Юла - Уолкера начинает разрешать эти синусоиды при N = 14 (p = 7, SNR = 40 дб). Заметим, что периодограммный метод при односегментном анализе и прямоугольном окне разрешает синусоиды при N =16. При увеличении числа отсчетов до N = 8 (p = 3, 4) методы Берга и модифицированный ковариационный начинают разрешать синусоиды при SNR = 25 дб. Аналогичные измерения для пары синусоид равной амплитуды с частотами f_1 = 0.2 и f_2 =0.21 при относительной расстройке $\Delta f = f_2 - f_1 = 0.01$ и отношении сигнал / шум =60 дб показали, что модифицированный ковариационный метод разрешает их при N = 6 (p =2,3), что соответствует частотно - временному разрешению $\Delta fN = 0.06$. Метод Юла - Уолкера разрешает эти синусоиды при N > 70 (p = 35) , периодограммный метод при односегментном анализе - при N >80.

В таблицу 2.1 сведены значения числа отсчетов N, порядка модели p и соответствующего отношения сигнал / шум (SNR) (дб), при которых модифицированный ковариационный метод разрешает синусоиды с частотами 0.2 и 0.21 . При увеличении отношения сигнал / шум от 10 дб до 60 дб частотно - временное разрешение возрастает от величины 0.48 до 0.06.

Таблица 2.1. Характеристики разрешения модифицированного ковариационного метода АР - оценивания СПМ

SNR (дб)	0	10	20	30	40	50	60
N	56	48	32	24	16	8	6
p	28	18	16	12	6	4	2
ΔfN	0.56	0.48	0.32	0.24	0.16	0.08	0.06

На рис. 2.6, 2.7 и 2.8 представлены спектрограммы, отображающие оценки СПМ суммы двух синусоид в шуме для предельных значений параметров разрешения, соответственно для периодограммного, Юла-Уолкера и модифицированного ковариационного методов.

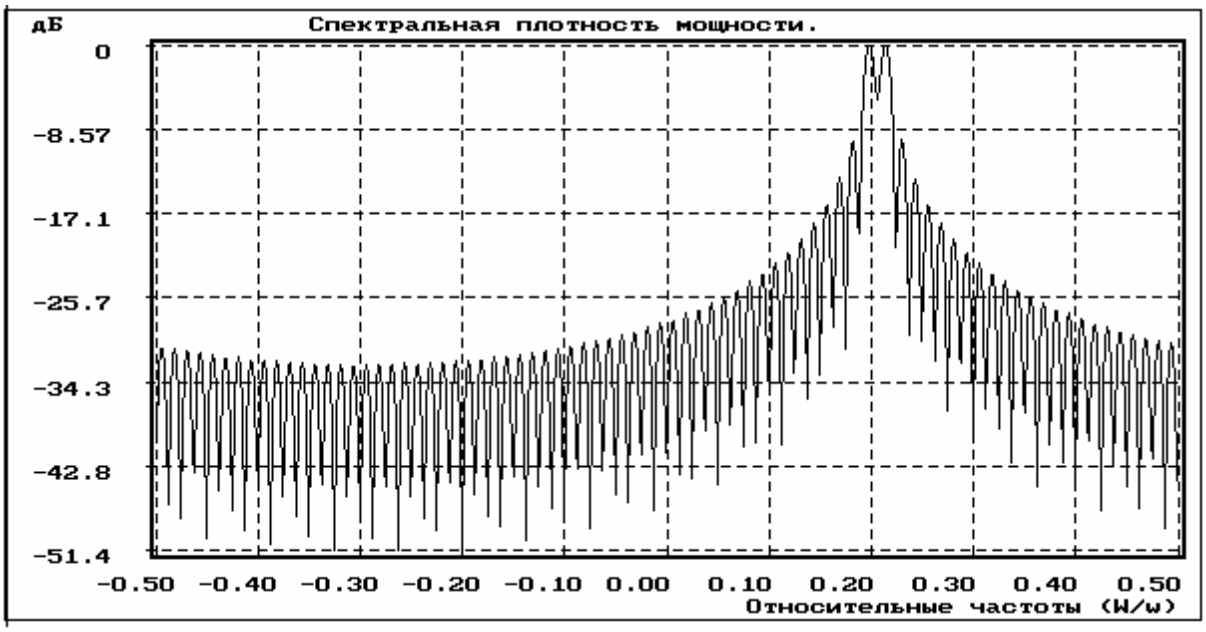


Рис.2.6. Периодограмма суммы двух синусоид в шуме (80 отсчетов, SNR =60дб)

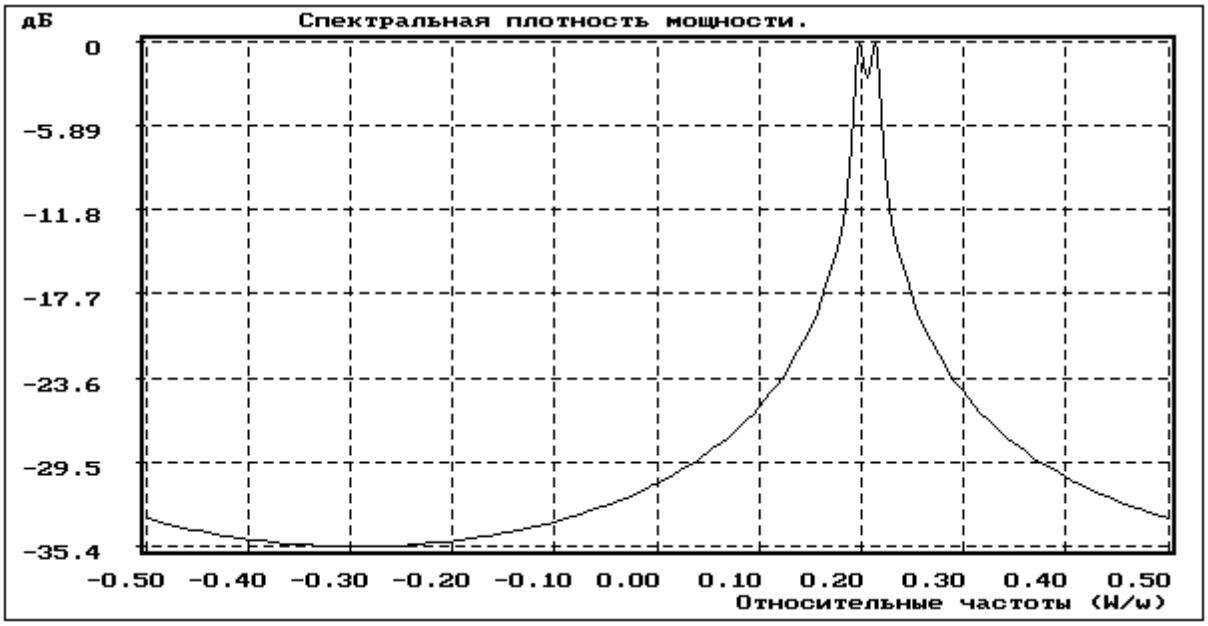


Рис. 2.7. Спектральная АР(35)-оценка суммы двух синусоид в шуме, полученная методом Юла-Уолкера (70 отсчетов, SNR =60 дб)

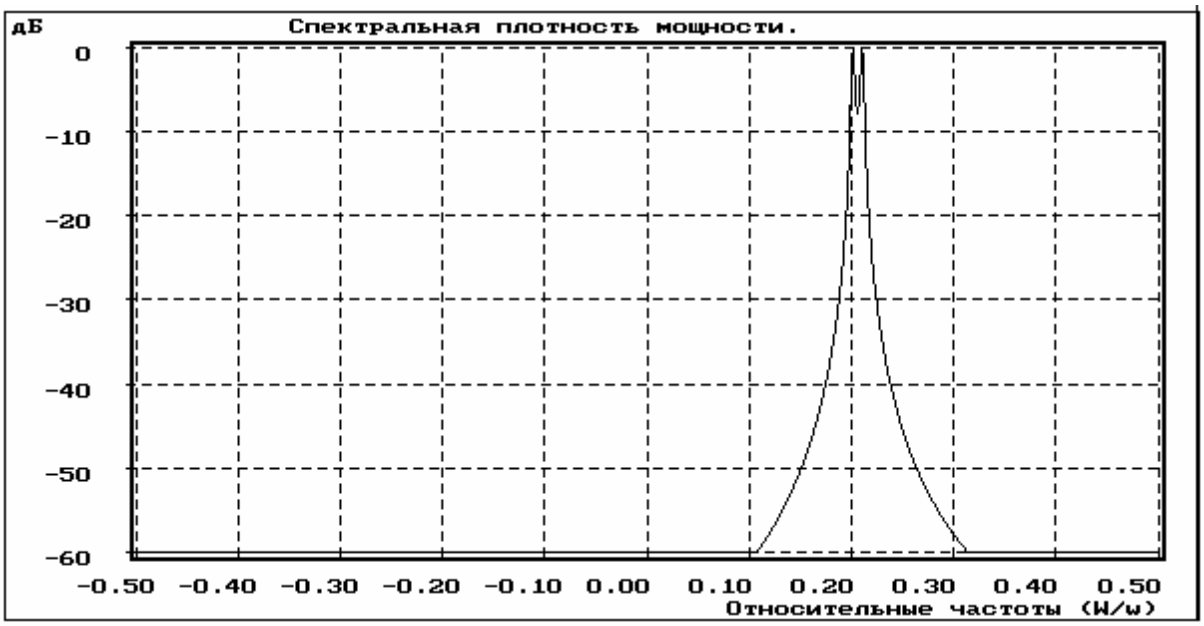


Рис. 2.8. Спектральная АР(3)-оценка суммы двух синусоид в шуме, полученная модифицированным ковариационным методом (6 отсчетов, SNR = 60 дб)

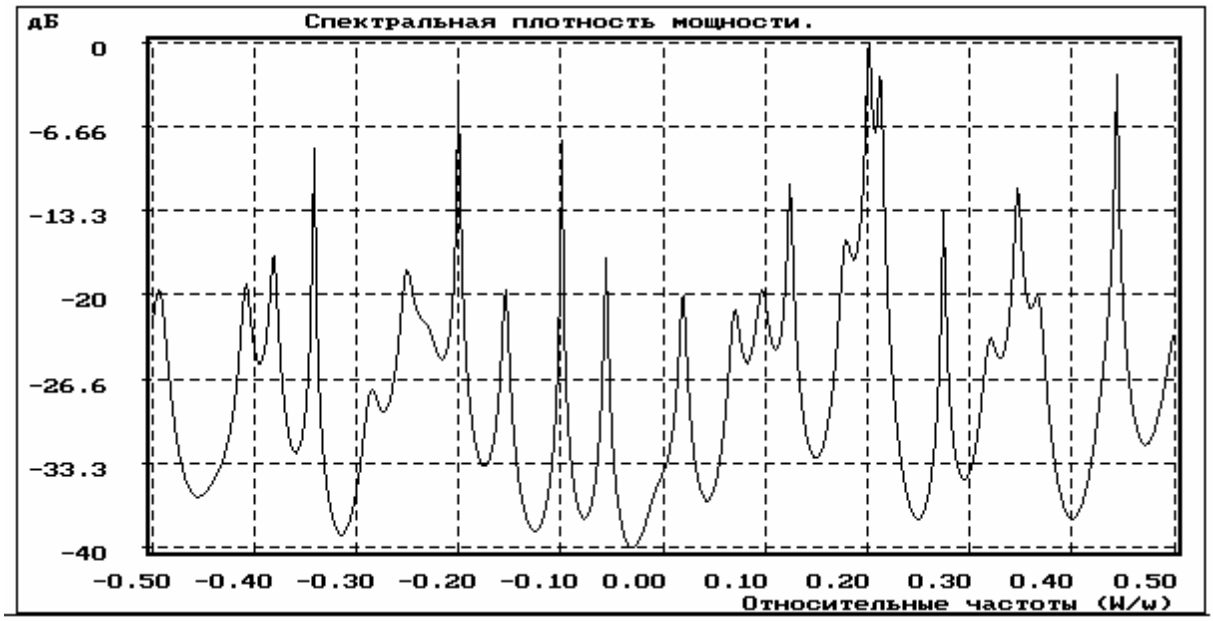


Рис. 2.9. Спектральная АР(28)-оценка суммы двух синусоид в шуме, полученная модифицированным ковариационным методом (56 отсчетов, SNR = 0 дб)

Для малых отношений сигнал / шум высокое частотное разрешение АР-оценок СПМ может быть реализовано только при больших порядках модели и, следовательно, больших

длинах последовательности данных. Так, пара синусоид с частотами 0.2 и 0.21 при отношении сигнал / шум SNR = 0 дб (A_1=A_2=1, дисперсия шума равна 0,5) разрешается модифицированным ковариационным методом при N =56 и p =28, что отображено спектрограммой, представленной на рис. 2.9. Однако большое число ложных пиков, связанное с большим порядком модели и эквивалентное большой дисперсии спектральной оценки, затрудняют правильную ее интерпретацию.

2.4.2. Исследование спектральных АР-оценок моделей стационарных процессов

Примеры четырех авторегрессионных оценок СПМ 64-точечной тест-последовательности Марпла [1], полученных соответственно по алгоритмам Юла-Уолкера, Берга, ковариационного и модифицированного ковариационного, приведены на рис. 2.10, 2.11, 2.12, 2.13. Для всех методов использовался АР-процесс 13-го порядка. Все алгоритмы, кроме Юла-Уолкера, хорошо разрешают все четыре комплексные синусоиды и примерно одинаково отображают спектры коррелированных шумов. Алгоритм Юла-Уолкера имеет худшее разрешение из всех описанных здесь методов АР-оценивания СПМ, превосходящее однако разрешение классических методов. Синусоиды тест-последовательности разрешаются методом Юла-Уолкера только для максимального порядка модели, равного 32, классические методы близкие по частоте синусоиды не разрешают, ввиду малой длины последовательности.

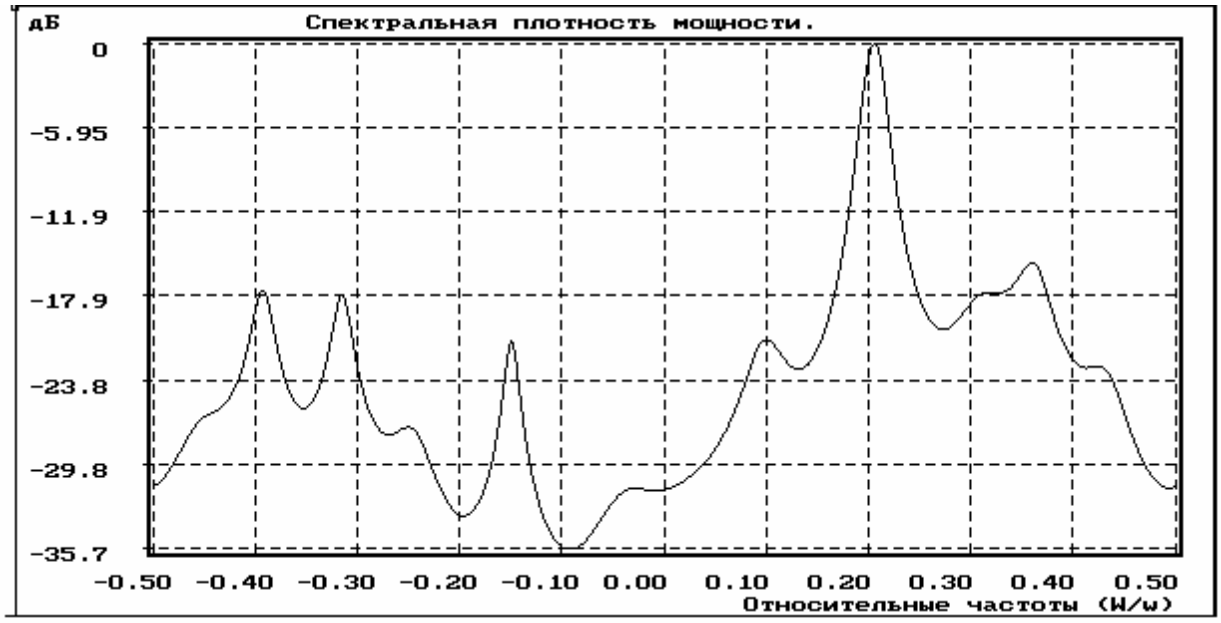


Рис. 2.10. АР(13)-оценка СПМ тест-последовательности Марпла, полученная методом Юла-Уолкера.

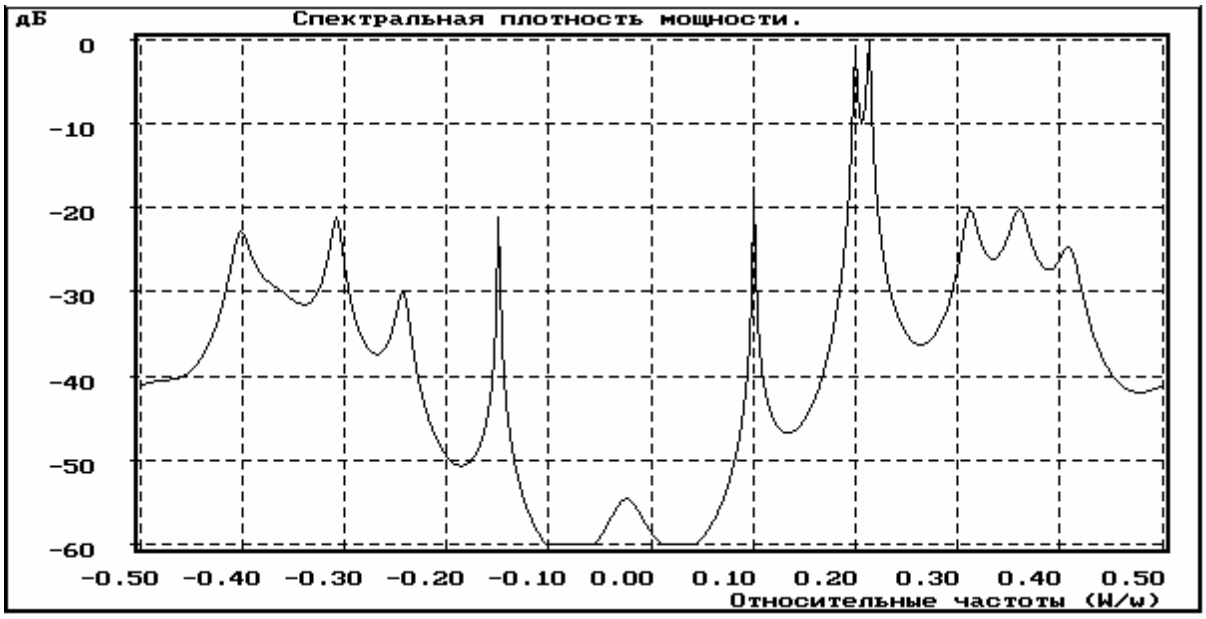


Рис. 2.11. АР(13)-оценка СПМ тест-последовательности Марпла, полученная методом Берга

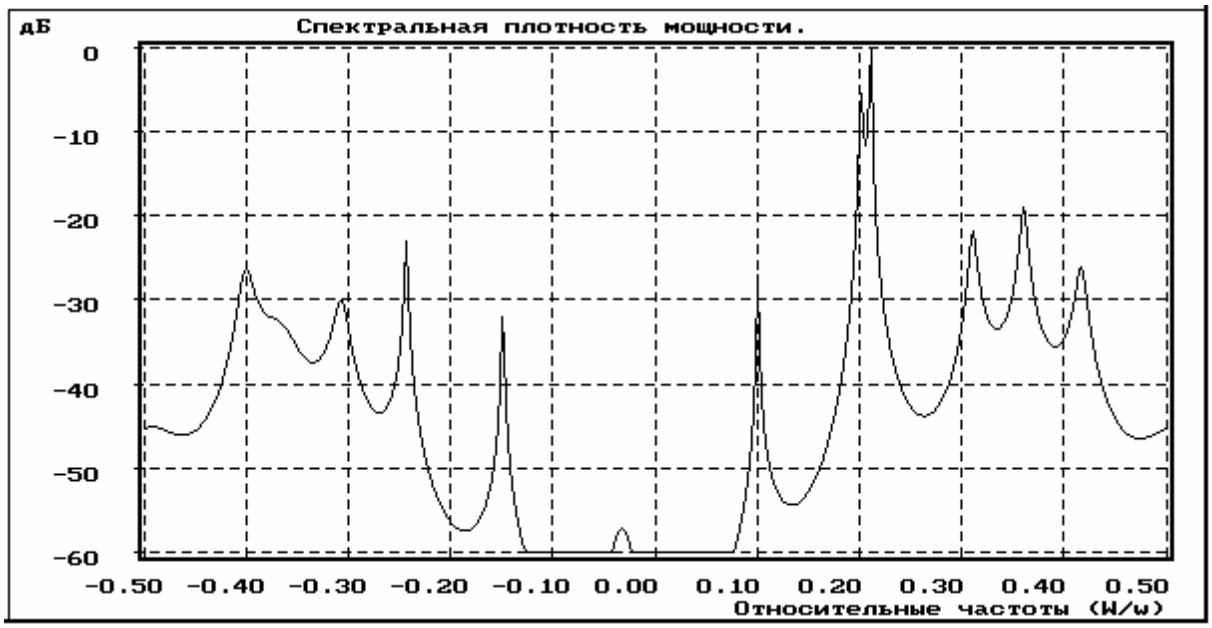


Рис. 2.12. АР(13)-оценка СПМ тест-последовательности Марпла, полученная ковариационным методом

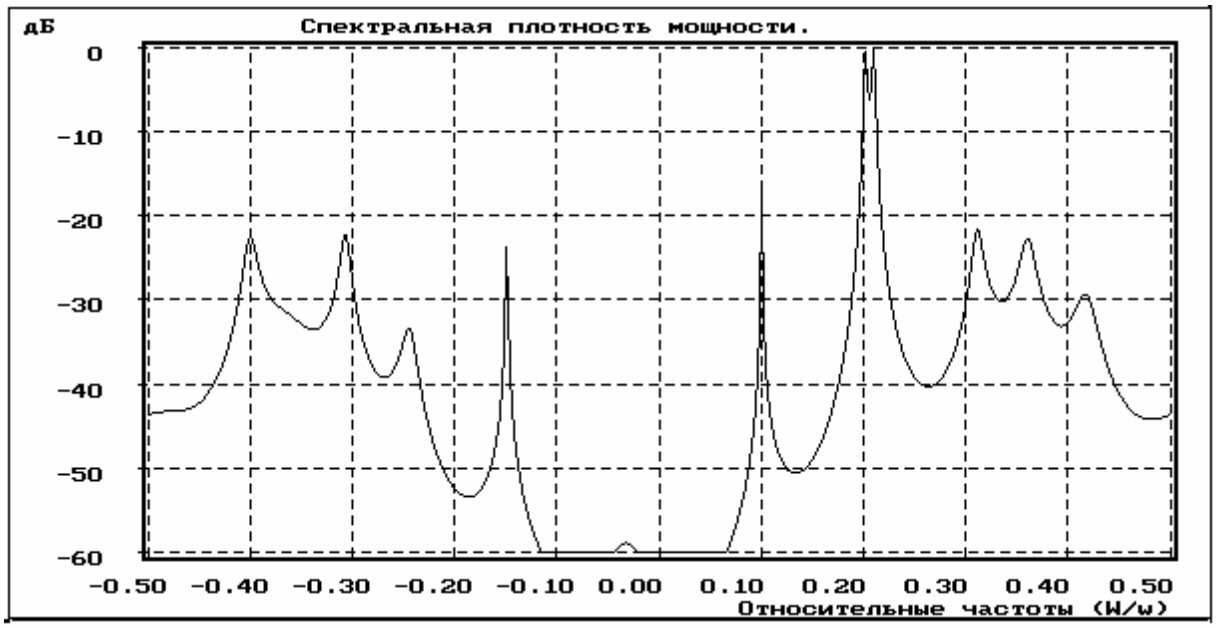


Рис. 2.13. АР(13)-оценка СПМ тест-последовательности Марпла, полученная модифицированным ковариационным методом

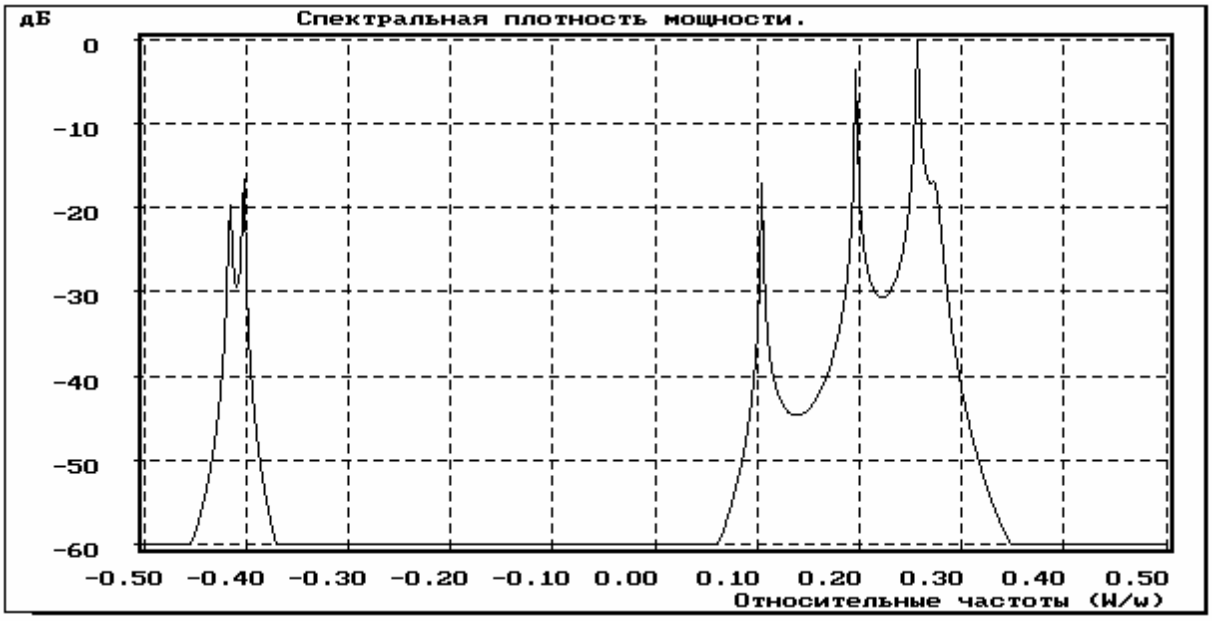


Рис. 2.14. АР(28)-оценка СПМ суммы четырех синусоид, полученная методом Берга, иллюстрирующая эффект расщепления спектральной линии на частоте -0.4

Измерения характеристик точности оценки частоты синусоидального сигнала в шуме в зависимости от длины реализации, отношения сигнал / шум для различных методов АР-оценивания СПМ показали, что дисперсия и смещение оценки частоты синусоиды в шуме примерно обратно пропорциональны длине реализации и отношению сигнал / шум.

Абсолютные значения смещения и дисперсии оценки частоты синусоиды с частотой 0.2 при отношении сигнал / шум = -10 дб составили соответственно величины 0.075 и 0.04 для реализации длиной 5 отсчетов и 0.01 и 0.025 -для реализации длиной 15 отсчетов. Для алгоритма Берга зафиксирован эффект расщепления спектральных линий, отображенный на рис. 2.14, где представлена спектральная АР(28)-оценка суммы четырех синусоид с частотами -0.4, 0.1, 0.2, 0.25, по реализации длиной 56 отсчетов при дисперсии шума равной 10^{-6}. Расщепленным оказался спектральный пик, соответствующий частоте -0.4. Эффект расщепления наблюдался, как правило, для малых длин реализаций, большого порядка модели и малой дисперсии шума при использовании алгоритма Берга.

Проведенные измерения спектральных оценок для процессов, соответствующих АР-моделям, при различных длинах реализаций, уровне аддитивного шума наблюдения, порядке модели показали, что в случае, когда измеряемый процесс и его модель соответствуют друг другу, большинство методов АР-оценивания СПМ дают хорошие спектральные оценки, дисперсия которых уменьшается обратно пропорционально длине реализации и отношению сигнал / шум. На рис. 2.15 и 2.16 в качестве примера приведены соответственно истинная СПМ и ее АР(4)-оценка методом Берга последовательности, состоящей из 40 отсчетов следующего АР(4)-процесса:

$$x(n) = 2.7607\, x(n-1) - 3.8106\, x(n-2) + 2.6535\, x(n-3) - 0.9238\, x(n-4) + u(n),$$

где $u(n)$ - белый гауссовский шумовой процесс. На рис.2.17 эти спектрограммы совмещены для лучшего уяснения их различий.

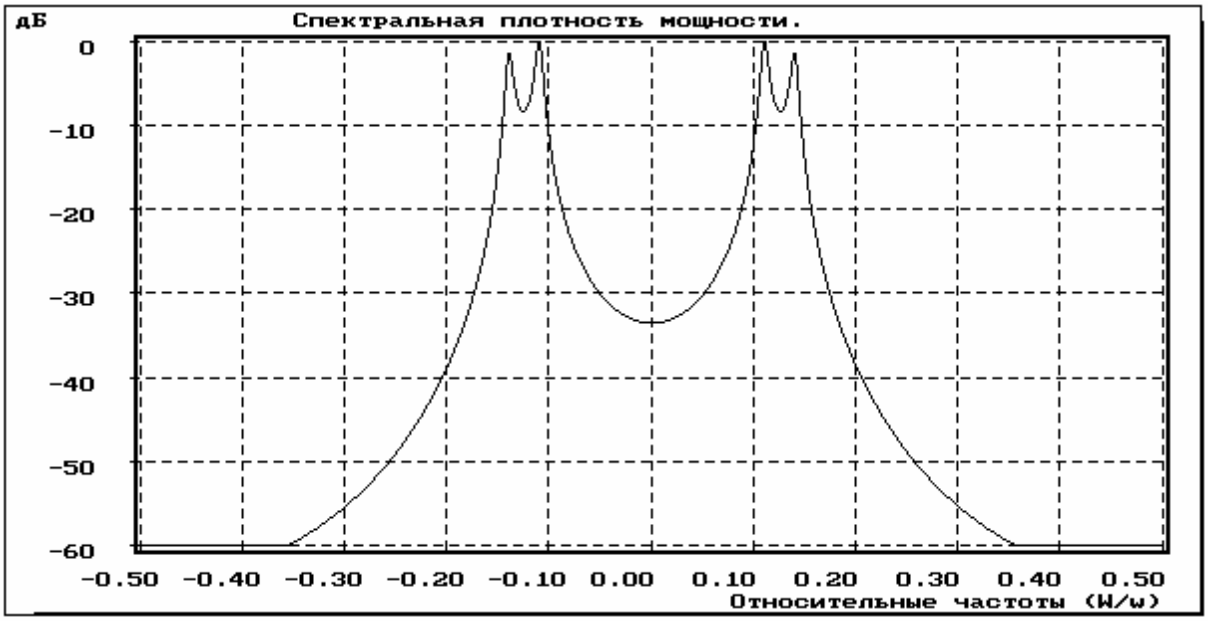


Рис. 2.15. Истинный спектр АР(4)-процесса.

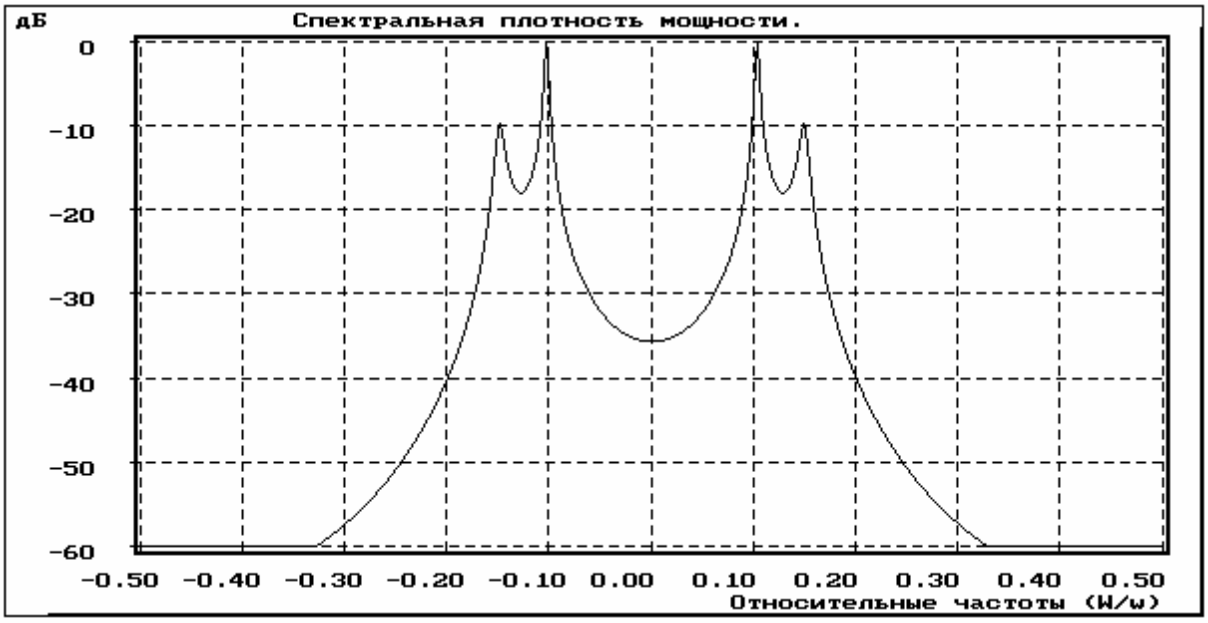


Рис. 2.16. АР(4)-оценка СПМ методом Берга модельного АР(4)-процесса

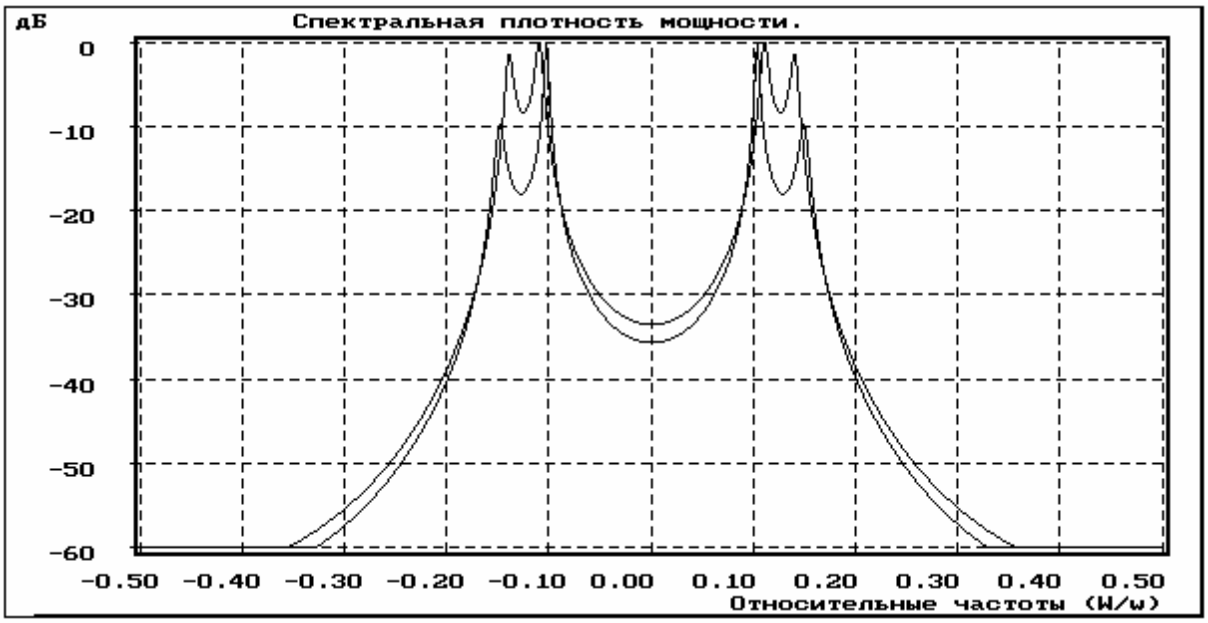


Рис. 2.17. Совмещенные спектрограммы, представленные на рис. 2.17 и 2.18.

2.5. Спектральное оценивание на основе моделей авторегрессии - скользящего среднего

2.5.1. Раздельное оценивание АР- и СС-параметров

АРСС - модель имеет больше степеней свободы, чем *АР*-модель, поэтому с ее помощью при меньшем числе параметров можно точнее аппроксимировать *СПМ* реальных процессов. Однако в отличие от большого числа разработанных линейных алгоритмов вычисления *АР* - оценок *СПМ*, для получения *АРСС* - оценок *СПМ* в настоящее время используется лишь несколько алгоритмов, а поиск новых алгоритмов - задача весьма актуальная. Сложность оценки параметров *АРСС* - модели - в нелинейных соотношениях (2.11) связи их с *АКП*. Решение нелинейных уравнений, подобных (2.11), с использованием итерационных алгоритмов требует больших вычислительных затрат и не гарантирует их сходимости. Для уменьшения вычислительных затрат предложены варианты раздельной оценки *АР* - и *СС* - параметров, использующие линейные процедуры и позволяющие получать решения, близкие к оптимальным.

Раздельный способ оценивания параметров *АРСС* - модели заложен в соотношениях (2.11), из которых следуют линейные уравнения (2.12) для определения *АР* - параметров $a[k], k=\overline{1,p}$. После определения *АР* - параметров на основе модифицированных уравнений Юла-Уолкера (2.12) производится оценка *СС* - параметров в предположении, что *АР* - параметры известны. Рассмотрим подробнее основные этапы раздельной оценки *АР* - и *СС* -параметров.

При известной *АКП АРСС* (*p, q*)-процесса соотношения

$$r_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^{p} a[k] r_{xx}[m-k], \qquad (2.49)$$

где $q+1 \le m \le q+p$, образуют систему *p* уравнений, решая которую можно определить *АР* - параметры $a[k], k=\overline{1,p}$.

В практических задачах спектрального оценивания *АКП* неизвестна, а обрабатывается лишь некоторая совокупность отсчетов данных, по которой находятся оценки *АКП*. Таким образом, один из возможных вариантов нахождения оценок *АР*-параметров - решение системы *p* уравнений (2.49), в которую вместо истинных значений *АКП* $r_{xx}[m]$

подставляются ее оценки $\hat{r}_{xx}[m]$, вычисляемые по наблюдаемым данным $x[n], n=\overline{1,N}$. И хотя с вычислительной точки зрения этот подход представляется вполне оправданным, недостаток его в том, что он использует для определения параметров $a[k], k=\overline{1,p}$ лишь часть вычисленных значений *АКП* $\hat{r}_{xx}[m], q-p \le m \le q+p$. Если предположить, что оценки *АКП* $\hat{r}_{xx}[m]$ вычислены надежно для корреляционных сдвигов от 0 до *M*, то можно использовать больше, чем минимальное число *p* уравнений Юла-Уолкера (переопределенную систему), а именно (*M*-*q*) уравнений (*M*-*q*>*p*) в форме

$$\hat{r}_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]\hat{r}_{xx}[m-k] + e[m] \ , \qquad (2.50)$$

где $q+1 \le m \le M$, а $e[m]$ - ошибка оценивания. Необходимо использовать несмещенные автокорреляционные оценки, с тем, чтобы гарантировать, что смещение ошибки будет нулевым. Затем сумма квадратов ошибок

$$r = \sum_{m=q+1}^{M} \left| e[m] \right|^2$$

минимизируется относительно авторегрессионных параметров. Эта процедура названа *модифицированным методом наименьших квадратов Юла-Уолкера.*

Получаемые в результате нормальные уравнения оказываются идентичными уравнениям, которые получаются при использовании ковариационного метода линейного предсказания, описанного выше, т.е. они имеют следующий вид:

$$\left[\mathbf{T}_p^H \mathbf{T}_p\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a[1] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a[p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (2.51)$$

где

$$\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} \hat{r}_{xx}[q+1] & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}[q-p+1] \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \hat{r}_{xx}[M-p] & & & & \hat{r}_{xx}[q+1] \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \hat{r}_{xx}[M] & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{r}_{xx}[M-p] \end{bmatrix}$$

- прямоугольная теплицева матрица, состоящая из автокорреляционных оценок, $\mathbf{T}_p^H$ - эрмитово транспонированная матрица $\mathbf{T}_p$, получаемая в результате комплексного сопряжения всех элементов матрицы $\mathbf{T}_p$ и последующей их транспозиции. Для решения матричного уравнения (2.51) можно использовать подпрограммы (например, COVAR) , которые реализуют один из быстрых алгоритмов, предназначенных для *АР* - оценивания *СПМ*, с тем отличием, что вместо последовательности данных $x[n], n = \overline{1,N}$ следует использовать последовательность оценок автокорреляции $\hat{r}_{xx}[q-p+1],\ldots,\hat{r}_{xx}[M]$. Выбор порядка *АР* -составляющей *АРСС* -процесса может быть основан на методах, применяемых к выбору порядка чистого *АР* - процесса, которые описаны в п. 2.4.5.

Для того, чтобы завершить решение задачи идентификации модели *АРСС*, необходимо определить значения *СС* -параметров. Это можно сделать различными процедурами. Одна из них предполагает обработку исходного временного ряда *КИХ* - фильтром *p*-го порядка с системной функцией

$$\hat{A}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}[k] z^{-k}, \tag{2.52}$$

где $\hat{a}[k]$ - оценки *АР* - параметров, определенные из решения системы уравнений (2.51). Каскадное (последовательное) соединение фильтра с системной функцией $H(z) = B(z)/A(z)$, формирующей *АРСС* - процесс, и фильтра с системной функцией $\hat{A}(z)$ эквивалентно фильтру, системная функция которого равна

$$\frac{B(z)}{A(z)}\hat{A}(z) \approx B(z). \tag{2.53}$$

Таким образом, фильтрация превращает исходный временной ряд в так называемый остаточный ряд $z[n]$, который является процессом скользящего среднего порядка q со спектральной плотностью мощности $|B(f)|^2$ (рис 2.18).

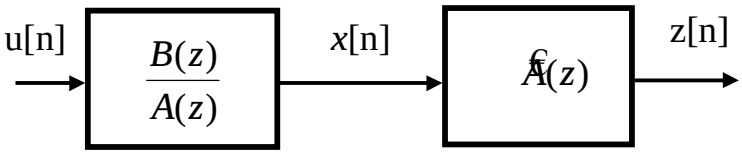


Рис 2.18. Формирование остаточного ряда

Фильтрованная последовательность длиной *N-p* будет определяться соотношением:

$$z[n] = x[n] + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}[k]x[n-k], \tag{2.54}$$

где $p + 1 \le n \le N$.

Последний этап состоит в оценке *СС* - параметров по фильтрованной последовательности $z[n]$, аппроксимирующей процесс скользящего среднего.

Оценка параметров *СС* - процесса также может быть реализована различными вариантами. Рассмотрим некоторые из них. Пусть временной ряд $z[n]$, соответствующий *СС* - модели порядка q, описывается уравнением

$$z[n] = \sum_{k=1}^{q} b[k]u[n-k] + u[n] \tag{2.55}$$

Тогда коэффициенты $b[k]$ и *АКП* оказываются связанными нелинейными соотношениями

$$r_{zz}[m]=\begin{cases} r_W \sum\limits_{k=0}^{q} b[k]b^*[k-m], & 0<m<q; \\ r_{zz}^*[-m], & -q<m<0; \\ 0, & |m|>q. \end{cases} \tag{2.56}$$

Таким образом, *АКП СС*-процесса имеет конечную длину (*2q+1*), определяемую порядком *q СС*-процесса.

Как можно определить параметры $b[k]$ фильтра, порождающего заданную *АКП* $r_{zz}[n], -q \le n \le q$?

1. Проанализируем z - преобразование заданной корреляционной последовательности, т.е. спектральную характеристику

$$\begin{aligned} S_z[z] &= \sum_{n=-q}^{q} r_{zz}[n]z^{-n} = r_W \sum_{n=-q}^{q} \sum_{k=0}^{q} b[k]b^*[k-n]z^{-n} = \\ &= r_W \sum_{k=0}^{q} b[k]z^{-k} \sum_{m=0}^{q} b^*[m]z^{m} \end{aligned} . \tag{2.57}$$

Но, так как коэффициенты конечного степенного ряда $S_z(z)$ являются комплексно-сопряженными $(r_{zz}[-n]=r_{zz}^*[n])$, его нули должны образовывать взаимно-обратные пары. Следовательно, всегда можно осуществить факторизацию этой спектральной характеристики и представить ее в виде

$$S_z(z)=a^2\prod_{k=1}^{q}(1-z_k z^{-1})(1-z_k^* z), \tag{2.58}$$

где a^2 - вещественный параметр. Сравнивая (2.57) и (2.58), получим соотношения для определения параметров $b[k]$:

$$\sqrt{r_w}\sum_{k=0}^{q} b[k]z^{-k} = a\prod_{k=1}^{q}(1-z_k z^{-1}) \tag{2.59}$$

Параметры $b[k]$ находятся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях в обеих частях уравнения (2.59). Машинная программа факторизации комплексного полинома приведена в [1].

2. Другой вариант оценивания $b[k]$ основан на аппроксимации *СС*- процесса *АР*-моделью высокого порядка и использует только линейные операции.

Пусть

$$B(z) = 1 + \sum_{k=1}^{q} b[k] z^{-k}$$

системная функция фильтра, формирующего *СС(q)*-процесс из белого шума, и пусть $1/A_{\infty}(z)$, где

$$A_{\infty}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a(k) z^{-k}$$

системная функция фильтра, формирующего из белого шума AP_{∞} - процесс бесконечного порядка, эквивалентный *СС(q)* - процессу. Тогда имеют место соотношения

$$B(z) = \frac{1}{A_{\infty}(z)}, B(z) A_{\infty}(z) = 1. \qquad (2.60)$$

Обратное z - преобразование от обеих частей соотношения (2.60) дает уравнение, левая часть которого есть свертка *СС* - параметров с *АР* -параметрами, а правая часть - единичный импульс:

$$a[m] + \sum_{n=1}^{q} b[n] a[m-n] = d[m] = \begin{cases} 1, m = 0, \\ 0, m \neq 0, \end{cases} \qquad (2.61)$$

где по определению $a[0] = 1, a[k] = 0, k < 0$.

Таким образом, *СС* - параметры $b[k]$ можно определить по параметрам $a[k]$ некоторой эквивалентной *АР* - модели бесконечного порядка путем решения подсистемы q линейных уравнений, полученных из (2.61). На практике вычисляют по конечной записи данных оценки параметров *АР(М)* - модели высокого порядка, такого, что $M >> q$. Используя *АР(М)* -параметры $\hat{a}_M[1], \ldots, \hat{a}_M[M]$, можно записать следующую систему уравнений

$$\hat{a}_M[m] + \sum_{n=1}^{q} b[n]\hat{a}_M[m-n] = e_{CC}[m] \quad . \qquad (2.62)$$

В идеальном случае, в соответствии с (2.61), ошибка $e_{CC}[m]$ должна быть равна нулю для всех *m*, кроме *m=0*. Однако для конечной записи данных и ограниченного порядка *АР(М)* - модели эта ошибка не будет равна нулю. Поэтому оценки *СС* - параметров должны определяться минимизацией суммы квадратов ошибок

$$\hat{r}_q = \sum_m \left|e_{CC}[m]\right|^2 \Big/ M \ . \qquad (2.63)$$

Уравнение (2.62) по своей форме идентично выражению для ошибки линейного предсказания вперед с тем отличием, что вместо отсчетов данных в нем фигурируют оценки параметров $\hat{a}_m[k]$. В соотношении (2.63) можно использовать два интервала суммирования: интервал $0 \le m \le M + q$, который соответствует автокорреляционному методу линейного предсказания, и интервал - $q \le m \le M$, который соответствует ковариационному методу линейного предсказания. Решение нормальных уравнений в случае автокорреляционного метода можно выполнить с помощью подпрограммы **YULEWALKER**, а в случае ковариационного метода - с помощью подпрограммы **COVAR**, приведенных в [1] .

3. Наконец, обратим внимание на следующее обстоятельство. Хотя *СС* - параметры и необходимы для оценивания параметров *АРСС* -модели временного ряда, для получения оценки *СПМ* нужна лишь оценка величины $Tr_W\left|\hat{B}(f)\right|^2$, которую можно получить, минуя оценку *СС* - параметров. Действительно, находя коррелограммную оценку *СПМ* фильтрованной последовательности $z[n]$, получим

$$Tr_W\left|\hat{B}(f)\right|^2 = T\sum_{m=-q}^{q}\hat{r}_{zz}[m]\exp\{-j2pfmT\}, \qquad (2.64)$$

где $\hat{r}_{zz}[m]$ - оценка автокорреляции фильтрованной последовательности $z[n]$ (2.54) может быть вычислена, например, по соотношению

$$\hat{r}_{zz}[n]=\begin{cases}\sum_{k=0}^{p}\sum_{m=0}^{p}\hat{a}[k]\hat{a}[m]r_{xx}[n+m-k], & -q\le n\le q,\\ 0, & |n|>q.\end{cases} \tag{2.65}$$

на основе оценок *АКП* исходного временного ряда.

2.5.2. Примеры спектрального оценивания на основе АРСС-моделей

На рис.2.19 приведена АРСС(9, 9)-оценка последовательности длиной N =56 отсчетов, состоящей из суммы двух синусоид с частотами 0.2 и 0.21 при отношении сигнал / шум SNR = 0 дб ($A_{1,2}$ = 1, дисперсия шума =0.5). Для этого случая АР- параметры оценивались алгоритмом Берга, СС-параметры оценивались на основе длинной АР-модели (p =30), параметры которой определялись также алгоритмом Берга, с последующей оценкой СС-параметров ковариационным методом. Из сравнения спектрограмм рис.2.11 и 2.19 можно сделать вывод о том, что АРСС-модель при существенно меньшем эквивалентном порядке модели, равном $p + q$ = 18, и, следовательно, меньшей дисперсии оценки позволяет получить лучшие оценки СПМ и реализовать лучшее разрешение, чем АР-модель для сильно зашумленных синусоид. Этот весьма важный для практики вывод в пользу АРСС-оценок СПМ подтвержден и многими другими вариантами полученных АРСС-оценок.

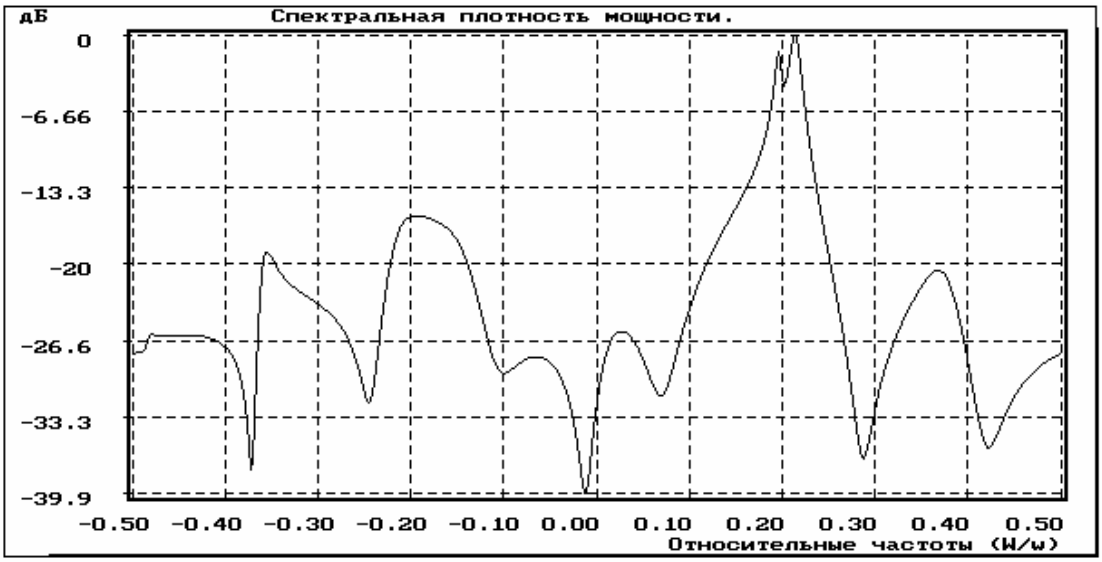


Рис. 2.19. Спектральная АРСС (9, 9)-оценка суммы двух синусоид в шуме (56 отсчетов, SNR = 0 дб) с раздельным оцениванием АР- и СС-параметров

На рис. 2.20 представлен истинный спектр АРСС(2,2)-процесса, удовлетворяющего следующему разностному уравнению:

$$x(n) = 1.2727922\, x(n-1) - 0.81\, x(n-2) + u(n) - u(n-1),$$

где $u(n)$ - белый гауссов шум. Пики спектра этого процесса соответствуют относительным частотам 0.125 и -0.125, а провалы (нули) - частотам 0 и 0.5. На рис. 2.21 представлена АРСС(2, 2)-оценка СПМ этого процесса без шума наблюдения для реализации длиной 100 отсчетов при оценке АР-параметров ковариационным методом, СС-параметров - методом Юла - Уолкера с использованием эквивалентной длинной АР(20)-модели, параметры которой оценивались ковариационным алгоритмом. Очевидно хорошее соответствие оценки истинному спектру.

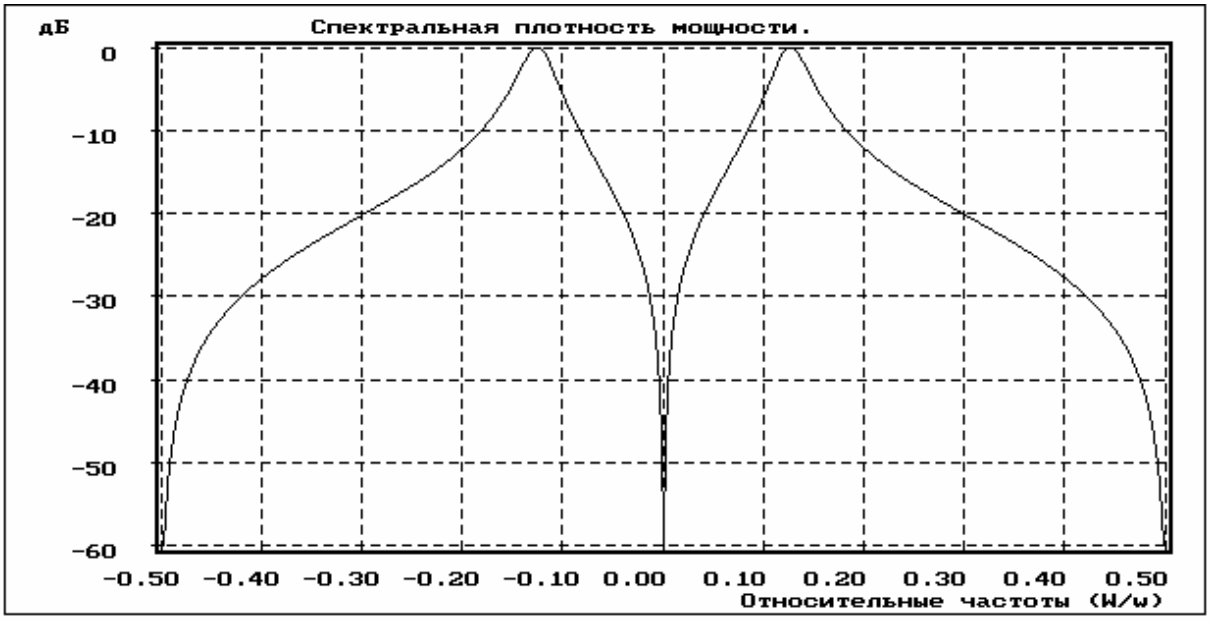


Рис. 2.20. Истинный спектр АРСС (2, 2)-процесса

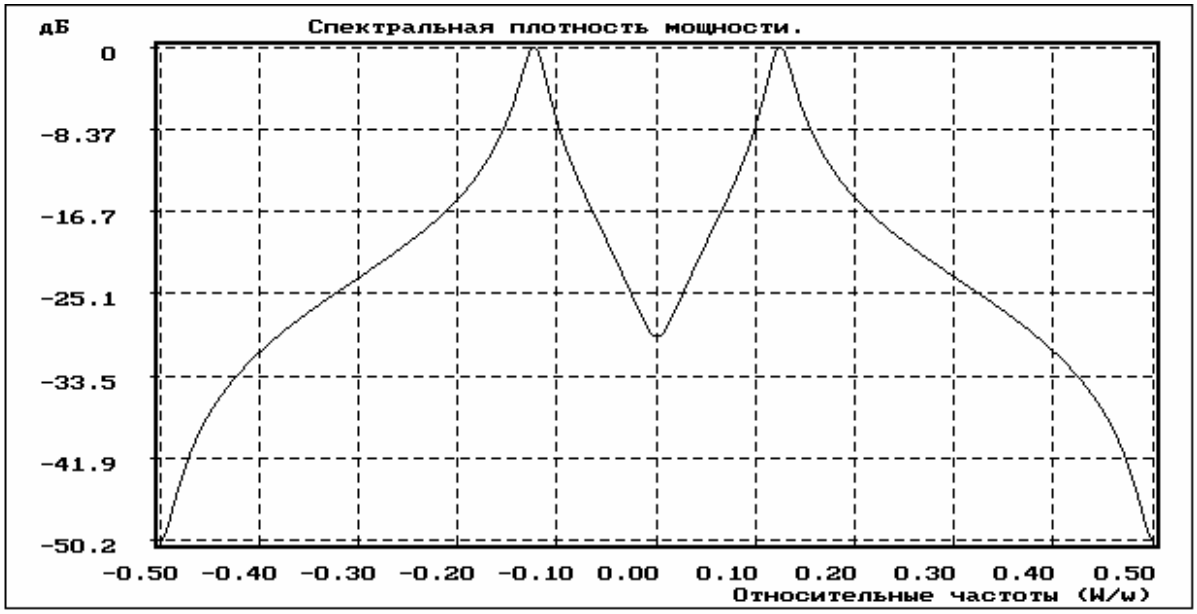


Рис. 2.21. АРСС (2, 2)-оценка СПМ процесса, спектр которого отображен на рис. 6.19, по реализации длиной 100 отсчетов

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫБОРОЧНЫХ ДАННЫХ СУММОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (МЕТОД ПРОНИ)

Метод Прони — это метод моделирования последовательности отсчетов данных с помощью линейной комбинации экспоненциальных функций был предложен французским ученым Гаспаром Рише (бароном де Прони) в 1795 году. Он пришел к выводу, что законы, описывающие расширение газов, могут быть представлены с помощью суммы экспоненциальных функций и предложил метод для интерполяции данных своих измерений, основанный на согласовании параметров экспоненциальной модели с измеренными. Исходная процедура точно согласует экспоненциальную кривую содержащую p затухающих экспонент $A_j exp(a_j t)$, каждая из которых характеризуется двумя параметрами A_j и a_j, с $2p$ результатами измерений данных. Современный вариант метода Прони обобщен на модели, состоящие из затухающих синусоид (комплексных экспонент), кроме этого, в нем используется процедура оценивания параметров модели по методу наименьших квадратов для приближенной подгонки модели в тех случаях, когда число точек данных $N>2p$ – превышает минимально необходимое их число для определения параметров p экспонент. Эта процедура получила название обобщенного метода Прони.

Метод Прони, строго говоря, не является методом спектрального оценивания. Тем не менее он тесно связан с алгоритмами линейного предсказания по методу наименьших квадратов, используемыми при спектральном оценивании на основе моделей авторегрессии [1]. В отличие от стохастических параметрических АРСС – моделей, в методе Прони для аппроксимации данных используется детерминированная экспоненциальная модель, вычисление спектральной плотности энергии (СПЭ) которой и составляет суть спектральной интерпретации метода Прони.

Заметим, что периодограммную оценку спектральной плотности мощности (СПМ) можно считать эквивалентной среднеквадратичной аппроксимации данных с помощью ряда Фурье, т.е. гармонического набора комплексных синусоид. Так для N отсчетов данных $x[0],\ldots,x[N-1]$, разделенных интервалом T, аппроксимирующая последовательность $\hat{x}[n]$ имеет вид

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=0}^{N-1} a_m \exp(j2pf_m nT), \qquad n = \overline{0, N-1},$$

где

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2pf_m nT), \qquad m = \overline{0, N-1},$$

если коэффициенты a_m определяются из условия минимизации суммарной среднеквадратичной ошибки аппроксимации

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| x[n] - \hat{x}[n] \right|^2,$$

а частоты f_m гармонически связаны между собой:

$$f_m = m/NT, \qquad m = \overline{0, N-1}.$$

Таким образом, в гармонической модели частоты и число синусоид задаются заранее, поэтому необходимо оценивать только мощность этих синусоидальных составляющих на основе соотношения

$$|a_m|^2 = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2pmn/N) \right|^2, \qquad m = \overline{0, N-1},$$

соответствующего вычислению СПМ дискретной периодограммы.

В свою очередь, негармоническая модель, используемая в методе Прони, требует оценки не только мощности, но и числа синусоид и их частот. С другой стороны, гармоническая модель наблюдаемых данных предполагает их периодическое продолжение вне интервала наблюдения, что далеко не всегда соответствует реальному поведению процесса и связано с отрицательным проявлением эффектов окна. В негармонической модели Прони искажающее действие окна исключено, поэтому точность оценки СПМ по сравнению со стандартным подходом на основе преобразования Фурье может значительно улучшиться.

3.1. Метод наименьших квадратов Прони

Предположим, что имеется N комплексных отсчетов данных $x[n]$, $n=\overline{1,N}$. Обобщенный метод Прони позволяет оценить $x[n]$ с помощью набора из p экспоненциальных функций с произвольными амплитудами A_k, частотами f_k, фазами Q_k и коэффициентами затухания a_k:

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=1}^{p}A_k\exp[(a_k+j2pf_k)(n-1)T+j\Theta_k]=\sum_{k=1}^{p}h_k z_k^{n-1}, \qquad (3.1)$$

где

$$h_k=A_k\exp(j\Theta_k),$$

$$z_k=\exp[(a_k+j2pf_k)T].$$

Заметим, что h_k – это комплексная амплитуда, представляющая собой независящий от времени параметр, а z_k – это комплексная экспонента, которая описывает параметр, зависящий от времени.

Отыскание параметров A_k, f_k, Q_k, a_k и r, минимизирующих сумму квадратов ошибок

$$r=\sum_{n=1}^{N}\left|e[n]\right|^2,$$

где

$$e[n]=x[n]-\hat{x}[n]=x[n]-\sum_{k=1}^{p}h_k z_k^{n-1},$$

представляет трудную нелинейную задачу аппроксимации по методу наименьших квадратов. Для ее решения могут быть использованы различные итеративные алгоритмы, требующие больших вычислительных затрат и не всегда сходящиеся к глобальному минимуму. Альтернативное субоптимальное решение, в котором используются решения двух систем линейных уравнений, основано на методе наименьших квадратов Прони.

Ключевым моментом метода Прони является тот факт, что функция $\hat{x}[n]$ является решением некоторого однородного линейного разностного уравнения с постоянным

коэффициентами, вид которого можно определить следующим образом. Определим сначала полином $F(z)$, корнями которого являются экспоненты z_k:

$$\Phi(z) = \prod_{k=1}^{p} (z - z_k), \tag{3.2}$$

для которого справедливо эквивалентное представление в виде степенного ряда

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{p} a[m] z^{p-m}, \tag{3.3}$$

с комплексными коэффициентами $a(m)$, для которых $a(0)=1$. Осуществляя в выражении (3.1) сдвиг индекса от n к $n–m$ и домножая обе его части на коэффициент $a(m)$, получим

$$a[m]\hat{x}[n-m] = a[m]\sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-m-1},$$

где $1 \le n - m \le N$.

Записывая аналогичные произведения $a[0]\hat{x}[n],\ldots,a[m-1]\hat{x}[n-m-1]$ и суммируя $p+1$ произведение, получаем

$$\sum_{m=0}^{p} a[m]\hat{x}[n-m] = \sum_{i=1}^{p} h_i \sum_{m=0}^{p} a[m] z_i^{n-m-1}, \tag{3.4}$$

где $p+1 \le n \le N$.

Осуществляя в (3.4) подстановку

$$z_i^{n-m-1} = z_i^{n-p-1} z_i^{p-m},$$

получим уравнение

$$\sum_{m=0}^{p} a[m]\hat{x}[n-m] = \sum_{i=1}^{p} h_i z_i^{n-p-1} \sum_{m=0}^{p} a[m] z_i^{p-m} = 0, \tag{3.5}$$

в котором равенство нулю следует из факта, что вторая сумма в (3.4) есть полином $F(z_i)$, вычисленный в точке, соответствующей одному из его корней. Таким образом, для аппроксимирующей последовательности $\hat{x}(n)$ справедливо разностное уравнение

$$\hat{x}[n] = -\sum_{m=1}^{p} a[m]\hat{x}[n-m], \tag{3.6}$$

определенное для $p+1 \le n \le N$.

Полином $F(z)$, ассоциированный с этим разностным уравнением, называют характеристическим, а его корни z_k определяют экспоненциальные параметры в (3.1).

Если учесть, что разность между реальными измеренными данными $x[n]$ и их аппроксимацией $\hat{x}[n]$ есть величина ошибки $e[n]$, так, что

$$x[n] = \hat{x}[n] + e[n], \quad n = \overline{0, N-1}, \tag{3.7}$$

то подстановка (3.7) в (3.6) дает соотношение

$$x[n] = -\sum_{m=1}^{p} a[m]\hat{x}[n-m] + e[n] = -\sum_{m=1}^{p} a[m]x[n-m] + \sum_{m=0}^{p} a[m]e[n-m], \tag{3.8}$$

где использовано равенство $\hat{x}[n-m] = x[n-m] - e[n-m]$ и положено $a[0]=1$.

Соотношение (3.8) можно трактовать как моделирующее процесс (3.1) с помощью модели авторегрессии и скользящего среднего (АРСС–модели) с идентичными АР– и СС–параметрами, возбуждаемой шумовым процессом $e[n]$.

В обобщенном методе Прони вводится новая ошибка

$$e[n] = \sum_{m=0}^{p} a[m]e[n-m], \qquad n = p+1, \ldots, N, \tag{3.9}$$

и моделирующее $x[n]$ уравнение принимает вид

$$x[n] = -\sum_{m=1}^{p} a[m]x[n-m] + e[n], \tag{3.10}$$

который идентичен уравнению для ошибки линейного предсказания вперед $e[n]$ с коэффициентами фильтра линейного предсказания $a[m]$.

Выбирая параметры $a[m]$ из условия минимизации суммы квадратов ошибок линейного предсказания $\sum_{n=p+1}^{N} \left|e[n]\right|^2$, мы тем самым сводим нелинейную задачу минимизации суммы квадратов ошибок аппроксимации $r = \sum_{n=1}^{N} \left|e[n]\right|^2$, к линейной системе нормальных ковариационных уравнений линейного предсказания.

Таким образом, первый этап обобщенной процедуры Прони сводится к процедуре оценивания АР–параметров $a[m]$ на основе ковариационного метода линейного предсказания (программа COVAR) с оценкой числа экспонент p по правилам выбора порядка АР–модели.

Второй этап процедуры состоит в нахождении корней z_i полинома (3.3) сформированного из коэффициентов линейного предсказания $a[m]$ (факторизация полинома).

Наконец, когда значения параметров $z_1, \mathbf{K}\, z_p$ были определены с помощью линейного предсказания по методу наименьших квадратов и факторизацией полинома, то аппроксимация $\hat{x}[n]$, описываемая уравнением (3.1), становится линейной относительно оставшихся неизвестных параметров $h_1, \mathbf{K}, h_p$. Матричная форма соотношения (3.1) имеет вид

$$\hat{X} = Z \cdot H, \tag{3.11}$$

где $(N \times p)$ матрица Z, $(p \times 1)$ вектор H и $(N \times 1)$ вектор $\hat{X}$ определяются выражениями:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ z_1 & z_1 & \mathbf{L} & z_1 \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \mathbf{L} & z_p^{N-1} \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \mathrm{M} \\ h_p \end{bmatrix}, \quad \hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x}[1] \\ \hat{x}[2] \\ \mathrm{M} \\ \hat{x}[p] \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Минимизируя сумму квадратов ошибок $\sum_{n=1}^{N}\left[x[n]-\hat{x}[n]\right]^2$ по каждому параметру h_k, получаем следующее комплексное нормальное уравнение для их определения

$$\left(Z^H Z\right)H = Z^H X\,, \tag{3.13}$$

где $(p \times p)$ матрица $\left(Z^H Z\right)$ и $(N \times 1)$ вектор отсчетов данных определяются выражениями

$$Z^H Z = \begin{bmatrix} g_{11} & \mathbf{L} & g_{1p} \\ \mathrm{M} & \mathbf{O} & \mathrm{M} \\ g_{p1} & \mathbf{L} & g_{pp} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \mathrm{M} \\ x[N] \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

$$g_{jk} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(z_j^* z_k\right)^n = g_{kj}^*, \qquad g_{jk} = \begin{cases} \dfrac{\left(z_j^* z_k\right)^N - 1}{z_j^* z_k - 1}, & z_j^* z_k \neq 1, \\ N, & z_j^* z_k = 1. \end{cases}$$

Система уравнений (3.14) решается относительно неизвестных параметров h_k, например, по методу Холецкого [9].

По найденным параметрам z_i и h_i находятся коэффициенты затухания α_i, частоты f_i, амплитуды A_i и начальные фазы Θ_i с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} a_i &= \ln|z_i|, \quad f_i = \mathrm{arctg}\left[\mathrm{Im}\{z_i\}/\,\mathrm{Re}\{z_i\}\right]/\,2pT, \\ A_i &= |h_i|, \qquad \Theta_i = \mathrm{arctg}\left[\mathrm{Im}\{h_i\}/\,\mathrm{Re}\{h_i\}\right]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

3.2. Модифицированный метод наименьших квадратов Прони

Для процессов, состоящих из p вещественных незатухающих (α=0) синусоид и шума, разработан модифицированный вариант метода Прони. В этом случае модель (3.1) можно записать в виде

$$\hat{x}(n)=\sum_{k=1}^{p}2A_k\cos[2pf_k(n-1)T+\Theta_k]=\sum_{k=1}^{p}\left[h_k z_k^{n-1}+h_k^*(z_k^*)^{n-1}\right], \qquad (3.16)$$

где $1\le n\le N$, $h_k=A_k\exp(j\Theta_k)$, $z_k=\exp(j2pf_kT)$.

Заметим, что z_k являются величинами единичного модуля с произвольными частотами, которые появляются комплексно сопряженными парами до тех пор, пока $f_k\ne 0$ либо $f_k\ne 1/2T$.

Соответствующий (3.2) и (3.3) характеристический полином для этого случая имеет вид

$$\Phi(z)=\prod_{i=1}^{p}(z-z_i)(z-z_i^*)=\sum_{k=0}^{2p}a[k]z^{2p-k}=0, \qquad (3.17)$$

где $a(0)=1$, а $a(k)$ – вещественные коэффициенты. Поскольку корни полинома (3.17) имеют единичный модуль и появляются в виде комплексно сопряженных пар, то уравнение (3.17) должно быть инвариантным относительно подстановки z^{-1} вместо z:

$$z^{2p}\Phi(z^{-1})=z^{2p}\sum_{k=0}^{2p}a[k]z^{k-2p}=\sum_{k=0}^{2p}a[k]z^{k}=0. \qquad (3.18)$$

Сравнивая (3.17) и (3.18) можно видеть, что $a[k]=a[2p-k]$, при $0\le k\le p$, где $a[0]=a[2p]=1$. Следовательно, требование на комплексно сопряженные пары корней единичного модуля реализуются посредством наложения на коэффициенты полинома свойства симметрии относительно центрального элемента. Таким образом, однородное линейное разностное уравнение, для которого (3.17) рассматривается в качестве его решения, имеет вид

$$a[p]\hat{x}[n-p]+\sum_{k=1}^{p}\left(a[p-k]\hat{x}[n-p+k]+a[p+k]\hat{x}[n-p-k]\right)=0 \qquad (3.19)$$

для $2p+1\le n\le N$.

С учетом равенства $a[p-k]=a[p+k], k=\overline{1,p}$ и введением коэффициентов $g_p[k]=a[p-k]/a[p]$ (2.84) преобразуется в уравнение

$$\hat{x}[n-p]+\sum_{k=1}^{p} g_p[k]\left(\hat{x}[n-p+k]+\hat{x}[n-p-k]\right)=0. \qquad (3.20)$$

В модифицированном методе Прони на первом этапе ошибка линейного предсказания, определяемая уравнением (3.10), заменяется ошибкой линейного сглаживания, использующей как предшествующие, так и последующие значения отсчетов данных:

$$e[n]=x[n]+\sum_{k=1}^{p} g_p[k]\left(x[n+k]+x[n-k]\right),$$

определенной на интервале $p+1 \le n \le N-p$ (используются только имеющиеся отсчеты данных), и минимизируется сумма квадратов ошибок сглаживания

$$r_p=\sum_{n=p+1}^{N-p}\left|e[n]\right|^2 .$$

Получаемые нормальные уравнения для определения коэффициентов $g_p[k]$ соответствуют уравнениям модифицированного ковариационного метода оценки АР–параметров [1]. Обобщение этого метода на рассматриваемый случай описано в [1] и реализовано программой SYMCOVAR.

3.3. Спектральная интерпретация метода Прони

Процедура Прони обычно завершается вычислением оценок параметров, определяющих амплитуды, чистоты, фазы и коэффициенты затухания. Однако возможно вычисление и ”спектра” Прони, соответствующего экспоненциальной аппроксимации $\hat{x}[n]$. При этом можно получать разные варианты спектров в зависимости от принятых допущений относительно вида колебаний вне интервала наблюдения.

Одно из допущений состоит в том, что сумма экспонент дискретного времени в соотношении (3.1) определяется на интервале $-\infty<n<\infty$ как односторонняя функция вида

$$\hat{x}[n+1]=\begin{cases}\sum_{k=1}^{p} h_k z_k^n, & n \ge 0;\\ 0, & n<0.\end{cases} \qquad (3.21)$$

Z–преобразование от (3.21) имеет вид

$$\hat{X}_1(z) = \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{h_k}{1 - z_k z^{-1}}\right),$$

для $|z|>|z_k|<1$ (затухающие экспоненты), спектральная плотность энергии Прони для рассматриваемой модели будет определяться выражением

$$\hat{S}_1(f) = \left|T\,\hat{X}_1[\exp(j2pfT)]\right|^2, \tag{3.22}$$

которое определено на интервале частот $-1/2T \le f \le 1/2T$.

Другим возможным допущением является двусторонняя функция вида

$$\hat{x}_2[n] = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{p} h_k z_k^n, & n \ge 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{p} h_k \left(z_k^*\right)^2, & n < 0, \end{cases} \tag{3.23}$$

где

$$z_k = \exp(a_k T + j2pf_k T) \text{ и } \left(z_k^*\right)^{-1} = \exp(-a_k T + j2pf_k T).$$

Такое определение (3.23) обеспечивает симметрию затухающей части экспоненты относительно начала координат, а Z–преобразование от $\hat{x}_2(n)$ примет вид

$$\hat{X}_2(z) = \sum_{k=1}^{p} h_k \left(\frac{1}{1 - z_k z^{-1}} - \frac{1}{1 - \left(z_k^* z\right)^{-1}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} h_k \frac{(z_k - 1/z_k^*)z^{-1}}{1 - (z_k + 1/z_k^*)z^{-1} + (z_k / z_k^*)z^{-2}},$$

для $\left|z_k^{-1}\right| > |z| > |z_k| < 1$.

Спектральная плотность энергии в этом случае определится как

$$\hat{S}_2(f) = \left| TX_2\left[\exp(j2pfT)\right]\right|^2, \tag{3.24}$$

для $-1/2T \le f \le 1/2T$.

В общем случае спектр $\hat{S}_2(f)$ имеет более острые пики, чем спектр $\hat{S}_1(f)$. Высота пиков СПЭ определяется величиной $(2A_k/\alpha_k)^2$, а ширина пиков (по уровню 6 дБ) величиной α_k/π, поэтому разрешение по частоте меняется в зависимости от затухания. Для незатухающей синусоиды (α=0), определенной на бесконечном временном интервале, $\hat{S}_2(f)$ имеет бесконечное значение на частоте синусоиды и ведет себя подобно дельта–функции.

3.4. Примеры спектральных оценок на основе метода Прони

На рис. 3.1 - 3.4 представлены спектральные оценки комплексной 64-точечной тест-последовательности Марпла, полученные на основе обобщенного метода Прони с использованием односторонней и двусторонней моделей при значениях порядка моделей 16 и 30 соответственно. На рис. 3.5 - 3.7 представлены спектральные оценки действительной 64-точечной тест-последовательности, полученные на основе модифицированного метода Прони с использованием односторонней модели и линейчатого спектра при значениях порядка моделей 16 и 30 соответственно. Действительная тест-последовательность, содержащая три синусоиды с частотами 0,1, 0,2, и 0,21 при отношении сигнал/шум +10дб, +20дб, +30дб соответственно, где отношение сигнал/шум определяется как отношение мощности каждой синусоиды к полной мощности аддитивного окрашенного шума, полученного фильтрацией белого гауссова шума, заимствована из обзора Кея и Марпла [7]. Полоса шумового процесса центрирована относительно частоты 0,35.

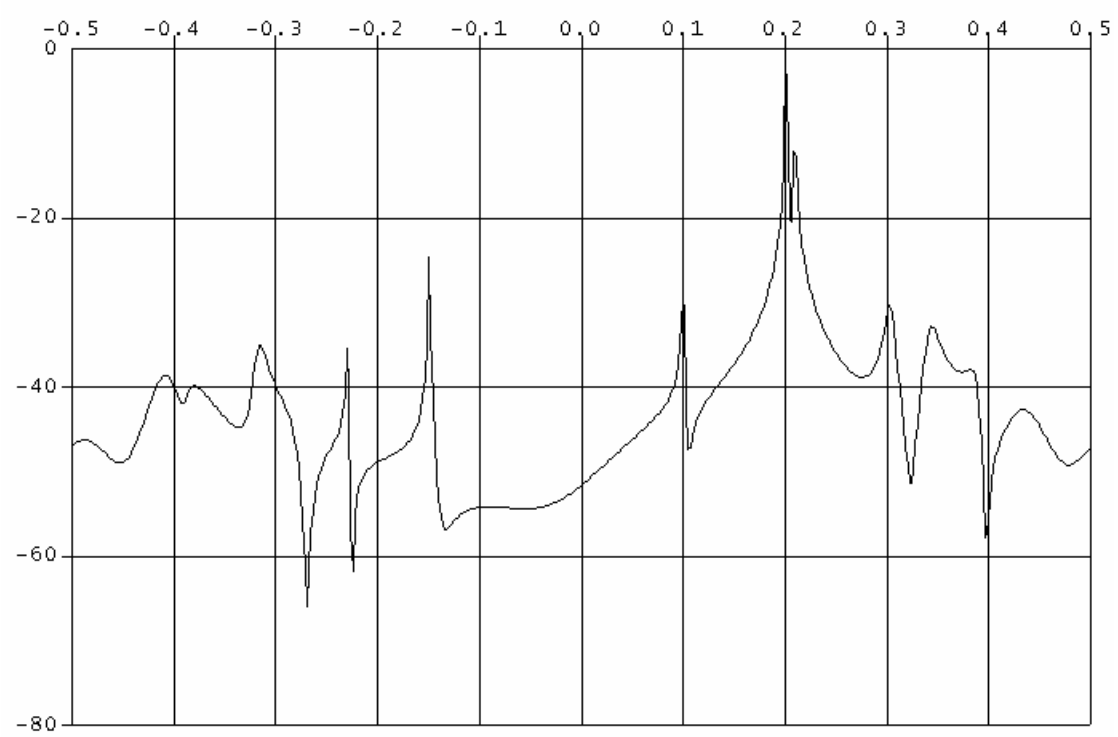


Рис.3.1. Обобщенный метод Прони. Порядок модели 16, односторонний спектр тест-последовательности Марпла

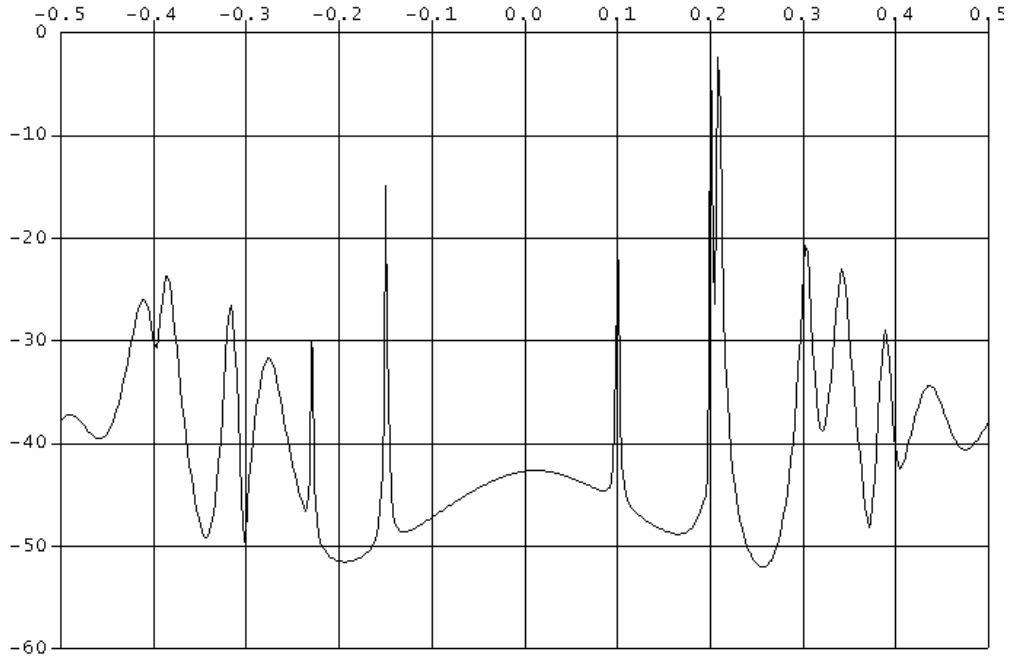


Рис.3.2. Обобщенный метод Прони. Порядок модели 16, двусторонний спектр тест-последовательности Марпла

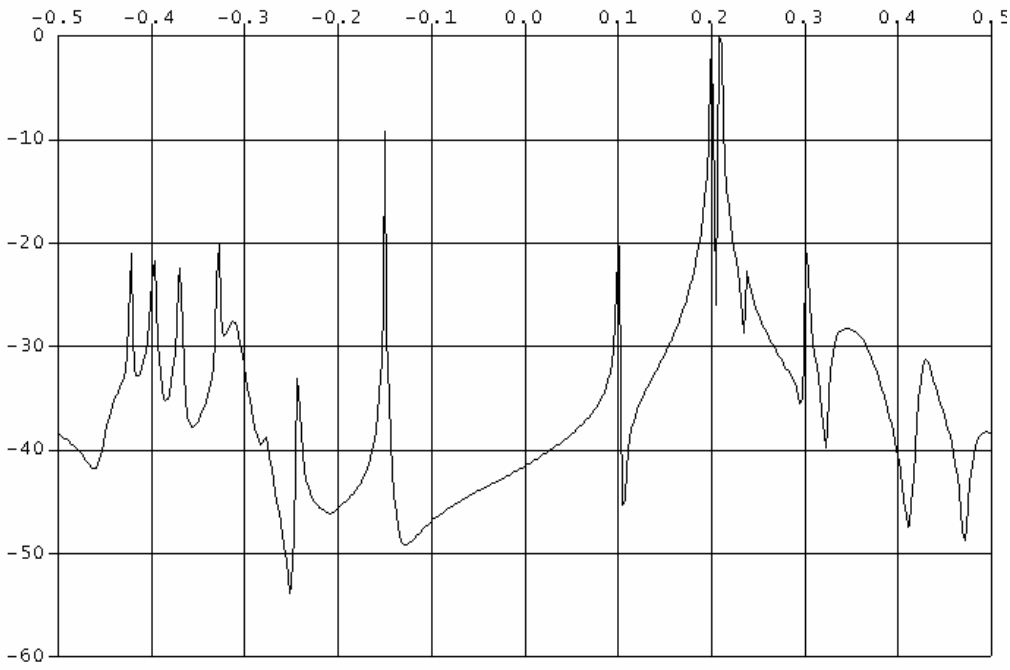


Рис.3.3. Обобщенный метод Прони. Порядок модели 30, односторонний спектр тест-последовательности Марпла

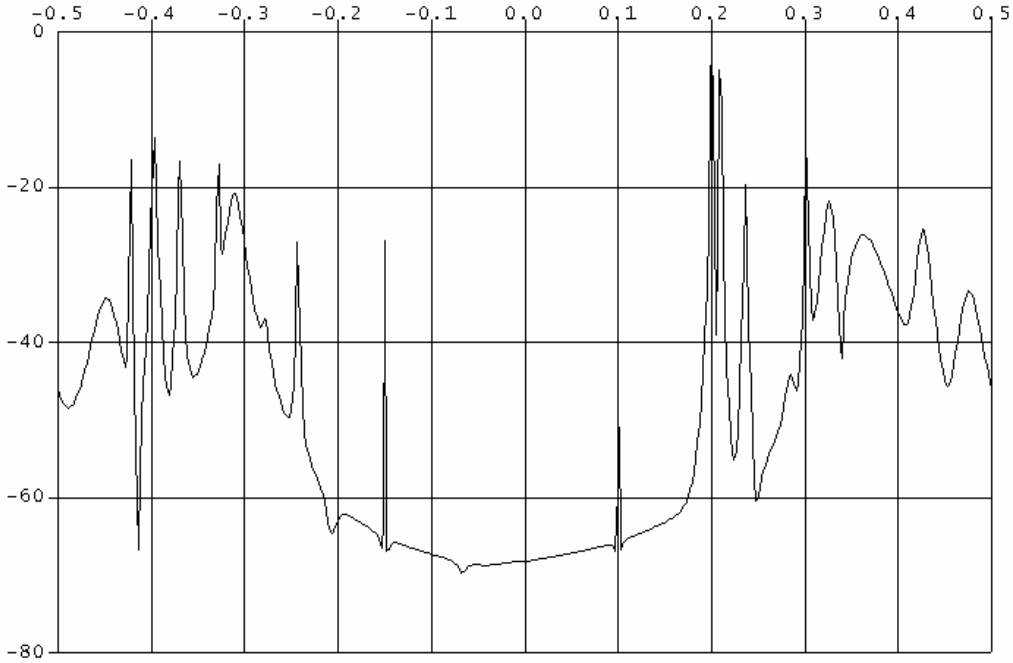


Рис. 3.4. Обобщенный метод Прони. Порядок модели 30, двусторонний спектр тест-последовательности Марпла

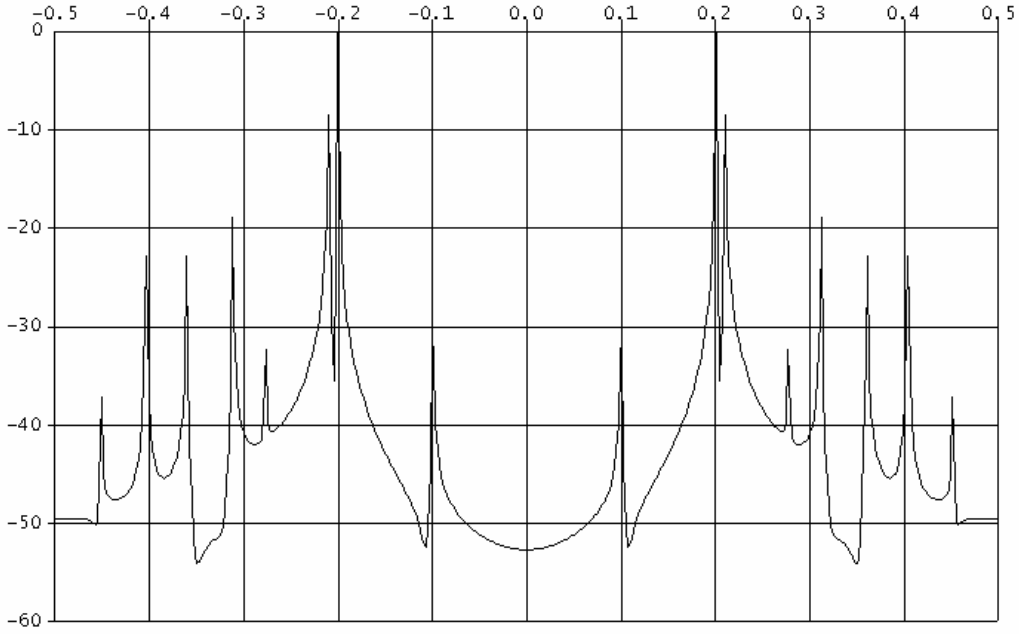


Рис.3.5. Модифицированный метод Прони. Порядок модели 16, односторонний спектр тест-последовательности Кея

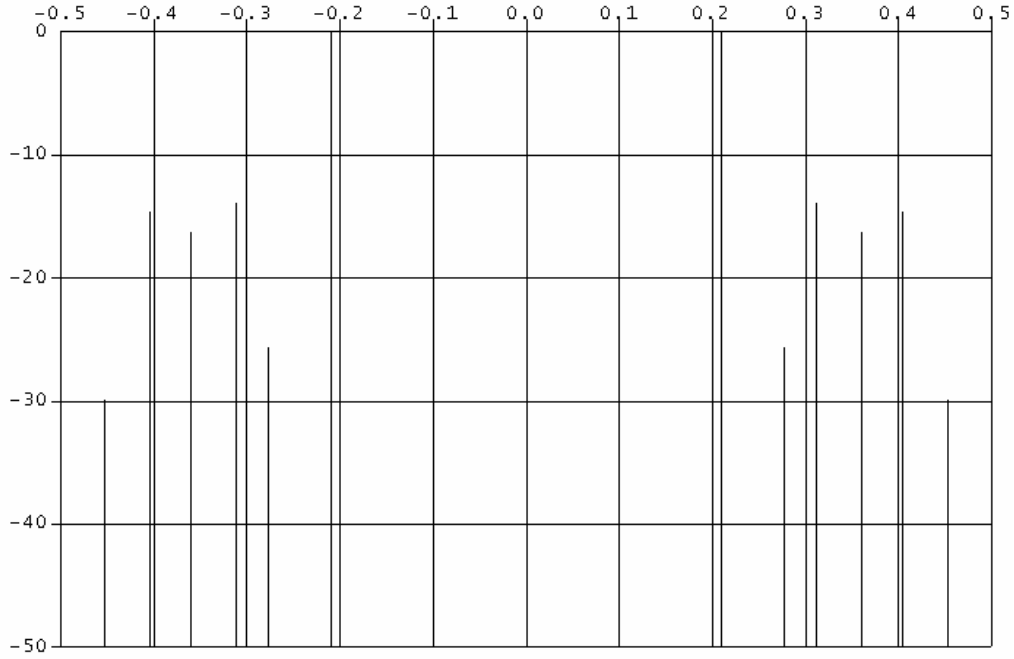


Рис.3.6. Модифицированный метод Прони. Порядок модели 16, линейчатый спектр тест-последовательности Кея

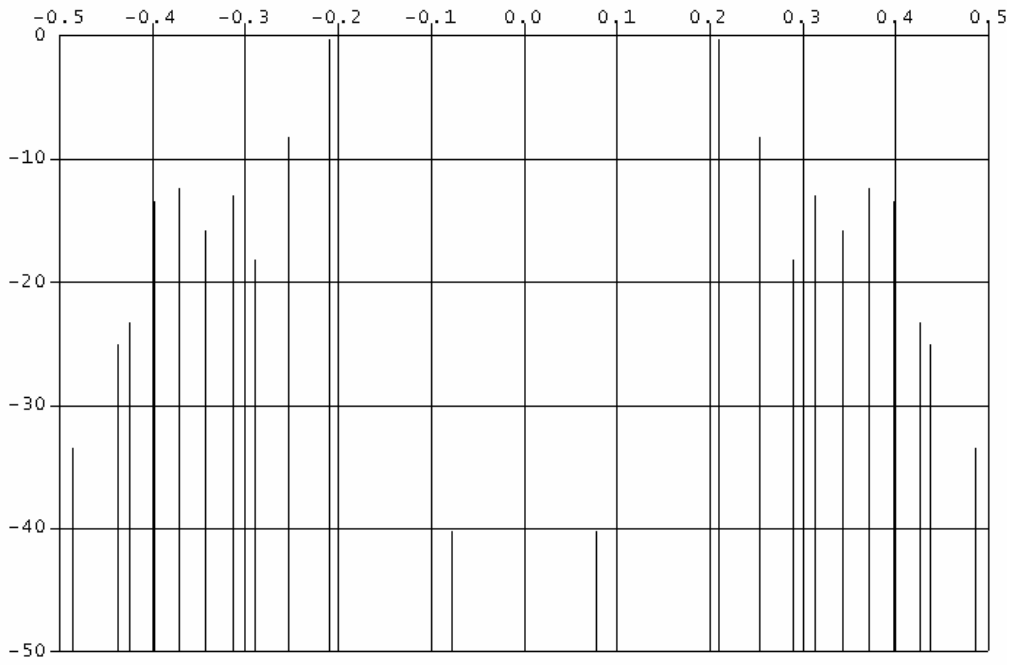


Рис.3.7. Модифицированный метод Прони. Порядок модели 30, линейчатый спектр тест-последовательности Кея

ГЛАВА 4. МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЧАСТОТЫ, ОСНОВАННЫЕ НА АНАЛИЗЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Методы оценивания частоты на основе анализа собственных значений автокорреляционной матрицы или соответствующей матрицы данных представляют собой класс спектральных методов, обеспечивающих лучшие характеристики разрешения и оценивания частоты, чем авторегрессионные методы и метод Прони [1], особенно при низких отношениях сигнал / шум. Ключевой операцией в этих методах является разделение информации, содержащейся в автокорреляционной матрице или матрице данных, на два векторных подпространства – подпространство сигнала и подпространство шума. Такое разделение наиболее эффективно, если есть априорная информация о числе синусоидальных компонент, присутствующих в сигнале, либо собственные значения сигнальных векторов больше собственных значений шумовых векторов. После выполнения процедуры разложения матриц по векторам сигнала и шума можно определять различные функции от векторов сигнала и шума для получения оценок частоты, графическое представление которых имеет острые пики на частотах синусоид или других узкополосных компонент. Однако эти оценки, строго говоря, не будут оценками истинной спектральной плотности мощности (СПМ), поскольку интенсивность пиков не пропорциональна мощности синусоид, а их обратное преобразование Фурье не восстанавливает исходную автокорреляционную последовательность. Есть также возможность замены исходных матриц их аппроксимациями пониженного ранга, путем сохранения лишь информации, соответствующей векторам подпространства сигнала, что способствует увеличению отношения сигнал / шум за счет устранения вклада мощности компонент подпространства шума. Очищенные от шума матрицы могут быть эффективно использованы в любой из известных процедур оценки СПМ как классических, так и высокого разрешения. Ниже мы рассмотрим оба направления, названные соответственно процедурами оценки частоты в подпространстве шума и подпространстве сигнала.

4.1. Некоторые сведения из матричной алгебры

4.1.1. Собственная система матрицы

Известно, что экспонента $\exp(j2\pi ft)$ является собственной функцией линейной системы с постоянными во времени параметрами в том смысле, что реакция системы на такой экспоненциальный сигнал сохраняет его форму, изменяя лишь величину его комплексной амплитуды. Аналогично, если ненулевой вектор $\mathbf{q}$ $(n \times 1)$ в результате линейного

преобразования, описываемого квадратной (n x n) матрицей **A**, остается неизменным и лишь изменяет свой масштаб в λ раз, т. е.

$$\mathbf{Aq}=\lambda\mathbf{q}, \tag{4.1}$$

то говорят, что он является *собственным вектором* матрицы **A**. Скаляр λ, соответствующий этому собственному вектору, называется *собственным значением.* Полином $f(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ порядка n называется *характеристическим полиномом* (многочленом) матрицы, n корней которого порождают n собственных значений λ:

$$f(l)=\prod_{i=1}^{n}(l_i-l)=\sum_{k=1}^{n}g_k l^k=0. \tag{4.2}$$

Собственные значения и соответствующие собственные векторы образуют *собственную систему* матрицы **A**. Множество собственных значений в математике принято называть *спектром* матрицы. Всегда существуют по крайней мере один собственный вектор, соответствующий каждому отдельному собственному значению, и собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимые друг от друга. *Главными собственными векторами* называются собственные векторы, соответствующие наибольшему по величине собственному значению матрицы. Матрица k**A, где** k - скаляр, имеет собственные значения $k\lambda_i$. Матрица $\mathbf{A}^p$, где p- положительное целое число, имеет собственные значения λ_i^p. Если матрица **A** невырожденная, то обратная ей матрица $\mathbf{A}^{-1}$ имеет собственные значения $1/\lambda_i$. Матрица **A**+k**I** , где **I** - единичная диагональная матрица, имеет собственные значения λ_i+k.

Предположим, что (n x n) - матрица $\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_1, \ldots \mathbf{q}_n]$ составлена из n столбцов собственных векторов с $\mathbf{q}_1$ по $\mathbf{q}_n$ квадратной (n x n) - матрицы **A**, а диагональная (n x n) - матрица $L=\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ составлена из n различных собственных значений матрицы **A**. В этом случае матрица **A** будет иметь набор линейно независимых собственных векторов тогда и только тогда, когда ее можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1}, \quad \Lambda=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}, \tag{4.3}$$

где **Q** и Λ - невырожденные матрицы.

Если невырожденная матрица **A** обладает также эрмитовой симметрией , т.е. $\mathbf{A}=\mathbf{A}^H$, где $\mathbf{A}^H$ - эрмитово транспонированная (или эрмитово сопряженная) матрица, получаемая в результате комплексного сопряжения всех элементов матрицы **A** и последующей их транспозиции, то справедливо соотношение

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{A}^H=\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^H, \tag{4.4}$$

где полагается , что $\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^H$ и $L=L^{\boldsymbol{H}}$. Это означает, что эрмитова матрица имеет действительные собственные значения и если все собственные значения различны, то собственные векторы образуют ортонормальный базис, поскольку $\mathbf{QQ}^{\boldsymbol{H}} = S\mathbf{q}_i\mathbf{q}_i^H = \mathbf{I}$, т.е. **Q** - унитарная матрица. Для эрмитовой матрицы справедливо также соотношение

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} l_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^H , \tag{4.5}$$

которое в математике называется спектральным представлением (разложением) матрицы **A**. В предположении, что все собственные значения не равны нулю, справедливо также соотношение для обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{l_i} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^H . \tag{4.6}$$

4.1.2. Разложение матриц по сингулярным числам

Для любой комплексной (m×n)-матрицы **A** ранга k справедлива теорема разложения по сингулярным (или особым) числам (РСЧ), которая утверждает, что существуют положительные действительные числа $s_1 \geq s_2 \geq \mathbf{K} \geq s_k > 0$ (так называемые сингулярные числа матрицы **A**) , унитарная (m×m)-матрица $\mathbf{U}=[\mathbf{u}_1, \mathbf{K}, \mathbf{u}_m]$ и унитарная (n×n)-матрица $\mathbf{V}=[\mathbf{v}_1, \mathbf{K}, \mathbf{v}_n]$, такие что матрица **A** может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H = \sum_{i=1}^{k} s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H , \tag{4.7}$$

где (m×n)-матрица S имеет следующую структуру

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

а $\mathbf{D}=\mathrm{diag}(s_1, \mathbf{K}, s_k)$–диагональная (k×k)-матрица, $\mathbf{V}^H$-эрмитово транспонированная (или эрмитово сопряженная) матрица. Следует отметить, что если **A** - матрица данных, то произведение вида $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ представляет собой матрицу подобную автокорреляционной. Заметим, что если $\mathbf{A}^H=\mathbf{V}S^H\mathbf{U}^H$,$\mathbf{U}^H\mathbf{U}=\mathbf{I}$, $\mathbf{V}^H\mathbf{V}=\mathbf{I}$, то

$$\mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{V}(\Sigma^H\Sigma)\mathbf{V}^H = \sum_{i=1}^{k} s_i^2 \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H , \tag{4.9}$$

$$\mathbf{AA}^H = \mathbf{U}(\Sigma\Sigma^{\mathrm{H}})\mathbf{U}^H = \sum_{i=1}^{k} s_i^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \tag{4.10}$$

$$\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{v_i} = s_i^2 \mathbf{v_i}, \quad \mathbf{AA}^H\mathbf{u_i} = s_i^2 \mathbf{u_i} \ , \tag{4.11}$$

где 1≤ i ≤ k. Поэтому столбцы матрицы **U** являются ортонормальными собственными векторами матрицы $\mathbf{AA}^H$, а столбцы **V** - ортонормальными собственными векторами матрицы $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$**,** кроме того, обе матрицы имеют одинаковые собственные значения σ_i^2 , 1≤ i ≤ k. Следовательно, сингулярные числа - это просто положительные значения квадратных корней из ненулевых собственных значений матриц $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ и $\mathbf{AA}^H$.

Нередко в приложениях спектрального анализа требуется найти матрицу, обратную данной. Если исходная матрица не квадратная или ее ранг меньше ее размерности, то обратная матрица не существует и приходится вводить псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза $\mathbf{A}^{\#}$, соответствующую (m×n)-матрице **A** ранга k. Ее выражение через собственные числа и собственные векторы записывается в виде

$$\mathbf{A}^{\#} = \mathbf{V}\Sigma^{\#}\mathbf{U}^H = \sum_{i=1}^{k} s_i^{-1} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^H \ , \tag{4.12}$$

где

$$\Sigma^{\#} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Псевдообратная матрица Мура-Пенроуза позволяет получить решение системы линейных уравнений **Ax=b** по методу наименьших квадратов $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{\#}\mathbf{b}$ с минимальной нормой. Если m=n и ранг матрицы **A** равен n (т.е. она невырожденная), то псевдообратная матрица превращается в обычную квадратную матрицу, обратную **A**, т.е. $\mathbf{A}^{\#} = \mathbf{A}^{-1}$. Если m>n и ранг матрицы **A** равен n, то $\mathbf{A}^{\#} = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$, если n>m и ранг матрицы **A** равен m, то $\mathbf{A}^{\#} = \mathbf{A}^H(\mathbf{AA}^H)^{-1}$. Вычисление обратной матрицы с использованием формулы (4.12) помогает определить ранг матрицы **A** по количеству значимых сингулярных чисел и требует примерно вдвое меньшей точности по сравнению с прямыми методами вычисления.

В [1] приведена написанная на Фортране программа CSVD, предназначенная для расчета разложения по сингулярным числам комплексной прямоугольной матрицы.

4.2. Анализ собственных значений автокорреляционной матрицы для случая смеси синусоид и белого шума

Пусть наблюдаемые данные образованы суммой M действительных синусоид

$$x[n] = \sum_{i=1}^{M} A_i \sin(2pf_i n + q_i) \ ,$$

каждая из которых имеет фазу, равномерно распределенную на интервале от 0 до 2π и не зависящую от фаз других синусоид. Тогда среднее значение этих M синусоид будет равно нулю, а атокорреляционная последовательность будет описываться выражением

$$r_{xx}[m] = \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i^2}{2} \cos(2pf_i m).$$

Если процесс состоит из M комплексных синусоид

$$x[n] = \sum_{i=1}^{M} A_i \exp[j(2pf_i n + q_i)],$$

то его автокорреляционная последовательность будет иметь форму

$$r_{xx}[m] = \sum_{i=1}^{M} A_i^2 \exp[j2pf_i m].$$

Автокорреляционная функция суммы M комплексных синусоид и независимого белого шума записывается в виде

$$r[k] = \sum_{i=1}^{M} P_i \exp\left(j2pf_i k\right) + r_w d[k], \tag{4.13}$$

где $P_i = A_i^2$- мощность i-ой комплексной синусоиды, f_i-её цифровая частота, r_w-дисперсия белого шума и $d[k]$- единичный импульс. Зная автокорреляционную функцию, можно составить тёплицеву автокорреляционную (p+1)×(p+1)матрицу

$$\mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} r[0] & \mathbf{K} & r^*[p] \\ \vdots & \mathbf{O} & \vdots \\ r[p] & \mathbf{K} & r[0] \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

которая в случае используемой модели имеет следующую структуру:

$$\mathbf{R}_p = \sum_{i=1}^{M} P_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H + r_w \mathbf{I}, \tag{4.15}$$

где **I**-единичная (p+1)×(p+1)матрица, а вектор сигнала $\mathbf{s}_i$, несущий информацию о частоте i-ой синусоиды, имеет вид:

$$\mathbf{s}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(j2pf_i) \\ \vdots \\ \exp(j2pf_i p) \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Структура выражения (4.15) позволяет разделить информацию заключенную в автокорреляционной матрице на две части: информацию, соответствующую полезному сигналу, и информацию, соответствующую шуму, если записать матрицу $\mathbf{R}_p$ в виде суммы автокорреляционной матрицы сигнала $\mathbf{S}_p$ и автокорреляционной матрицы шума $\mathbf{W}_p$:

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{S}_p + \mathbf{W}_p \quad , \tag{4.17}$$

где

$$\mathbf{S}_p = \sum_{i=1}^{M} P_i \mathbf{s}_i \mathbf{s}_i^H \quad , \tag{4.18}$$

$$\mathbf{W}_p = r_w \mathbf{I} \quad . \tag{4.19}$$

Так как отсчеты белого шума некоррелированы, то автокорреляционная матрица шума имеет вид единичной матрицы, умноженной на дисперсию белого шума r_w . Если порядок автокорреляционной матрицы $\mathbf{R}_p$ больше числа комплексных синусоид (т.е. p>M), то матрица сигнала $\mathbf{S}_p$ будет иметь ранг M (так как каждое внешнее произведение векторов есть матрица ранга 1), а матрица шума будет иметь ранг p+1, равный ее размерности. Разложение матрицы сигнала по собственным значениям и собственным векторам запишется с учетом формулы (4.5) в виде:

$$\mathbf{S}_p = \sum_{i=1}^{M} l_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \tag{4.20}$$

Суммирование в (4.20) производится от 1 до M, так как l_i=0 при $i = \overline{M+1, p+1}$. На собственные векторы $\mathbf{v}_1$, ..., $\mathbf{v}_M$, называемые *главными собственными векторами*, натянута та же область *подпространства сигнала*, что и на векторы сигнала $\mathbf{s}_1$, ..., $\mathbf{s}_M$. Это означает,

что любой главный собственный вектор должен быть представим в виде некоторой линейной комбинации векторов сигнала

$$\mathbf{v_i} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{M} b_{ik}\mathbf{s_k} ,$$

где 1≤ i ≤M.

Представление единичной матрицы через собственные векторы автокорреляционной матрицы с учетом их ортонормальности можно записать в виде следующего соотношения:

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{p+1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad . \tag{4.21}$$

Подставляя (4.20) и (4.21) в выражение (4.17), получаем разложение автокорреляционной матрицы по собственным значениям:

$$\mathbf{R}_p = \sum_{i=1}^{M} l_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + r_w \sum_{i=1}^{p+1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \sum_{i=1}^{M} \left(l_i + r_w \right) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sum_{i=M+1}^{p+1} r_w \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \tag{4.22}$$

Из разложения (4.22) видно, что подпространство сигнала натянуто на векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{K}, \mathbf{v}_M$, а подпространство шума - на векторы $\mathbf{v}_{M+1}, \mathbf{K}, \mathbf{v}_{p+1}$, причем собственные значения, соответствующие шумовым векторам, одинаковы и равны дисперсии белого шума r_w, а собственные значения, соответствующие главным собственным векторам, составлены как из мощности сигнала, так и из мощности шума.

Разложение (4.22) автокорреляционной матрицы можно двумя способами использовать для получения спектральных оценок или, точнее говоря, улучшенных оценок частоты. Во-первых, сохранение одной лишь информации, соответствующей собственным векторам подпространства сигнала, т.е., иначе говоря, *формирование для матриц* $\boldsymbol{R}_p$ *аппроксимации пониженного ранга, эффективно способствует увеличению отношения сигнал / шум, поскольку устраняет вклад мощности компонент подпространства шума*. Этот факт лежит в основе процедур *оценок частоты в подпространстве сигнала*. С другой стороны, поскольку собственные векторы ортогональны и на главные собственные векторы натянуто то же подпространство, что и на векторы сигнала, следовательно, *векторы сигнала ортогональны всем векторам в подпространстве шума, включая любую их линейную комбинацию*. Это свойство положено в основу *процедур оценок частоты в подпространстве шума*.

Эффективность разделения пространства на шумовое и сигнальное зависит от того, насколько собственные значения собственных векторов подпространства сигнала больше

собственных значений векторов подпространства шума. Из этого факта следует критерий применимости: $l_i > r_w$. При l_i сравнимом с r_w результаты оценок могут оказаться неудовлетворительными, так как на практике мы имеем обычно одну реализацию и усреднение по ансамблю не проводится, что приводит к флюктуациям соответствующих величин и неточному разделению векторов сигнала и шума. Для случая одной синусоиды результаты разложения таковы, что $l_1 = pP$ и $\mathbf{v}_1 = \mathbf{s}_1 / \sqrt{p}$, где P-мощность комплексной синусоиды, *p*-размерность автокорреляционной матрицы. При этом критерий применимости будет иметь вид:

$$pP > r_w \ , \tag{4.23}$$

или в виде условия на отношение сигнал/шум:

$$\frac{P_{\text{сигнал}}}{P_{\text{шум}}} = \frac{P}{r_w} > \frac{1}{p} \ . \tag{4.24}$$

Формула (4.24) показывает, что методы, основанные на процедуре разложения на собственные векторы, должны работать и при низких отношениях сигнал/шум, включая случай шума, превышающего по мощности сигнал.

В [1] показано, что идеи, изложенные в этом разделе, можно обобщить на так называемые ковариационные и модифицированные ковариационные матрицы данных, используемые в авторегрессионных методах спектрального оценивания на основе линейного предсказания и методе Прони. В частности, показано, что свойства разложения матриц данных на собственные значения аналогичны свойствам подобного разложения для автокорреляционной матрицы. На главные собственные векторы матрицы данных в основном натянуто подпространство сигнала, а сингулярные числа, соответствующие этим главным собственным векторам, чаще всего имеют значения, превосходящие значения сингулярных чисел, соответствующих подпространству шума. Следовательно, сингулярные числа, определяемые в результате применения к матрице данных процедуры РСЧ, будут составлять основу, необходимую для разделения собственных векторов на векторы, наиболее вероятно принадлежащие подпространству сигнала и подпространству шума.

4.3. Методы оценивания частоты в подпространстве шума

Как отмечалось выше, процедуры оценки частоты в подпространстве шума базируются на том, что любой сигнальный вектор автокорреляционной матрицы или матрицы данных ортогонален любому вектору в подпространстве шума. Так как подпространство шума

натянуто на векторы $\mathbf{v}_{M+1}, \mathbf{K}, \mathbf{v}_{p+1}$, то любой сигнальный вектор оказывается ортогонален любой линейной комбинации собственных векторов подпространства шума т.е.:

$$\mathbf{s}_i^H \left(\sum_{k=M+1}^{p+1} a_k \mathbf{v}_k \right) = 0, \tag{4.25}$$

где $1 \le i \le M$, а a_k-произвольные константы. В случае вещественных данных ранг матриц равен удвоенному числу синусоидальных составляющих, так как спектальная плотность мощности имеет симметричную относительно нуля форму и для каждой спектральной составляющей на положительной полуоси частот существует комплексно сопряженная составляющая на отрицательной полуоси частот. Используя свойство ортогональности, можно записать следующую вещественную функцию:

$$F(f) = \sum_{k=M+1}^{p+1} a_k \left| \mathbf{e}^H(f) \mathbf{v}_k \right|^2 = \mathbf{e}^H(f) \left(\sum_{k=M+1}^{p+1} a_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right) \mathbf{e}(f), \tag{4.26}$$

где

$$\mathbf{e}(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ \exp(j2pf) \\ \vdots \\ \exp(j2pfp) \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

Функция *F(f)* обращается в 0, если $\mathbf{e}(f_i) = \mathbf{s}_i$, поэтому, если составить новую функцию частоты 1/*F(f)*, то при изменении относительной частоты f от 0 до 1.0 она будет обращаться в бесконечность на частотах синусоидальных компонент, присутствующих в сигнале. В реальных условиях из-за неточности оценок, на частотах синусоид будут пики конечной величины.

На практике применяются два вида частотных оценок, которые отличаются выбором констант a_k. Это метод классификации множественных сигналов (multiple signal classification, MUSIC), где все a_k положены равными единице и метод собственных векторов (eigenvector, EV), где $a_k = 1/l_k$. Процедуры вычисления этих спектральных псевдооценок, полезных при оценивании частот синусоидальных или узкополосных компонент, можно записать в виде следующих формул:

$$P_{MUSIC}(f) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(f)\left(\sum_{k=M+1}^{p+1} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H\right)\mathbf{e}(f)}, \tag{4.28}$$

$$P_{EV}(f) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(f)\left(\sum_{k=M+1}^{p+1} \frac{1}{l_k} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H\right)\mathbf{e}(f)}. \tag{4.29}$$

На рис.4.1 и рис.4.2 в качестве примера приведены графические представления спектральных оценок (4.28) и (4.29) соответственно, полученные для суммы комплексной синусоиды с относительной частотой 0.2 (отнесенной к частоте дискретизации) и шума при использовании процедуры РСЧ ковариационной матрицы данных для числа отсчетов данных n = 98, размерности матрицы данных p = 49 и предполагаемого числа векторов подпространства сигнала nsig = 1.

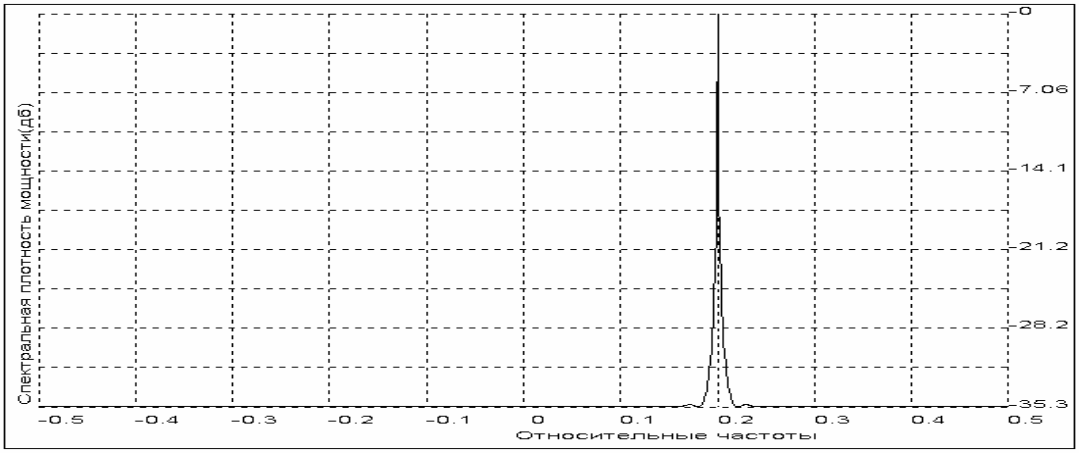


Рис.4.1. Частотная оценка суммы синусоиды и шума (отношение сигнал / шум 50 дБ), метод MUSIC: n=98, p=49, nsig=1

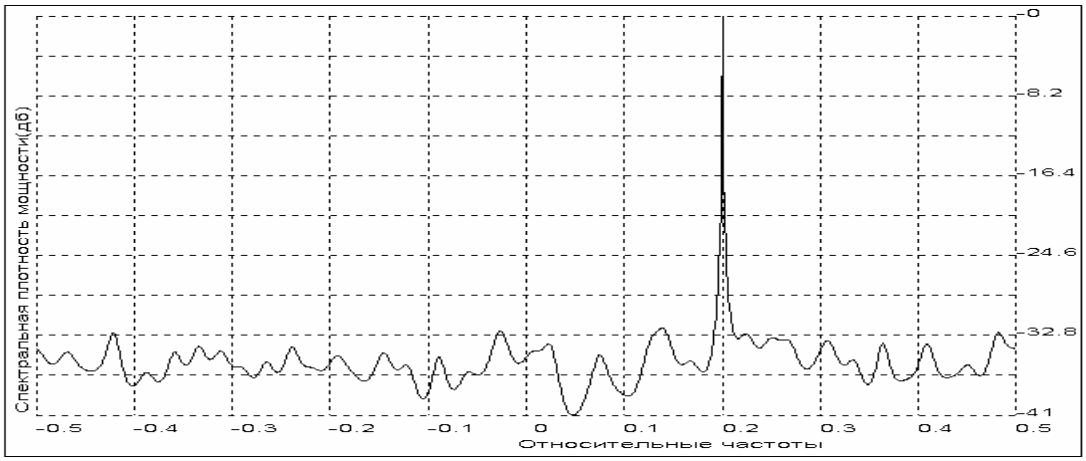


Рис.4.2. Частотная оценка суммы синусоиды и шума (отношение сигнал / шум 50 дБ), метод EV: n=98, p=49, nsig=1

4.4. Процедуры оценивания частоты в подпространстве сигнала

В методах оценки частоты путем сохранения собственных векторов подпространства сигнала используется сигнальная часть разложения автокорреляционной матрицы либо матрицы данных по собственным значениям (сингулярным числам), а шумовая составляющая устраняется, что эффективно способствует увеличению отношения сигнал/шум. Используя любую из оценок спектральной плотности мощности (СПМ), описанных в [1], можно построить класс процедур оценки частоты в подпространстве сигнала путем замены автокорреляционной матрицы или матрицы данных их аппроксимациями пониженного ранга, записываемыми через главные собственные векторы.

Так, на основе соотношений (4.5) и (4.6) можно записать выражения для автокорреляционной и обратной автокорреляционной матриц пониженного ранга:

$$\hat{\mathbf{R}}_p = \sum_{k=1}^{M} l_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H , \tag{4.30}$$

$$\hat{\mathbf{R}}_p^{-1} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{l_k} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H , \tag{4.31}$$

которые можно использовать для модификации соответствующих спектральных оценок, работающих с матрицами $\mathbf{R}_p$, $\mathbf{R}_p^{-1}$. Так классический коррелограммный метод вычисляет спектральную оценку на основе соотношения:

$$P_{корр}(f) = \mathbf{e}^H(f)\mathbf{R}_p\mathbf{e}(f) \quad . \tag{4.32}$$

Подставляя (4.30) в (4.32), получаем улучшенную коррелограммную оценку СПМ:

$$\hat{P}_{корр}(f) = \mathbf{e}^H(f)\left(\sum_{k=1}^{M} l_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H\right)\mathbf{e}(f). \qquad (4.33)$$

Метод минимума дисперсии (МД) дает частотную оценку, получаемую посредством минимизации дисперсии процесса на выходе узкополосного фильтра, частотная характеристика которого адаптируется к спектральным компонентам входного процесса на каждой представляющей интерес частоте. Реализация этого метода осуществляется на основе соотношения:

$$P_{МД}(f) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(f)\mathbf{R}_p^{-1}\mathbf{e}(f)}. \qquad (4.34)$$

Подставляя (4.31) в (4.34), получаем выражение для улучшенного метода минимума дисперсии:

$$\hat{P}_{МД}(f) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(f)\left(\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{l_k} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H\right)\mathbf{e}(f)}. \qquad (4.35)$$

В авторегрессионном методе оценки СПМ Юла-Уолкера автокорреляционная матрица используется для нахождения АР-параметров $\mathbf{a}_p$, r_p:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_p \end{pmatrix} = \mathbf{R}_p^{-1}\begin{pmatrix} r_p \\ \mathbf{0}_p \end{pmatrix}, \qquad (4.36)$$

поэтому подстановка (4.31) в (4.36) позволит использовать аппроксимацию пониженного ранга для $\mathbf{R}_p^{-1}$ и получить АР-оценки СПМ с пониженным содержанием шума.

На рис.4.3 и рис.4.4 в качестве примера приведены коррелограммные оценки СПМ для суммы комплексной синусоиды с частотой 0.2 и шума при отношении сигнал / шум -10дб, вычисленные по соотношениям (4.32) и (4.33) соответственно.

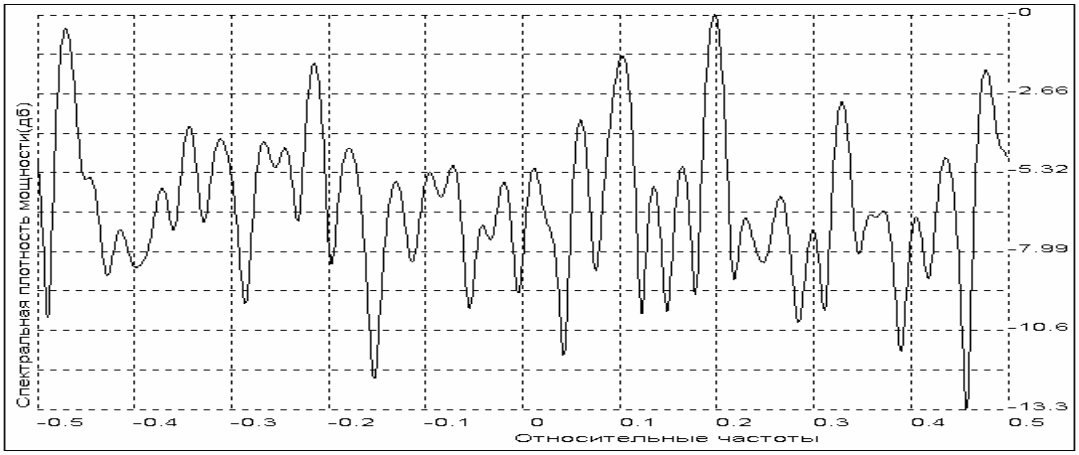


Рис.4.3. Коррелограмная оценка СПМ суммы синусоиды и шума (отношение сигнал / шум -10 дБ), параметры: n=98, p=49, nsig=49

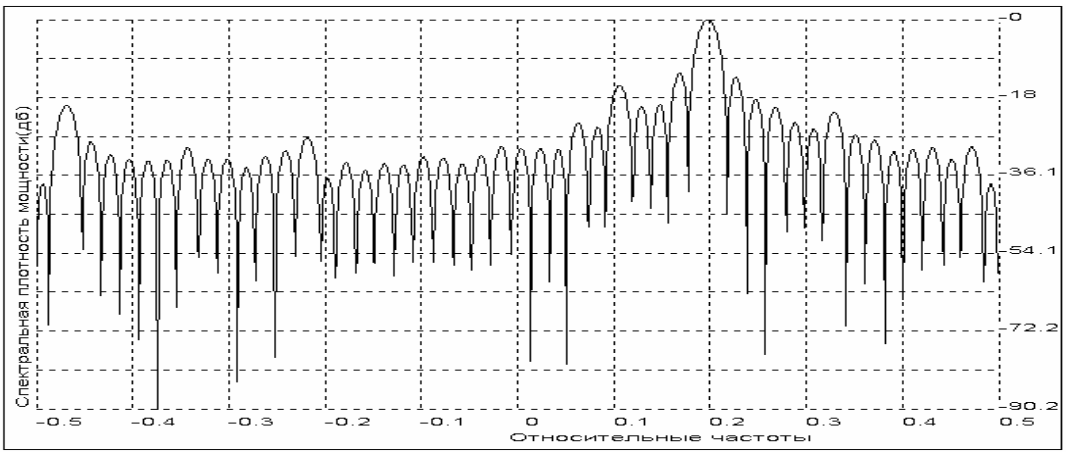


Рис.4.4. Коррелограмная оценка СПМ суммы синусоиды и шума (отношение сигнал / шум -10 дБ), параметры: n=98, p=49, nsig=1

При разложении матриц данных по собственным векторам есть возможность очищать непосредственно данные и использовать их в стандартных алгоритмах спектрального оценивания. На рис.4.5 и рис.4.6 показаны соответственно реализации суммы синусоиды с шумом (98 отсчетов) при отношении сигнал/шум 0дБ до очистки и после нее.

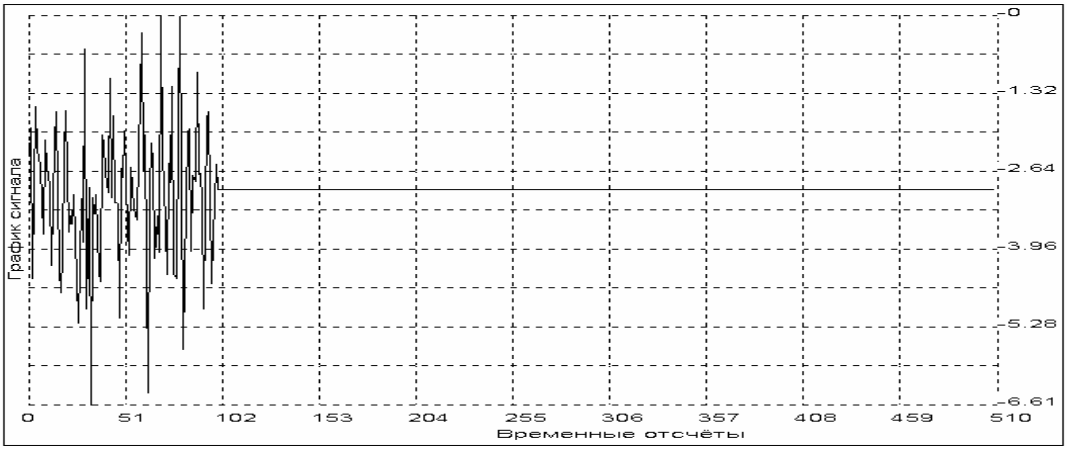


Рис.4.5. График реализации суммы синусоиды и шума (отношение сигнал/шум 0дБ)

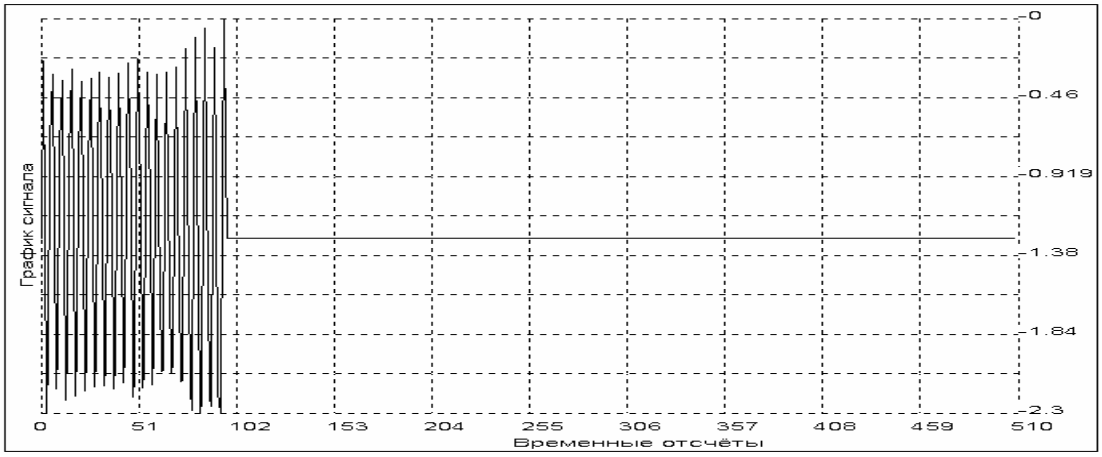


Рис.4.6. График реализации после очистки от шума суммы синусоиды и шума (отношение сигнал/шум 0дБ) параметры: n=98, p=49, nsig=1

Из анализа рисунков следует, что даже во временной области после очистки от шума четко прослеживается наличие синусоиды, хотя это трудно было сказать по исходному сигналу.

Еще один вариант использования процедуры РСЧ для матрицы данных и последующей аппроксимации ее матрицей пониженного ранга предложен в модификации метода линейного предсказания вперед и назад [7]. Запишем систему уравнений линейного предсказания вперед и назад в матричной форме:

$$\mathbf{X}_p \mathbf{a}_p = -\mathbf{x} \quad , \tag{4.37}$$

где $\mathbf{X}_p$ -модифицированная ковариационная матрица данных, имеющая вид:

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} x[p] & x[p-1] & \mathbf{K} & x[1] \\ x[p+1] & x[p] & \mathbf{K} & x[2] \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ x[n-1] & x[n-2] & \mathbf{K} & x[n-p] \\ x^*[2] & x^*[3] & \mathbf{K} & x^*[p+1] \\ x^*[3] & x^*[4] & \mathbf{K} & x^*[p+2] \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ x^*[n-p+1] & x^*[n-p+2] & \mathbf{K} & x^*[n] \end{pmatrix}, \tag{4.38}$$

$\mathbf{a}_p$ -вектор параметров линейного предсказателя порядка *p*, *n* - число отсчетов данных, а **x** - вектор предсказанных данных, имеющий вид:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x[p+1] \\ x[p+2] \\ \mathbf{M} \\ x[n] \\ x^*[1] \\ x^*[2] \\ \mathbf{M} \\ x^*[n-p] \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

Решение (4.37) по методу наименьших квадратов с минимальной нормой относительно вектора $\mathbf{a}_p$ имеет вид

$$\mathbf{a}_p = -\mathbf{X}_p^{\#}\mathbf{x}, \tag{4.40}$$

где псевдообратная матрица данных пониженного ранга определяется соотношением (4.12) в форме

$$\mathbf{X}_\mathbf{p}^{\#} = \sum_{i=1}^{M} s_i^{-1}\mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^{\mathbf{H}} \tag{4.41}$$

Значение порядка *p* должно лежать в интервале *M*£ *p* £ *n* - *M*, где *M* - предполагаемое число комплексных экспонент. Спектральная оценка определяется соотношением:

$$\$(f) = \frac{1}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} a_k \exp(-j2pfk)\right|^2}.$$

На рис.4.7 приведена спектральная оценка модифицированным методом линейного предсказания суммы двух комплексных синусоид с частотами 0.15 и 0.16 и шума (отношение сигнал / шум 0дб)

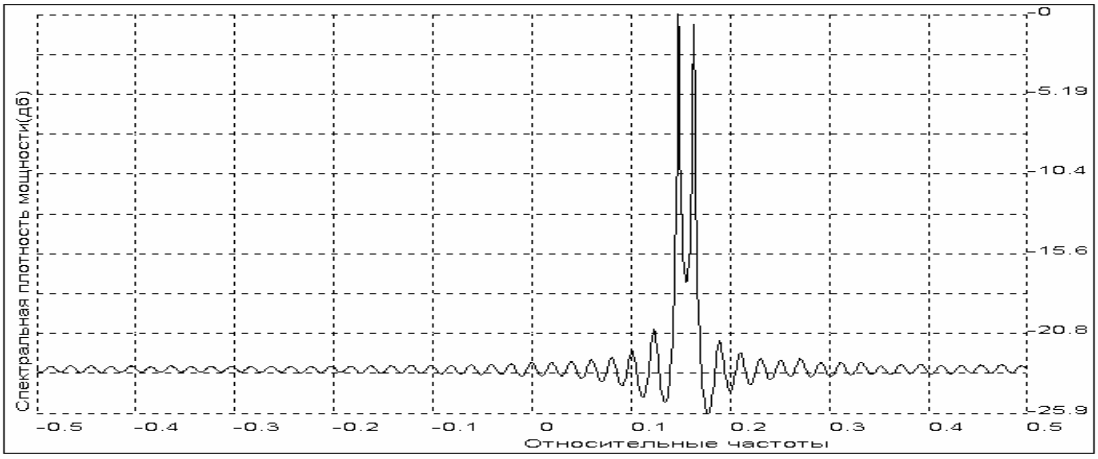


Рис.4.7. Спектральная оценка модифицированным методом линейного предсказания суммы двух синусоид с частотами 0.15, 0.16 и шума (отношение сигнал/шум 0дБ) параметры: n=98, p=49, nsig=2

Таким образом, применение процедур разложения различных матриц по собственным векторам позволяет эффективно использовать классические методы и алгоритмы высокого спектрального разрешения и в случаях малого отношения сигнал/шум.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в учебно-методических материалах методы оценивания СПМ случайных процессов, включающие классические методы и современные, построенные на различных моделях процессов, позволяют уяснить их достоинства и недостатки, в частности, сравнить определяющую характеристику анализаторов – частотно-временное разрешение. Оказывается, что параметры модели случайного процесса могут быть достаточно надежно измерены по отрезкам реализации малой длины, что позволяет оценить СПМ модели точнее и с более высоким частотным разрешением, чем это можно сделать на основе классических алгоритмов. Это открывает новые возможности и для оценивания СПМ нестационарных процессов, что существенно расширяет область применения параметрических алгоритмов. Рассмотренные алгоритмы высокого разрешения уже широко вошли в инженерную практику цифровой обработки, распространяются на статистики третьего и более высоких порядков и стимулируют поиски новых алгоритмов с лучшими характеристиками быстродействия и разрешения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир,1978.
3. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Связь,1979.
4. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006.
5. Бендат Д., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир,1989.
6. Дженкинс Г.М., Ваттс Д.Г. Спектральный анализ и его приложения. Вып.1,2. М.: Мир, 1971, 1972.
7. Кей С.М., Марпл-мл. С.Л. Современные методы спектрального анализа. Обзор. ТИИЭР. Т. 69, N11, 1981.
8. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов. СПб.: Питер, 2002.
9. Шахтарин Б.И., Ковригин В.А. Методы спектрального оценивания случайных процессов: Учебное пособие. –М.: Гелиос АРВ, 2005.
10. Шахтарин Б.И. Случайные процессы в радиотехнике. 3-е изд., перераб. Т.1. Линейные преобразования. –М.: Гелиос АРВ, 2006.
11. Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов. Под ред. Гуна С. и др. М., 1989.
12. Бокс Дж. ,Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974.
13. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982.
14. Хэррис Ф. Использование окон при гармоническом анализе методом ДПФ. ТИИЭР. Т.66, N1, 1978.
15. Тафтс Д. У., Кумаресан Р. Оценивание частот суммы нескольких синусоид: Модификация метода линейного предсказания, сравнимая по эффективности с методом максимального правдоподобия, ТИИЭР. Т.70, №9, 1982, с.77-94.
16. Кривошеев В.И. Цифровой спектральный анализ: Периодограммный и коррелограммный методы. Методические указания к лабораторной работе. ННГУ,

2005.

17. Кривошеев В.И. Цифровой спектральный анализ: Авторегрессионное оценивание спектров. Методические указания к лабораторной работе. ННГУ,1993.

18. Кривошеев В.И. Цифровой спектральный анализ: спектральное оценивание на основе моделей авторегрессии-скользящего среднего. Методические указания к лабораторной работе. ННГУ, 1996.

19. Кривошеев В.И. Цифровой спектральный анализ: метод Прони. Методические указания к лабораторной работе. ННГУ, 1996.

20. Кривошеев В.И. Цифровой спектральный анализ: методы оценивания частоты на основе анализа собственных значений. Методические указания к лабораторной работе. ННГУ, 1999.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……..……...……...3
ГЛАВА 1. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЦИФРОВОГОСПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА…5
1.1. Спектральные представления детерминированных сигналов……....5
1.2. Разрешение и произведение длительности на ширину спектра……9
1.3. Спектральные представления случайных процессов……....14
1.4. Коррелограммный метод оценки СПМ…….…16
1.5. Периодограммный метод оценки СПМ…….…20
1.6. Использование окон при спектральных измерениях…….…25
1.6. Разрешение и произведение «устойчивость×длительность×ширина полосы»..29
1.7. Классические спектральные оценки тест-последовательности……...32
ГЛАВА 2. СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ И АВТОРЕГРЕССИИ-СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО……...36
2.1. Параметрические модели случайных процессов……...36
2.2. Авторегрессионный процесс и свойства его спектра……41
2.2.1. Связь с анализом, основанным на линейном предсказании……..45
2.2.2Алгоритм Левинсона……47
2.3. Методы авторегрессионного спектрального оценивания……48
2.3.1. Метод Юла-Уолкера……..49
2.3.2. Метод Берга……50
2.3.3. Ковариационный метод……54
2.3.4. Модифицированный ковариационный метод……58
2.3.5. Выбор порядка модели……..……59
2.3.6. Характеристики оценок…….…61
2.4. Экспериментальное исследование алгоритмов спектрального оценивания на основе АР- моделей……62
2.4.1. Измерение характеристик разрешения алгоритмов…….…...62
2.4.2. Исследование АР-спектральных оценок моделей стационарных процессов……..67
2.5. Спектральное оценивание на основе моделей авторегрессии - скользящего среднего…….…72
2.5.1. Раздельное оценивание АР- и СС-параметров……72

2.5.2. Примеры спектрального оценивания на основе АРСС-моделей……...79

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫБОРОЧНЫХ ДАННЫХ СУММОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (МЕТОД ПРОНИ)…….82

3.1. Метод наименьших квадратов Прони……84

3.2. Модифицированный метод наименьших квадратов Прони…….88

3.3. Спектральная интерпретация метода Прони……..90

3.4. Примеры спектральных оценок на основе метода Прони……92

ГЛАВА 4. МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЧАСТОТЫ, ОСНОВАННЫЕ НА АНАЛИЗЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ……...97

4.1. Некоторые сведения из матричной алгебры…….……97

4.1.1. Собственная система матрицы…….97

4.1.2. Разложение матриц по сингулярным числам……....99

4.2. Анализ собственных значений автокорреляционной матрицы для случая смеси синусоид и белого шума……..…….101

4.3. Методы оценивания частоты в подпространстве шума……..104

4.4. Процедуры оценивания частоты в подпространстве сигнала……107

ЗАКЛЮЧЕНИЕ……..113

ЛИТЕРАТУРА……...114