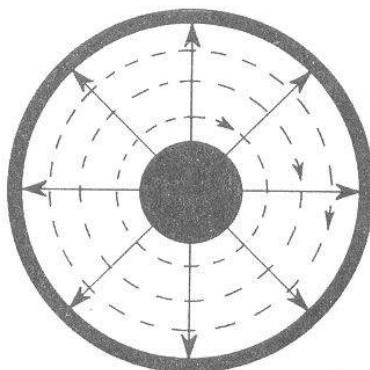


С.М.РЫЖАКОВ

**Анализ  
распределенных  
электрических  
цепей  
в частотной  
области**



УДК 621.372  
ББК 31.211р  
Р93

**Рыжаков С.М. АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ. Учебное пособие.** Нижний Новгород:  
Изд-во Нижегородского университета, 1998, 96 с.

Рецензенты:

**Раевский С.Б.**, засл. деятель науки и техники РФ, д.т.н., профессор;  
**Крылов В.В.**, д.т.н., профессор.

На базе телеграфных уравнений рассматриваются свойства линейных распределенных электрических цепей с Т-волнами в частотной области. Даны примеры использования отрезков линий передачи в радиотехнике СВЧ (согласующие устройства и резонаторы). Приведены задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов специальности 0715 (Радиофизика и электроника). Ил. 54. Табл. 1. Библиогр. 5 назв.

P 230220200000 - 499  
M187(03) - 98

ББК 31.211р

ISBN 5-85746-414-5

©Рыжаков С.М., 1998

## **ВВЕДЕНИЕ**

Курс теории электрических цепей обычно начинают с изучения цепей с сосредоточенными параметрами. При анализе процессов в таких системах не учитывают время распространения сигнала по цепи, характеризуя все ее элементы электрическими параметрами, а геометрические размеры системы не принимают во внимание.

На практике все электрические цепи являются системами с распределенными параметрами. Но во многих случаях геометрические размеры электрической цепи много меньше рабочей длины волны, поэтому можно заменить реальную систему с распределенными параметрами упрощенной моделью с сосредоточенными параметрами.

В учебном пособии рассматриваются электрические цепи, основные свойства которых вытекают именно из того, что характеризующие систему параметры распределены. В радиотехнике системами с распределенными параметрами являются двухпроводные, коаксиальные, полосковые линии, антенны, фидеры, волноводы, резонаторы и др.

В теории цепей рассматривают электрические распределенные цепи только с Т-волной. В этом случае структура распространяющейся в системе электромагнитной волны такова, что векторы электрического и магнитного поля лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. К распределенным системам с Т-волной можно применить многие теоретические выводы, полученные для систем с сосредоточенными параметрами; именно по этой причине распределенные системы с Т-волной рассматриваются в теории электрических цепей.

## РАЗДЕЛ 1

# СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ ЛИНИЙ С Т-ВОЛНОЙ

## 1.1 Телеграфные уравнения

Рассмотрим линию в виде двух параллельных проводов (рис. 1). Линия характеризуется четырьмя распределенными по длине параметрами: активным сопротивлением  $R$ , индуктивностью  $L$ , емкостью  $C$  и активной проводимостью  $G$  между проводами. Если параметры распределены по длине линии равномерно, т. е. линия регулярна, то вводят погонные параметры, отнесенные к единице длины:  $R_0$  [Ом/см, Ом/м, ...];  $L_0$  [мкГн/см, мкГн/м, ...];  $C_0$  [пФ/см, пФ/м, ...] и т. д.

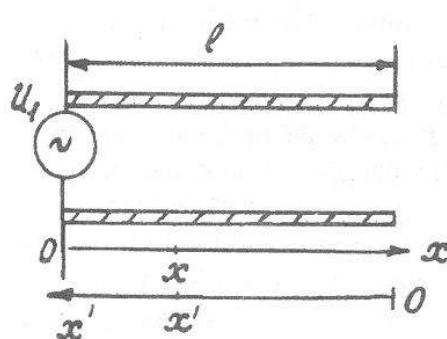


Рис. 1

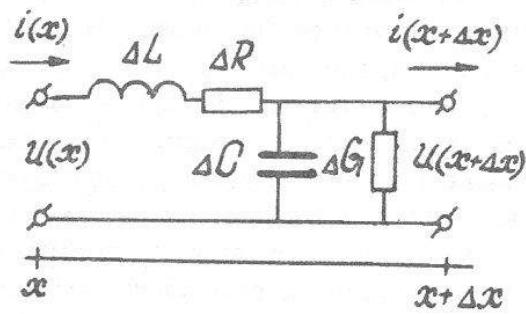


Рис. 2

Назовем "началом" линии левый конец (рис. 1). Расстояние до произвольной точки линии от начала обозначим через  $x$ , а от конца — через  $x'$ . Таким образом, вся длина линии  $l = x + x'$ . Выделим бесконечно малый отрезок линии длиной  $\Delta x$ , находящийся на расстоянии  $x$  от начала (рис. 2). Поскольку  $\Delta x$  отсчитываем от начала, то  $\Delta x > 0$ . Индуктивность, емкость, сопротивление и проводимость отрезка длиной  $\Delta x$  равны:

$$\begin{aligned}\Delta L &= L_0 \Delta x, & \Delta C &= C_0 \Delta x, \\ \Delta R &= R_0 \Delta x, & \Delta G &= G_0 \Delta x,\end{aligned}\quad (1)$$

Исходя из законов Ома и Кирхгофа, запишем уравнения для участка цепи в виде:

$$\begin{aligned}i(x, t) &= i(x + \Delta x, t) + \Delta C \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t} + \Delta G u(x + \Delta x, t), \\ u(x, t) &= \Delta L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + \Delta R i(x, t) + u(x + \Delta x, t).\end{aligned}$$

Здесь частная производная введена для того, чтобы подчеркнуть зависимость тока и напряжения только от времени, а не от координаты  $x$ . С учетом соотношений (1) запишем уравнения в виде:

$$\begin{aligned}-\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} &= C_0 \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t} + G_0 u(x + \Delta x, t), \\ -\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} &= L_0 \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + R_0 i(x, t).\end{aligned}$$

Рассмотрим предельный случай, когда  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тогда два последних уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} &= C_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + G_0 u(x, t), \\ -\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= L_0 \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + R_0 i(x, t).\end{aligned}\quad (2)$$

Эти два дифференциальных уравнения называют телеграфными уравнениями. Их можно получить из уравнений Максвелла, как это делается в электродинамике. Здесь же телеграфные уравнения получены, исходя из теории электрических цепей с сосредоточенными параметрами, базирующейся на уравнениях Ома и Кирхгофа.

## 1.2. Решение телеграфных уравнений в частотной области

Найдем функции  $u(x,t)$  и  $i(x,t)$ , удовлетворяющие телеграфным уравнениям (2). Будем питать линию в ее начале (рис. 1) источником синусоидального напряжения  $u_1 = \dot{u}_0 e^{j\omega t}$ , где  $\dot{u}_0$  — комплексная амплитуда напряжения источника. Под воздействием приложенного к линии гармонического сигнала ток и напряжение в любой точке линии будут также изменяться гармонически с частотой источника. Обоснованием этого утверждения является линейность телеграфных уравнений (2). Это означает, что в любом сечении линии можно искать решение телеграфных уравнений в виде

$$u(x,t) = E(x)e^{j\omega t}, \quad i(x,t) = J(x)e^{j\omega t},$$

где  $E(x), J(x)$  — комплексные функции координаты  $x$ .

Вычислим производные

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [E(x)e^{j\omega t}] = e^{j\omega t} \frac{dE(x)}{dx},$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [E(x)e^{j\omega t}] = j\omega e^{j\omega t} E(x),$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = e^{j\omega t} \frac{dJ(x)}{dx},$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} = j\omega e^{j\omega t} J(x).$$

Подставим эти соотношения в (2) и после сокращения на  $e^{j\omega t}$  получим

$$-\frac{dE(x)}{dx} = (R_0 + j\omega L_0)J(x), \quad (3)$$

$$-\frac{dJ(x)}{dx} = (G_0 + j\omega C_0)E(x). \quad (4)$$

Продифференцируем по  $x$  обе части уравнения (3) и получим

$$-\frac{d^2 E(x)}{dx^2} = (R_0 + j\omega L_0) \frac{dJ(x)}{dx}.$$

Подставив сюда  $\frac{dJ(x)}{dx}$  из уравнения (4), получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно напряжения

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} = \gamma^2 E(x), \quad (5)$$

где  $\gamma^2 = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0) -$  постоянная распространения.

Аналогично, продифференцировав по  $x$  обе части уравнения (4) и подставив в полученный результат  $\frac{dE(x)}{dx}$  из (3), получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно тока

$$\frac{d^2 J(x)}{dx^2} = \gamma^2 J(x). \quad (7)$$

В теории волновых процессов уравнения (5) и (7) называют уравнениями Гельмгольца. Решения этих уравнений дают выражения для амплитуды напряжения  $E(x)$  и амплитуды тока  $J(x)$  в разных точках  $x$  на линии. Эти амплитуды в сочетании с выражениями  $u(x, t) = E(x)e^{j\omega t}$  и  $i(x, t) = J(x)e^{j\omega t}$  дадут полные решения дифференциальных уравнений. Следует решать одно из уравнений Гельмгольца, например, уравнение (5) ибо, определив  $E(x)$ , найдем  $J(x)$  из (3).

Общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$E(x, s) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}, \quad (8)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  комплексные постоянные, определяемые из граничных условий. Решение (8) записано как функция координаты  $x$  и частоты  $s = j\omega$ , поскольку  $\gamma$  зависит от  $s$ . Вычислив из (8)  $\frac{dE(x, s)}{dx}$ , из (3) получим

$$J(x, s) = \frac{-1}{R_0 + sL_0} \cdot \frac{dE(x, s)}{dx} = \frac{\gamma (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x})}{R_0 + sL_0}.$$

С учетом значений  $\gamma$  запишем  $J(x, s)$  в виде

$$J(x, s) = \frac{1}{\rho} \cdot (A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}), \quad (9)$$

где  $\rho = \sqrt{\frac{R_0 + sL_0}{G_0 + sC_0}}$  —

— волновое сопротивление линии. В общем случае величина  $\rho$  — комплексная.

Итак, комплексные амплитуды напряжения и тока в сечении линии, отстоящем от её начала на расстоянии  $x$ , определяются выражениями (8) и (9). Представим постоянную распространения  $\gamma$  в виде

$$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta.$$

Здесь действительная часть  $\alpha$  характеризует убывание амплитуды напряжения или тока на единицу длины линии. Величину  $\alpha$  называют постоянной затухания линии. Мнимая часть  $\beta$  определяет изменение фазы напряжения или тока на единицу длины линии. Величину  $\beta$  называют фазовой постоянной или угловым коэффициентом линии. Подставив значение  $\gamma = \alpha + j\beta$  в (8), получим

$$E(x, s) = |A_1| e^{-\alpha x} \cdot e^{j(\psi_1 - \beta x)} + |A_2| e^{\alpha x} \cdot e^{j(\psi_2 + \beta x)},$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — аргументы комплексных величин  $A_1 = |A_1| e^{j\psi_1}$  и  $A_2 = |A_2| e^{j\psi_2}$ . Мгновенное значение напряжения  $u(x, t)$  в сечении  $x$  линии найдем, взяв реальную часть выражения  $E(x, s)e^{j\omega t}$ , т.е.

$$u(x, t) = \operatorname{Re}[E(x, s)e^{j\omega t}] = |A_1| e^{-\alpha x} \cos(\omega t + \psi_1 - \beta x) + |A_2| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \psi_2 + \beta x). \quad (11)$$

Таким образом, мгновенное напряжение в любом сечении линии складывается из двух слагаемых. Рассмотрим первое слагаемое в соотношении (11). Если считать точку  $x$  фиксированной и рассматривать изменение напряжения в этой точке от времени  $t$ , то первое слагаемое — гармоническая функция с постоянной амплитудой. Если же считать время  $t$  фиксированным и рассматривать изменение мгновенного напряжения вдоль координаты  $x$ , то получим падающую затухающую гармоническую волну напряжения  $E_n$ , амплитуда которой  $|A_1|e^{-\alpha x}$  убывает с ростом  $x$ , т. е. по мере удаления от начала линии к ее концу (рис. 3).

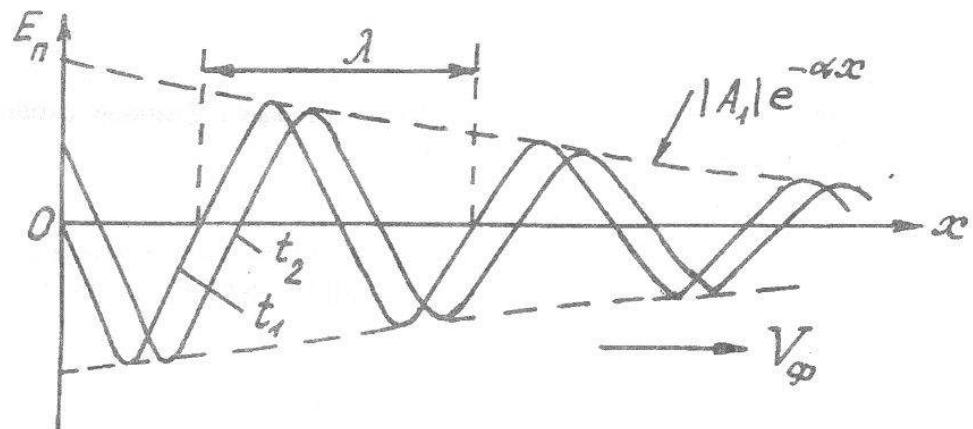


Рис. 3

Убывание амплитуды волны вдоль линии обусловлено потерями ( $\alpha \neq 0$ ), а изменение фазы — конечной скоростью распространения электромагнитных колебаний. На рис. 3 обозначена пространственная длина волны напряжения  $\lambda$ , равная расстоянию между двумя точками линии, в которых фазы рассматриваемой слагающей напряжения различаются на  $2\pi$ . Следовательно,

$$[\omega t + \psi_1 - \beta x] - [\omega t + \psi_1 - \beta(x + \lambda)] = 2\pi,$$

откуда

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (12)$$

Как следует из формулы (12), коэффициент фазы  $\beta$  играет роль пространственной частоты волнового процесса по аналогии с временной частотой  $\omega$ . С течением времени волна напряжения<sup>1</sup> перемещается от начала линии к ее концу; эта волна называется *прямой или падающей*.

Если нужно проследить за перемещением вдоль оси  $x$  какой-либо фиксированной точки на кривой распределения напряжения, то следует потребовать неизменности полной фазы  $(\omega t + \psi_1 - \beta x)$  гармонической функции при всех  $x$  и  $t$ . Условие

$$(\omega t + \psi_1 - \beta x) = \text{const} \quad (13)$$

является уравнением, определяющим положение точек равных фаз. Скорость перемещения точки равной фазы называют фазовой скоростью и обозначают  $V_\phi$ . Чтобы найти  $V_\phi$ , выразим из (13)

$$x = (\omega t + \psi_1 - \text{const}) / \beta \quad \text{и определим}$$

$$V_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (14)$$

Аналогичное исследование второго слагаемого соотношения (11) показывает, что для произвольного фиксированного момента времени оно представляет отраженную или обратную волну напряжения  $E_0$ , амплитуда которой возрастает с увеличением  $x$ , т. е. по мере удаления от начала линии к ее концу (рис. 4). Отражение волн любой физической природы происходит тогда, когда волна встречается с препятствием на пути своего распространения, т. е. когда в среде, где распространяется волна, существует какая-либо неоднородность — изменение физических свойств среды. Эти положения относятся и к волнам напряжения и тока в линии. В простейшем случае препятствием для распространяющейся по линии волны является конец линии. Дойдя до конца линии, волна напряжения или тока отражается. Возникает обратная или отраженная волна, бегущая в обратном направлении, т. е. от конца к началу линии.

---

<sup>1</sup> Все сказанное о волне напряжения  $u(x, t)$  относится и к волне тока  $i(x, t)$

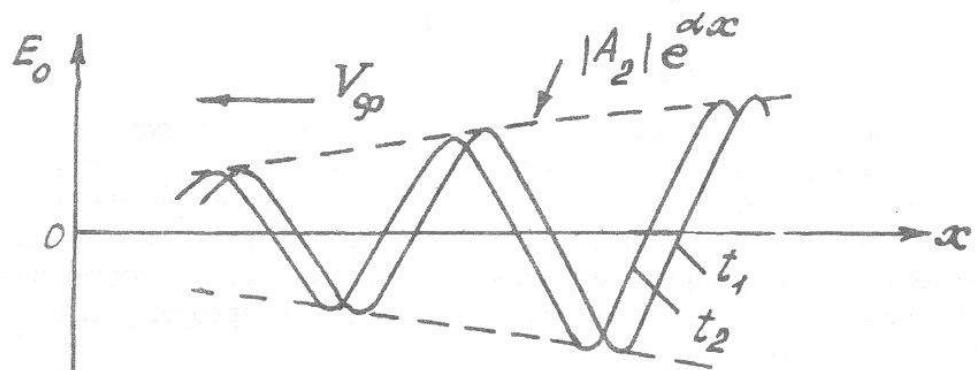


Рис. 4

Фазовая скорость обратной волны

$$V_\phi = -\frac{\omega}{\beta}. \quad (15)$$

Знак "минус" указывает, что обратная волна движется в направлении, противоположном падающей волне.

Итак, мгновенное напряжение в линии — сумма двух волн, движущихся в противоположных направлениях, причем каждая из волн затухает в направлении движения.

Запишем напряжение (8) и ток (9) в линии в виде суммы падающей и отраженной волн:

$$E(x, s) = E_n(x, s) + E_0(x, s),$$

$$J(x, s) = \frac{E_n(x, s)}{\rho} - \frac{E_0(x, s)}{\rho} = J_n(x, s) + J_0(x, s), \quad (16)$$

где падающие волны напряжения и тока  $E_n(x, s) = A_1 e^{-\gamma x}$ ,

$J_n(x, s) = \frac{E_n(x, s)}{\rho}$ , а отраженные волны напряжения и тока

$E_0(x, s) = A_2 e^{\gamma x}$ ,  $J_0(x, s) = \frac{-E_0(x, s)}{\rho}$ . Напряжение и ток падающей

и отраженной волн связаны законом Ома

$$\frac{E_n(x,s)}{J_n(x,s)} = -\frac{E_0(x,s)}{J_0(x,s)} = \rho . \quad (17)$$

Соотношение (17) объясняет смысл названия  $\rho$  — волновое сопротивление, которое хотя и выражается в омах, как обычное сопротивление, имеет иной смысл. Это сопротивление не отражает рассеивания мощности электрического тока в теплоту, а лишь является отношением одноименных волн напряжения и тока. Связь падающей и отраженной волн определяется граничными условиями в линии и требует рассмотрения линий конечной длины.

### 1.3. Линии без потерь.

#### Стоячие волны в линии без потерь

В идеальной линии, когда  $R = 0$  и  $G = 0$ , получим  $\alpha = 0$ , а постоянная распространения  $\gamma = j\omega\sqrt{L_0C_0} = j\beta$ , где  $\beta = \omega\sqrt{L_0C_0}$ .

Фазовая скорость в линии без потерь

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{L_0C_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}} \quad (18)$$

не зависит от частоты. В теории электромагнитного поля показано, что справедливо равенство

$$L_0C_0 = \frac{\epsilon\mu}{c^2},$$

где  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с — скорость света в пустоте,  $\epsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, окружающей проводники линии.

Следовательно,

$$V_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad \beta = \frac{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}{c}.$$

В случае линии с воздушным заполнением, когда  $\epsilon = 1$  и  $\mu = 1$ , получим

$$V_\phi = c, \quad \beta = \frac{\omega}{c}.$$

Волновое сопротивление в линии без потерь

$$\rho = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad - \quad (19)$$

положительная действительная величина. Комплексная амплитуда напряжения в линии без потерь

$$E(x, s) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} = A_1 e^{-j\beta x} + A_2 e^{j\beta x}.$$

Мгновенное напряжение в линии без потерь

$$u(x, t) = E(x) e^{j\omega t} = A_1 e^{j(\omega t - \beta x)} + A_2 e^{j(\omega t + \beta x)} = E_n + E_0.$$

Положим, что амплитуды напряжения падающей и отраженной волн равны, т.е.  $A_1 = A_2 = A_0$ . Тогда  $u_n = A_0 e^{j(\omega t - \beta x)}$  — падающая волна, бегущая в сторону положительных  $x$ ,  $u_0 = A_0 e^{j(\omega t + \beta x)}$  — отраженная волна, бегущая в сторону отрицательных  $x$ . Заметим, что амплитуды падающей и отраженной волн (бегущих волн) не зависят от координаты  $x$ . Найдем результирующее напряжение в линии, сложив падающую и отраженную волны

$$u(x, t) = u_n + u_0 = A_0 e^{j\omega t} (e^{-j\beta x} + e^{j\beta x}) = 2A_0 \cos \beta x e^{j\omega t}. \quad (20)$$

Это выражение представляет колебание, происходящее по всей линии с одинаковой фазой, т.к. в множителе  $e^{j\omega t}$ , выражающем закон изменения напряжения во времени, отсутствует зависящий от координаты фазовый сдвиг. Такую волну называют *стоячей волной*, и это её первое отличие.

Вторым отличием стоячей волны от бегущей является то, что ее амплитуда зависит от координаты  $x$ . Как видно из выражения (20), амплитуда стоячей волны в зависимости от координаты  $x$  изменяется от наибольшего значения  $2A_0$  до нуля. Места, где наблюдаются наибольшие значения амплитуды, называют *пучностями*, а места наименьших значений амплитуды называют *узлами*. Местоположение узлов и пучностей не зависит от времени, они неподвижны.

## 1.4. Коэффициенты отражения

Определим количественные характеристики явления отражения. Включим на правом конце линии сопротивление нагрузки  $Z_H$  (рис. 5).

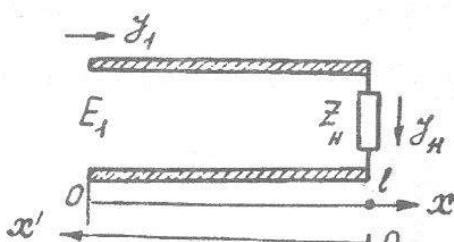


Рис. 5

Отношение  $\frac{E_H}{J_H} = Z_H$  оп-

ределяет граничное условие на конце линии. Найдем напряжение  $E_H$  и ток  $J_H$  на конце линии, используя общее решение телеграфных уравнений в форме (16).

Тогда

$$E_H = E_{nH} + E_{oH}, \quad (21)$$

$$J_H = \frac{E_{nH}}{\rho} - \frac{E_{oH}}{\rho}, \quad (22)$$

где  $E_{nH}$  и  $E_{oH}$  — напряжение падающей и отраженной волн в месте включения нагрузки. Отношение напряжения отраженной волны к напряжению падающей волны в месте отражения назовем коэффициентом отражения по напряжению и обозначим через  $\Gamma_u$ . Следовательно,

$$\Gamma_u = \frac{E_{oH}}{E_{nH}}. \quad (23)$$

Поделив соотношение (21) на (22), получим с учетом соотношения (23)

$$\frac{E_H}{J_H} = Z_H = \rho \frac{E_{nH} + E_{oH}}{E_{nH} - E_{oH}} = \rho \frac{1 + \frac{E_{oH}}{E_{nH}}}{1 - \frac{E_{oH}}{E_{nH}}} = \rho \frac{1 + \Gamma_u}{1 - \Gamma_u},$$

откуда

$$\Gamma_u = \frac{Z_H - \rho}{Z_H + \rho}. \quad (24)$$

Формула (24) показывает, что коэффициент отражения по напряжению  $\Gamma_u$  в месте включения нагрузки зависит только от соотношения между сопротивлением нагрузки и волновым сопротивлением линии. Формула (24) справедлива в общем случае, когда в линии имеются потери. Коэффициент отражения  $\Gamma_u$  выражает отношение комплексных амплитуд отраженной и падающей волн — формула (23); следовательно,  $\Gamma_u$  — величина в общем случае комплексная. Когда  $\Gamma_u$  веществен и положителен, то оба напряжения в месте отражения совпадают по фазе, а если  $\Gamma_u$  веществен и отрицателен, то оба напряжения в месте отражения находятся в противофазе. Минимость коэффициента  $\Gamma_u$  означает сдвиг фаз на  $\pi/2$ . Коэффициент отражения  $\Gamma_u$  не может быть больше единицы по абсолютной величине. Противное означало бы, что амплитуда отраженной волны больше амплитуды падающей волны, т. е. что отраженная волна несет большую мощность, чем падающая волна; этого не может быть, т. к. на конце линии источников энергии нет.

Случай  $|\Gamma_u| = 1$  назовем *полным отражением*; здесь амплитуды падающей и отраженной волн равны.

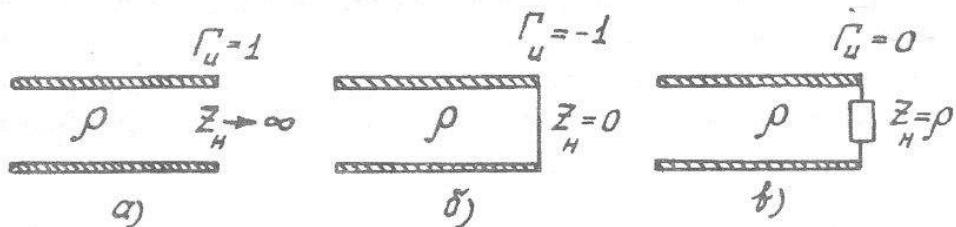


Рис. 6

Рассмотрим три частных случая формулы (24).

Пусть  $Z_H \rightarrow \infty$ , т. е. линия разомкнута на правом конце (рис. 6а). При этом  $\Gamma_u = 1$ , т. е. амплитуды напряжения падающей и отраженной волн равны и находятся в фазе.

Пусть  $Z_H = 0$ , т. е. линия короткозамкнута на правом конце (рис. 6б). При этом  $\Gamma_u = -1$ , т. е. амплитуды напряжения падающей и отраженной волн равны и находятся в противофазе.

Пусть  $Z_H = \rho$ , т. е. линия нагружена на сопротивление, равное волновому.

Говорят, что когда

$$Z_H = \rho, \quad (25)$$

то линия согласована. В этом случае  $\Gamma_u = 0$ , т. е. отраженная волна отсутствует и в линии распространяется чисто бегущая волна.

Кратко рассмотрим вопрос о коэффициенте отражения по току  $\Gamma_I$ , который определяется как отношение тока отраженной волны  $J_{oH}$  к току падающей волны  $J_{nH}$  в месте отражения, т. е.

$$\Gamma_I = \frac{J_{oH}}{J_{nH}}. \quad (26)$$

Можно показать, что коэффициент отражения по току определяется по формуле

$$\Gamma_I = \frac{\rho - Z_H}{\rho + Z_H}. \quad (27)$$

Из сравнения выражений (24) и (27) следует, что  $\Gamma_u = -\Gamma_I$ . Например, когда линия разомкнута на конце (рис. 6а), имеем  $\Gamma_u = 1$  и  $\Gamma_I = -1$ . Второе из этих двух соотношений можно получить путем следующих рассуждений. При  $Z_H \rightarrow \infty$  конец линии разомкнут и ток в конце линии равен нулю. Приходит падающая волна, несущая не равный нулю ток; должна образоваться такая отраженная волна, чтобы для результирующей волны выполнялось граничное условие  $J_H = 0$ . Это возможно только в случае, если амплитуды падающей и отраженной волн равны, а их фазы противоположны. Оба эти условия выражаются равенством  $\Gamma_u = -1$ .

## 1.5. Входное сопротивление линии с комплексной нагрузкой

Определим входное сопротивление линии в сечении  $x = 0$  (рис. 5), если на ее противоположном конце (в сечении  $x = l$ ) включена комплексная нагрузка  $Z_H = R_H + jX_H$ . Подставив в выражения (8) и (9)  $x = l$ ,  $E(x = l) = E_H$ ,  $J(x = l) = J_H$ , получим

$$E_H = A_1 e^{-\gamma l} + A_2 e^{\gamma l},$$

$$J_H = \frac{A_1}{\rho} e^{-\gamma l} - \frac{A_2}{\rho} e^{\gamma l}.$$

Решив уравнения относительно неизвестных  $A_1$  и  $A_2$ , найдем

Решив уравнения относительно неизвестных  $A_1$  и  $A_2$ , найдем

$$A_1 = \frac{1}{2}(E_H + \rho J_H)e^{\gamma l}, \quad A_2 = \frac{1}{2}(E_H - \rho J_H)e^{-\gamma l}.$$

Подставив  $A_1$  и  $A_2$  в исходную систему уравнений (8) и (9), получим

$$E(x) = \frac{1}{2}E_H [e^{\gamma(j-x)} + e^{-\gamma(l-x)}] + \frac{1}{2}J_H \rho [e^{\gamma(j-x)} - e^{-\gamma(l-x)}],$$

$$J(x) = \frac{E_H}{2\rho} [e^{\gamma(j-x)} - e^{-\gamma(l-x)}] + \frac{1}{2}J_H [e^{\gamma(j-x)} + e^{-\gamma(l-x)}]$$

Последнюю систему уравнений запишем в виде

$$E(x) = E_H \operatorname{ch} \gamma(l-x) + J_H \rho \operatorname{sh} \gamma(l-x),$$

$$J(x) = \frac{E_H}{\rho} \operatorname{sh} \gamma(l-x) + J_H \operatorname{ch} \gamma(l-x). \quad (28)$$

Установлена связь между напряжением  $E(x)$  и током  $J(x)$  в произвольном сечении  $x$  линии с напряжением  $E_H$  и током  $J_H$  в нагрузочном сопротивлении  $Z_H$ . В частности, при  $x = 0$  получим

$$E_1 = E_H \operatorname{ch} \gamma l + J_H \rho \operatorname{sh} \gamma l, \quad (29)$$

$$J_1 = \frac{E_H}{\rho} \operatorname{sh} \gamma l + J_H \operatorname{ch} \gamma l, \quad (30)$$

где  $E_1$  и  $J_1$  — напряжение и ток на входе линии (рис. 5). Отношение  $E_1/J_1$  равно входному сопротивлению  $Z_1$  отрезка линии длиной  $l$ , нагруженного на сопротивление нагрузки  $Z_H = E_H/J_H$ . С учетом соотношений (29) и (30) получим

$$Z_1 = \frac{E_1}{J_1} = Z_H \frac{\operatorname{ch} \gamma l + \frac{\rho}{Z_H} \operatorname{sh} \gamma l}{\operatorname{ch} \gamma l + \frac{Z_H}{\rho} \operatorname{sh} \gamma l}. \quad (31)$$

Как следует из формулы (31), входное сопротивление линии  $Z_1$  не совпадает с сопротивлением нагрузки  $Z_H$ . Следовательно, отрезок линии длиной  $l$  выполняет функцию трансформатора сопротивлений.

Запишем систему уравнений (28) в ином виде, положив в (28)  $l - x = x'$

$$E(x') = E_H \operatorname{ch} \gamma x' + J_H \rho \operatorname{sh} \gamma x', \quad (32)$$

$$J(x') = \frac{E_H}{\rho} \operatorname{sh} \gamma x' + J_H \operatorname{ch} \gamma x'. \quad (33)$$

Эта система уравнений устанавливает связь между напряжениями и токами в любом сечении линии, отстоящем на расстоянии  $x'$  от места включения сопротивления нагрузки  $Z_H$ , с напряжениями и токами в нагрузочном сопротивлении  $Z_H$  — рис. 5. Поделив (32) на (33), получим

$$Z(x') = Z_H \frac{-\operatorname{ch} \gamma x' + \frac{\rho}{Z_H} \operatorname{sh} \gamma x'}{\operatorname{ch} \gamma x' + \frac{Z_H}{\rho} \operatorname{sh} \gamma x'}. \quad (34)$$

Величина  $Z(x')$  — входное сопротивление отрезка линии длиной  $x'$ , нагруженного на комплексное сопротивление  $Z_H$ .

Рассмотрим частный случай, когда линия нагружена на сопротивление  $Z_H$ , равное волновому сопротивлению линии  $\rho$ , т. е.  $Z_H = \rho$  (полное согласование). Тогда, как следует из формул (31) и (34),  $Z_1 = \rho$ ,  $Z(x') = \rho$ . В этом случае по линии течет поток энергии, поступающий в нагрузку без отражений. Следовательно, если линия предназначена для передачи энергии, то необходимо обеспечить в линии режим, близкий к режиму согласования, когда  $Z_H = \rho$ . На практике такой режим можно обеспечить лишь приближенно, причем, чем шире диапазон рабочих частот того или иного устройства, тем труднее обеспечить режим согласования.

## 1.6. Аналогия между уравнениями линии с распределенными параметрами и уравнениями четырехполюсника

В распределенной линии длиной  $l$  с волновым сопротивлением  $\rho$  (рис. 7а) напряжения и токи на противоположных концах линии связаны соотношениями (29) и (30). Сравним выражения (29) и (30) с уравнениями четырехполюсника 2-Р с сосредоточенными параметрами в системе цепных (или  $ABCD$ ) параметров, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} E_1 &= AE_2 + BJ_2, \\ J_1 &= CE_2 + DJ_2, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $E_1, J_1$  и  $E_2, J_2$  — напряжения и токи на входе и выходе четырехполюсника (рис. 7б)

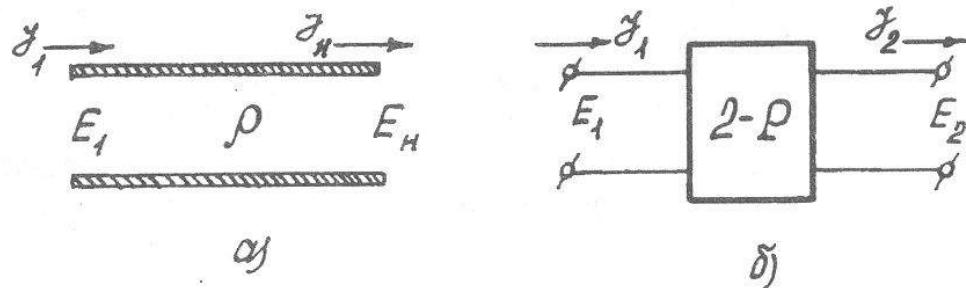


Рис. 7

Из сравнения двух систем уравнений (29), (30) и (35) следует, что по форме они идентичны, связывают между собой аналогичные величины — напряжения и токи на входе и выходе системы. Примем, что коэффициенты в этих уравнениях равны между собой, т. е.

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{ch} \gamma l, & B &= \rho \operatorname{sh} \gamma l, \\ C &= \frac{1}{\rho} \operatorname{sh} \gamma l, & D &= \operatorname{ch} \gamma l. \end{aligned} \quad (36)$$

При выполнении равенств (36) можно считать, что отрезок линии с длиной  $l$  и волновым сопротивлением  $\rho$  эквивалентен классическому четырехполюснику в отношении связи между входными и выходными напряжениями и токами. При этом матрица цепных (или  $ABCD$ ) параметров эквивалентного четырехполюснику отрезка линии имеет вид:

$$[a] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\gamma l & \rho \operatorname{sh}\gamma l \\ \frac{1}{\rho} \operatorname{sh}\gamma l & \operatorname{ch}\gamma l \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Поскольку четырехполюсник в виде отрезка линии является обратимым (не содержит зависимых источников тока или напряжения), то выполняется известное условие обратимости в системе  $ABCD$  параметров

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\gamma l & \rho \operatorname{sh}\gamma l \\ \frac{1}{\rho} \operatorname{sh}\gamma l & \operatorname{ch}\gamma l \end{vmatrix} = \operatorname{ch}^2 \gamma l - \operatorname{sh}^2 \gamma l = 1.$$

Зная  $ABCD$ -матрицу, можно найти и другие матрицы четырехполюсника, эквивалентного отрезку линии. Так, используя соотношения между  $Z$ -параметрами холостого хода и  $ABCD$ -параметрами обратимого четырехполюсника в виде

$$Z_{11} = \frac{A}{C}, \quad Z_{21} = Z_{12} = \frac{1}{C}, \quad Z_{22} = \frac{D}{C},$$

найдем, что матрица сопротивлений холостого хода четырехполюсника, эквивалентного отрезку линии, имеет вид:

$$[Z]_{xx} = \begin{bmatrix} \rho \operatorname{cth}\gamma l & \rho \frac{1}{\operatorname{sh}\gamma l} \\ \rho \frac{1}{\operatorname{sh}\gamma l} & \rho \operatorname{cth}\gamma l \end{bmatrix}. \quad (38)$$

В матрице (38)  $Z_{11} = Z_{22}$  и  $Z_{12} = Z_{21}$ , ибо четырехполюсник в виде отрезка линии является симметричным ( $Z_{11} = Z_{22}$ ) и обратимым ( $Z_{12} = Z_{21}$ ).

Используя соотношения

$$Y_{11} = \frac{D}{B}, \quad Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{B}, \quad Y_{22} = \frac{A}{B},$$

получим матрицу проводимостей короткого замыкания четырехполюсника, эквивалентного отрезку линии, в виде:

$$[Y]_{K3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} \operatorname{cthy} l & -\frac{1}{\rho} \frac{1}{\operatorname{shy} l} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{1}{\operatorname{shy} l} & \frac{1}{\rho} \operatorname{cthy} l \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Полученные матрицы полезны при исследовании конкретных радиотехнических систем, в частности, СВЧ колебательных систем, СВЧ фильтров и др.

### 1.7. Свойства разомкнутого и замкнутого на конце отрезка линии без потерь

Рассмотрим разомкнутую на конце линию (рис. 8а). Напряжение и ток в любом отстоящем от правого разомкнутого конца сечении  $x'$  находим из соотношений (32) и (33), а входное сопротивление  $Z(x')$  в этом же сечении — из соотношения (34). Для линии без потерь  $\operatorname{ch}j\beta x' = \cos\beta x'$ ,  $\operatorname{sh}j\beta x' = j\sin\beta x'$ , поэтому соотношения (32), (33) и (34) принимают вид:

$$E(x') = E_H \cos \beta x' + J_H \rho j \sin \beta x',$$

$$J(x') = \frac{E_H}{\rho} j \sin \beta x' + J_H \cos \beta x', \quad (40)$$

$$Z(x') = Z_H \frac{\cos \beta x' + j \frac{\rho}{Z_H} \sin \beta x'}{\cos \beta x' + j \frac{Z_H}{\rho} \sin \beta x'}.$$

Учтем граничное условие  $J_H = 0$ . Для линии с потерями получим

$$E(x') = E_H \operatorname{ch} \gamma x',$$

$$J(x') = \frac{E_H}{\rho} \operatorname{sh} \gamma x',$$

$$Z(x') = \rho \operatorname{ctg} \beta x',$$

а для линии без потерь

$$\begin{aligned} E(x') &= E_H \cos \beta x', \\ J(x') &= \frac{E_H}{\rho} j \sin \beta x', \\ Z(x') &= -j \rho \operatorname{ctg} \beta x'. \end{aligned} \quad (41)$$

Входное сопротивление разомкнутой на конце линии без потерь получилось чисто мнимым. Это означает, что линия не потребляет мощности от источника, а в нагрузке  $Z_H = \infty$  мощность не потребляется, поскольку  $J_H = 0$ .

Входное сопротивление  $Z(x')$ , будучи реактивным, принимает все возможные значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , при этом  $Z(x')$  является периодической функцией аргумента  $\beta x'$ . Запишем аргумент  $\beta x'$  в виде

$$\beta x' = \frac{\sqrt{\epsilon \mu} \omega x'}{c} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu} 2\pi x'}{\lambda},$$

поскольку  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ . Величину

$$\beta x' = \theta_{x'} \quad (42)$$

называют "электрической" длиной отрезка линии, имеющего геометрическую длину  $x'$ .

Рассмотрим соотношения (41) для тока и напряжения. Напряжение и ток в любом сечении линии изменяются во времени по синусоидальному закону. Мгновенные значения напряжения и тока на расстоянии  $x'$  от конца линии

$$u(x', t) = E_H \cos \beta x' e^{j\omega t},$$

$$J(x', t) = j \frac{E_H}{\rho} \sin \beta x' e^{j\omega t} = \frac{E_H}{\rho} \sin \beta x' e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}.$$

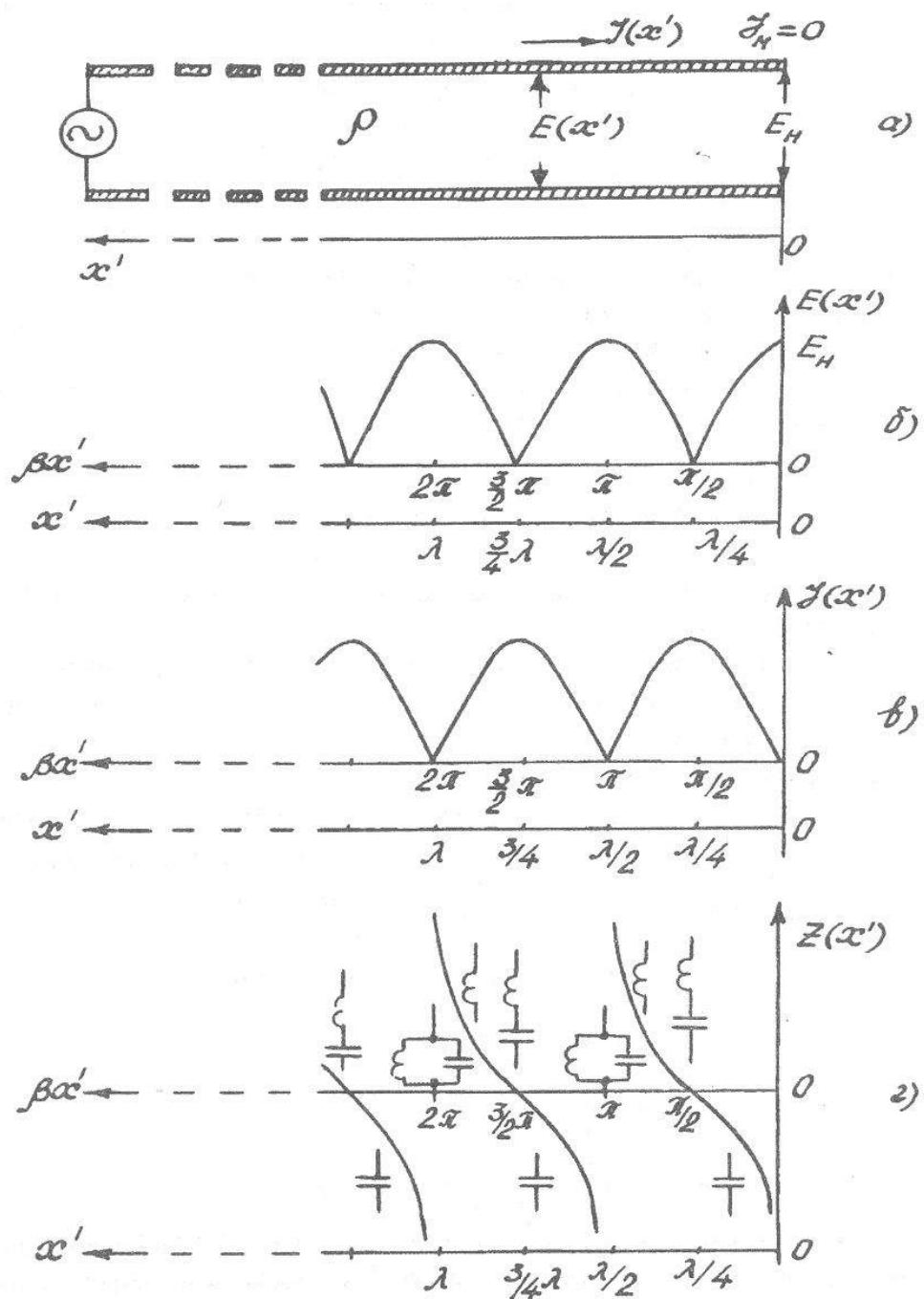


Рис. 8

Взяв модуль комплексных величин  $u(x',t)$  и  $J(x',t)$ , получим

$$|u(x',t)| = E_H \cos \beta x' \cos \omega t,$$

$$|J(x',t)| = \frac{E_H}{\rho} \sin \beta x' \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Эти формулы показывают:

- 1) в разомкнутой на конце линии без потерь устанавливаются стоячие волны напряжения и тока; амплитуды этих волн зависят от координаты  $x'$ , а фаза колебаний между двумя соседними узлами постоянна;
- 2) энергия в линии реактивна, поскольку напряжение  $|u(x',t)|$  и ток  $|J(x',t)|$  сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ .

Распределения амплитуд напряжения и тока в разомкнутой на конце линии без потерь, построенные по формулам  $E(x') = E_H |\cos \beta x'|$ ,

$$J(x') = \frac{E_H}{\rho} |\sin \beta x'|, \text{ показаны на рис. 8б,в. Амплитуды } E(x') \text{ и } J(x')$$

построены в зависимости от электрической длины  $\beta x'$  и координаты  $x'$ .

Пучности напряжения в разомкнутой на конце линии соответствуют следующим величинам электрических длин:

$$\beta x' = 0, \pi, 2\pi, \dots n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$$

При этих же значениях  $\beta x'$  имеют место узлы тока. Если линия имеет воздушное заполнение ( $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ), то пучностям напряжения (узлам тока) соответствуют координаты  $x' = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots n\frac{\lambda}{2}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Узлы напряжения (пучности тока) имеют место при

$$\beta x' = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

что соответствует координатам

$$x' = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \dots (2n+1)\frac{\lambda}{4}.$$

График зависимости входного сопротивления от электрической длины  $\beta x'$  и координаты  $x'$  показан на рис. 8г. При изменении длины линии от 0 до  $x' = \lambda/4$ , от  $\lambda/2$  до  $3\lambda/4$  и т. д. линия ведет себя как сосредоточенная емкость и имеет емкостное сопротивление. При изменении дли-

ны линии от  $x' = \lambda/4$  до  $\lambda/2$ , от  $3\lambda/4$  до  $\lambda$  и т. д. линия ведет себя как сосредоточенная индуктивность и имеет индуктивное сопротивление. При  $x' = 0, \lambda/2, \lambda, \dots n\lambda/2$  линия имеет бесконечно большое входное сопротивление и ведет себя подобно параллельному сосредоточенному контуру без потерь, а при  $x' = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4 \dots (2n+1)\lambda/4$  входное сопротивление линии равно нулю и она может быть уподоблена сосредоточенному последовательному контуру без потерь.

Рассмотрим короткозамкнутую на конце линию (рис. 9а). При коротком замыкании на конце имеем  $E_H = 0$ . Амплитуды напряжения и тока на расстоянии  $x'$  от короткозамкнутого (к.з.) конца линии без потерь

$$E(x') = j\rho J_H \sin \beta x',$$

$$J(x') = J_H \cos \beta x', \quad (43)$$

а мгновенные значения напряжения и тока

$$u(x', t) = \rho J_H \sin \beta x' \cos(\omega t + \pi/2),$$

$$J(x', t) = J_H \cos \beta x' \cos \omega t.$$

Таким образом, в к. з. линии устанавливаются стоячие волны напряжения и тока. Распределения амплитуд напряжения и тока построены по формулам

$$E(x') = \rho J_H |\sin \beta x'|,$$

$$J(x') = J_H |\cos \beta x'|$$

и показаны на рис. 9б, в. Как видно из этих рисунков, на к. з. конце имеет место пучность тока и узел напряжения. Входное сопротивление к. з. на конце линии без потерь равно

$$Z(x') = j\rho \operatorname{tg} \beta x'. \quad (44)$$

График этой функции показан на рис. 9г.

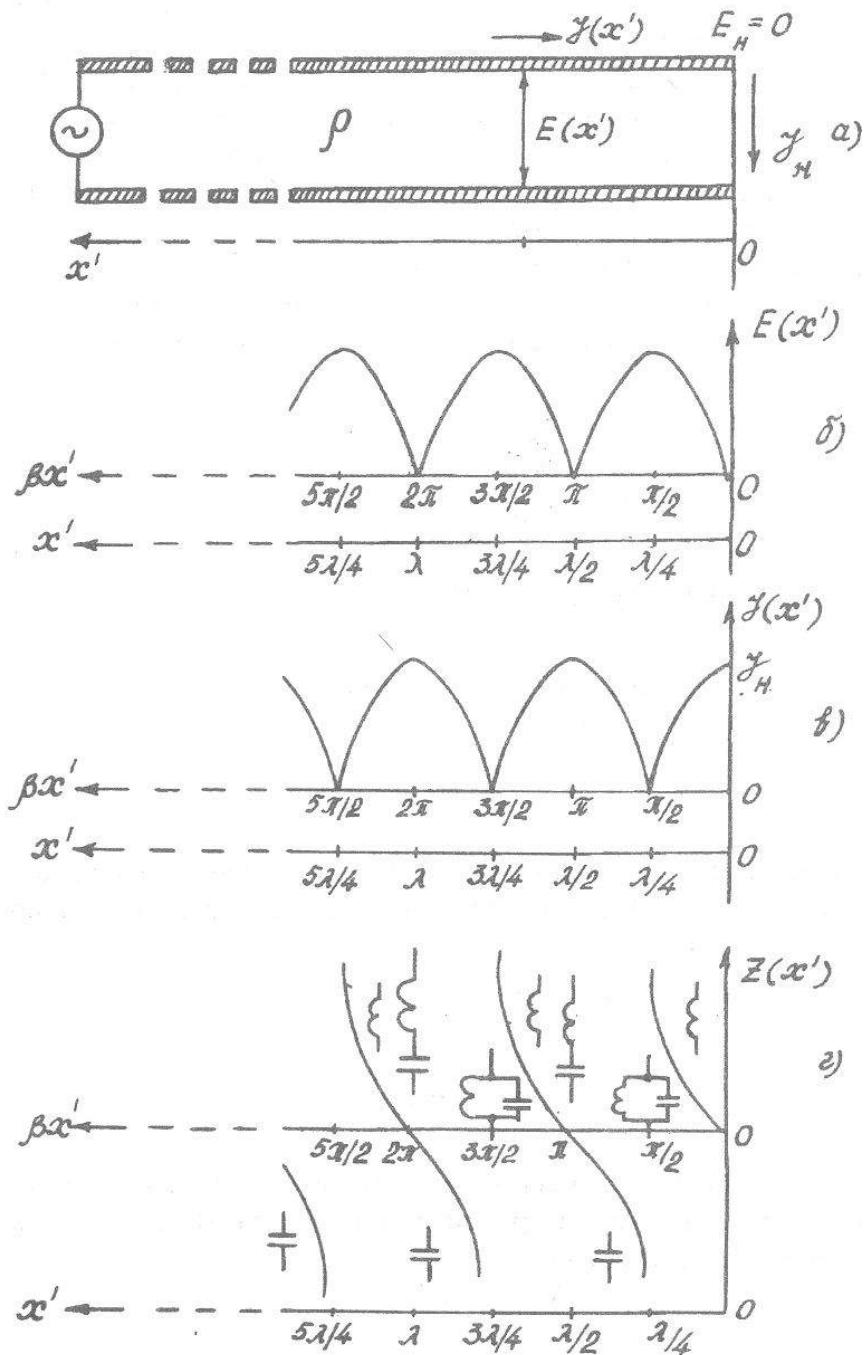


Рис. 9

Выясним свойства разомкнутых и короткозамкнутых на конце отрезков линий конечной длины  $l$ , размеры которых малы по сравнению с рабочей длиной волны  $\lambda$ .

Рассмотрим разомкнутый на конце отрезок линии с длиной  $l$  и волновым сопротивлением  $\rho$  (рис. 10а). Не имеет значения, каким образом происходит возбуждение колебаний в линии, поэтому источник колебаний с длиной волны  $\lambda$  на рис. 10а не показан.

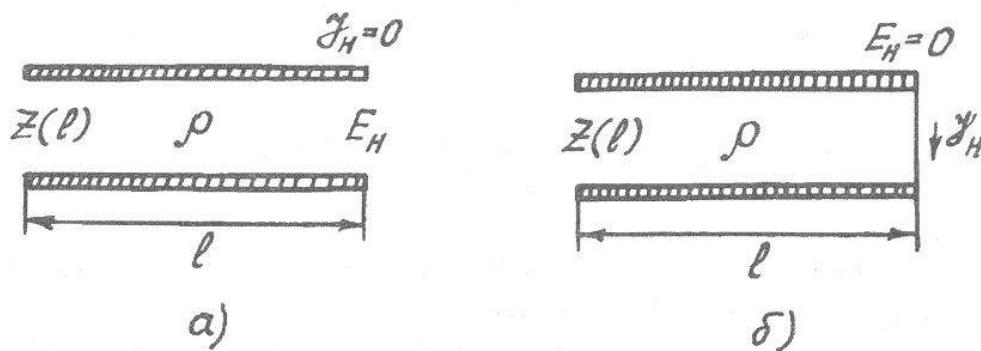


Рис. 10

Входное сопротивление отрезка линии  $Z(l) = -j\rho \operatorname{ctg} \beta l$ . Разложим правую часть этого выражения в ряд по степеням  $\beta l$

$$Z(l) = -j\rho \left[ \frac{1}{\beta l} - \frac{1}{3} \beta l - \frac{1}{45} (\beta l)^3 - \dots \right].$$

Если  $\beta l \ll 1$ , то доминирующим в ряде будет первый член, поэтому

$$Z(l) \approx -j\rho \frac{1}{\beta l}.$$

Так как  $\rho = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ ,  $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ , то

$$Z(l) \approx -j\rho \frac{1}{\beta l} = -j \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \cdot \frac{1}{\omega \sqrt{L_0 C_0} l} = \frac{1}{j\omega C_0 l} = \frac{1}{j\omega C},$$

где  $C = C_0 l$ . Таким образом, при  $\beta l \ll 1$  входное сопротивление разомкнутого на конце отрезка линии ведет себя как сопротивление сосредоточенной емкости  $C$ . Поступим аналогично с формулой для входного сопротивления короткозамкнутого на конце отрезка линии (рис. 10б). Выполнив разложение в ряд, получим

$$Z(l) = j\rho \operatorname{tg} \beta l = j\rho \left[ \beta l + \frac{1}{3}(\beta l)^3 + \frac{2}{15}(\beta l)^5 + \dots \right].$$

При  $\beta l \ll 1$  имеем

$$Z(l) \approx j\rho \beta l = j \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \omega \sqrt{L_0 C_0} l = j\omega L_0 l = j\omega L,$$

где  $L = L_0 l$ .

Таким образом, при  $\beta l \ll 1$  отрезок короткозамкнутой на конце линии ведет себя как сосредоточенная индуктивность  $L$ .

Поэтому два провода короткой разомкнутой на конце линии (рис. 10а) можно рассматривать как две обкладки конденсатора, обладающего сосредоточенной емкостью  $C$ , а короткую короткозамкнутую на конце линию — как виток, обладающий сосредоточенной индуктивностью  $L$ . Условием, при котором такая трактовка законна, является неравенство  $\beta l \ll 1$ , которое перепишем в виде ( $\beta = 2\pi/\lambda$ )

$$l \ll \lambda. \quad (45)$$

Таким образом, отрезок линии можно заменить сосредоточенным эквивалентом, если длина линии мала по сравнению с рабочей длиной волны. Этот критерий имеет общий характер. Становится понятным, почему низкочастотные радиотехнические устройства могут "странны" вести себя на высоких частотах. В самом деле, например, плоский воздушный конденсатор по мере повышения частоты питающего напряжения ведет себя уже не как конденсатор, а как разомкнутая на конце линия: его сопротивление может иметь емкостной и индуктивный характер, может быть очень большим и весьма малым. Короче говоря, сопротивление конденсатора может принимать любые значения в зависимости от величины электрической длины  $\beta l$ .

## 1.8. Линия без потерь, нагруженная на реактивное сопротивление

Рассмотрим линию, нагруженную на конце чисто реактивным сопротивлением  $\pm jX_H$ , где знак "минус" соответствует емкостной нагрузке (рис. 11а), а знак "плюс" — индуктивной нагрузке (рис. 12а). В такой линии происходит полное отражение от места включения реактивной нагрузки ( $|\Gamma| = 1$ ) и устанавливаются стоячие волны напряжения и тока.

Пусть  $-jX_H = \frac{1}{j\omega C}$ , т.е. линия нагружена емкостью.

Формально можем записать

$$\frac{1}{j\omega C} = -j\rho \operatorname{ctg} \beta x_0.$$

Такую запись можно трактовать так: емкость  $C$  заменяется отрезком разомкнутой на конце линии с длиной  $X_0$  и волновым сопротивлением  $\rho$ , равным волновому сопротивлению основной линии с длиной  $l$ .

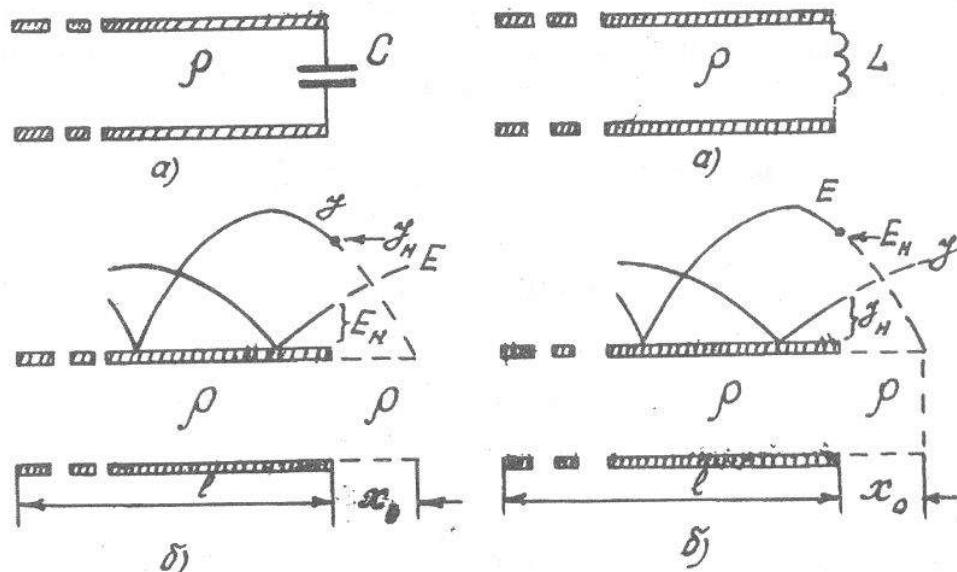


Рис. 11

Рис. 12

Величина  $x_0 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \omega C \rho$  может, в зависимости от величины емкости  $C$ , изменяться в пределах  $0 \leq x_0 \leq \frac{\lambda}{4}$ .

Распределение тока и напряжения по координате в линии, нагруженной емкостью, показано на рис. 11б (сплошные кривые).

Пусть теперь  $jX_H = j\omega L$  — линия нагружена индуктивностью.

Записав  $j\omega L = j\rho \operatorname{tg} \beta x_0$  заменяем сосредоточенную индуктивность  $L$  отрезком замкнутой на конце линии с длиной

$$x_0 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{\rho}, \quad (0 \leq x \leq \frac{\lambda}{4})$$

и волновым сопротивлением  $\rho$  (рис. 12б). На рис. 12б сплошными кривыми показано распределение напряжения и тока по координате.

### 1.9. Линия без потерь, нагруженная на активное сопротивление

Пусть линия нагружена на конце чисто активным сопротивлением  $R$  (рис. 13) Напряжение и ток в любом сечении  $x'$  линии связано с напряжением и током в нагрузке  $R$  соотношениями:

$$u(x') = E_H \cos \beta x' + j\rho J_H \sin \beta x',$$

$$J(x') = J_H \cos \beta x' + \frac{j}{\rho} E_H \sin \beta x'.$$

С учетом граничного условия  $\frac{E_H}{J_H} = R$  запишем эти соотношения в

виде:

$$u(x') = J_H \rho \left( \frac{R}{\rho} \cos \beta x' + j \sin \beta x' \right),$$

$$J(x') = J_H \left( \cos \beta x' + j \frac{R}{\rho} \sin \beta x' \right).$$

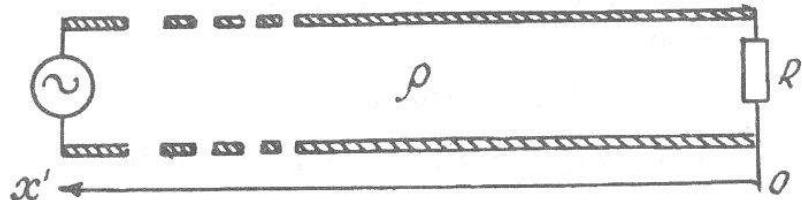


Рис. 13

Пусть сопротивление нагрузки  $R$  меньше волнового сопротивления линии, т.е.  $R < \rho$ . Введем обозначение

$$\frac{R}{\rho} = K_{BB}, \quad (46)$$

где  $K_{BB} < 1$ . Далее будет показано, что  $K_{BB}$  — коэффициент бегущей волны. С учетом введенного обозначения запишем

$$u(x') = J_H \rho (K_{BB} \cos \beta x' + j \sin \beta x'),$$

$$J(x') = J_H (\cos \beta x' + j K_{BB} \sin \beta x'). \quad (47)$$

Запишем выражение для мгновенного значения напряжения в произвольном сечении  $x'$  линии

$$\begin{aligned} u(x', t) &= \operatorname{Re} [J_H \rho (K_{BB} \cos \beta x' + j \sin \beta x') e^{j\omega t}] = \\ &= J_H \rho K_{BB} \cos \beta x' \cos \omega t - J_H \rho \sin \beta x' \sin \omega t. \end{aligned}$$

Разделив обе части этого выражения на  $J_H \rho$ , получим нормированное мгновенное значение напряжения

$$\begin{aligned} \frac{u(x', t)}{J_H \rho} &= K_{BB} \cos \beta x' \cos \omega t - \sin \beta x' \sin \omega t - \\ &- K_{BB} \sin \beta x' \sin \omega t + K_{BB} \sin \beta x' \sin \omega t. \end{aligned}$$

В правой части последнего соотношения прибавили и отняли величину  $K_{BB} \sin \beta x' \sin \omega t$ . Это позволяет записать его в виде

$$\begin{aligned}\frac{u(x',t)}{J_H \rho} &= K_{BB} (\cos \beta x' \cos \omega t - \sin \beta x' \sin \omega t) - \\ &- (1 - K_{BB}) \sin \beta x' \sin \omega t = \\ &= K_{BB} \cos(\beta x' + \omega t) - (1 - K_{BB}) \sin \beta x' \sin \omega t.\end{aligned}$$

Проанализируем правую часть последнего выражения. Первое слагаемое описывает бегущую волну напряжения, амплитуда этой волны не зависит от координаты  $x'$ . Второе слагаемое описывает стоячую волну напряжения.

Таким образом, в линии, нагруженной на активное сопротивление  $R$ , имеются как бегущие, так и стоячие волны напряжения и тока. При

этом, чем больше  $R$  отличается от  $\rho$ , т. е. чем больше  $K_{BB} = \frac{R}{\rho}$  отличается от единицы, тем сильнее проявляют себя стоячие волны и, наоборот, чем ближе  $K_{BB}$  к единице, тем резче проявляют себя бегущие волны. При  $K_{BB} = 1$ , т. е. при  $R = \rho$ , в линии распространяются только бегущие волны, при  $K_{BB} = 0$  — только стоячие волны.

Таким образом, коэффициент  $K_{BB}$  характеризует степень приближения режима в линии к режиму бегущей волны и поэтому называется *коэффициентом бегущей волны*.

Построим распределения амплитуд напряжения и тока от координаты  $x'$ . Определив модуль величин (47), получим

$$|u(x')| = J_H \rho \sqrt{\left( K_{BB}^2 \cos^2 \beta x' + \sin^2 \beta x' \right)}, \quad (48)$$

$$|J(x')| = J_H \sqrt{\left( \cos^2 \beta x' + K_{BB}^2 \sin^2 \beta x' \right)}. \quad (49)$$

При  $\beta x' = 0, \pi, 2\pi, \dots n\pi$  амплитуды напряжения минимальны и равны  $u_{\min} = J_H \rho K_{BB}$ . В этих же точках амплитуды тока максимальны и равны  $J_{\max} = J_H$ .

При  $\beta x' = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots (2n+1)\frac{\pi}{2}$  амплитуды напряжения максимальны  $U_{\max} = J_H \rho$ , а амплитуды тока минимальны  $J_{\min} = J_H K_{BB}$ . Таким образом, узлы тока соответствуют пучностям напряжения и наоборот. Отношения минимальных и максимальных амплитуд напряжения и тока равны

$$\frac{U_{\min}}{U_{\max}} = K_{BB}, \quad \frac{J_{\min}}{J_{\max}} = K_{BB}. \quad (50)$$

Распределение амплитуд напряжения и тока от координаты  $x'$  показано на рис. 14а,б для случая  $K_{BB} = 0,5$ .

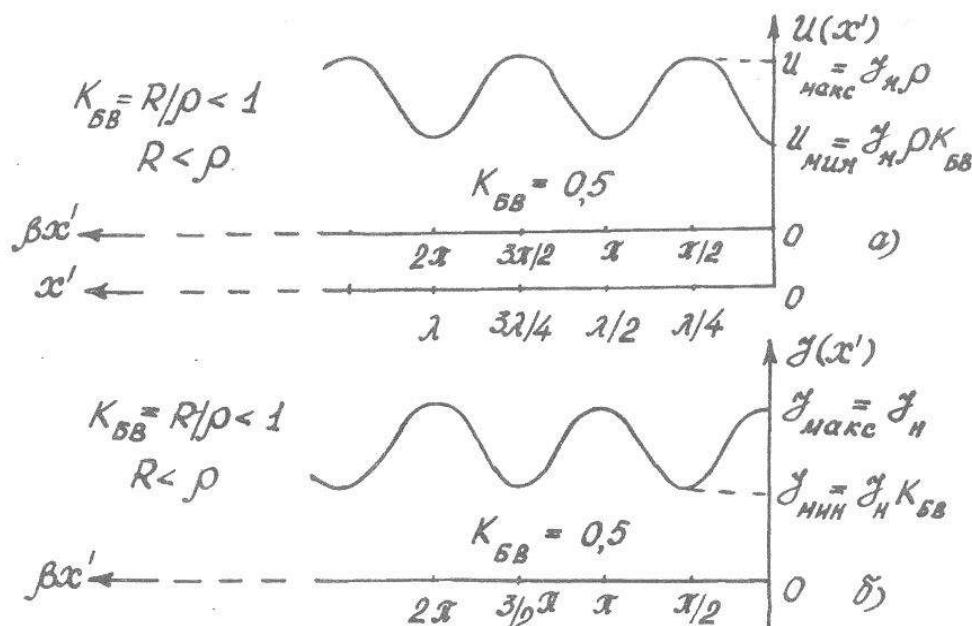


Рис. 14

Пусть теперь активное сопротивление нагрузки  $R$  больше волнового сопротивления линии, т. е.  $R > \rho$ . Снова обозначив

$$K_{BB} = \frac{\rho}{R}, \quad (K_{BB} < 1), \quad (51)$$

запишем выражения для амплитуд напряжения и тока в линии

$$u(x') = E_H (\cos \beta x' + j K_{BB} \sin \beta x'),$$

$$J(x') = \frac{E_H}{\rho} (K_{BB} \cos \beta x' + j \sin \beta x'). \quad (52)$$

Мгновенное значение напряжения в произвольном сечении  $x'$  линии

$$u(x, t) = \operatorname{Re} [E_H (\cos \beta x' + j K_{BB} \sin \beta x') e^{j\omega t}] =$$

$$= E_H K_{BB} \cos(\beta x' + \omega t) + E_H (1 - K_{BB}) \cos \beta x' \cos \omega t.$$

Первое слагаемое в этом соотношении описывает бегущую волну напряжения, а второе — стоячую волну. Таким образом, в линии имеются как бегущие, так и стоячие волны напряжения и тока. Для построения зависимостей  $u(x')$  и  $J(x')$  вычислим модуль выражений (52). Тогда получим

$$|u(x')| = E_H \sqrt{\left( \cos^2 \beta x' + K_{BB}^2 \sin^2 \beta x' \right)},$$

$$|J(x')| = \frac{E_H}{\rho} \sqrt{\left( K_{BB}^2 \cos^2 \beta x' + \sin^2 \beta x' \right)}.$$

Графики зависимостей  $|u(x')|$  и  $|J(x')|$ , построенные по этим формулам для  $K_{BB} = 0,5$ , показаны на рис. 15а,б.

Сравним соответствующие графики, построенные для случаев  $R > \rho$  и  $R < \rho$ . При  $R < \rho$  первый минимум напряжения отстоит от конца линии на расстоянии  $x' = \lambda/2$ , а при  $R > \rho$  — на расстоянии  $x' = \lambda/4$ .

Эти два свойства используют для определения величины активного сопротивления, являющегося нагрузкой линии, по расстоянию первого узла напряжения от конца линии и коэффициенту бегущей волны  $K_{BB}$ .

Так, если первый минимум напряжения отстоит от конца линии на

$$\text{расстоянии } x' = \lambda/4, \text{ то имеем } R > \rho, \text{ а величина } R = \frac{\rho}{K_{BB}}.$$

Установим теперь связь между коэффициентами  $\Gamma_u$  и  $K_{BB}$ . При нагрузке линии на активное сопротивление  $R \neq \rho$  коэффициент отражения по напряжению  $\Gamma_u = \frac{R - \rho}{R + \rho}$ , причем при  $R > \rho$   $0 < \Gamma_u \leq 1$ , а при  $R < \rho$  имеем  $-1 \leq \Gamma_u < 0$ .

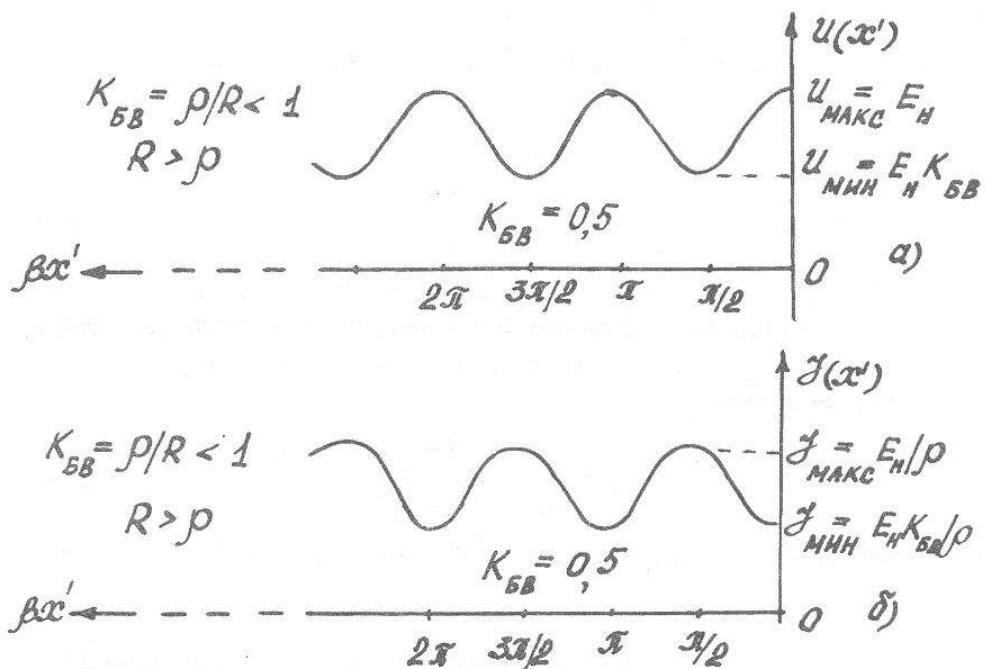


Рис. 15

Таким образом, при любом  $R$  коэффициент  $|\Gamma_u| < 1$ , т.е. имеем неполное отражение, когда амплитуда отраженной волны меньше, чем амплитуда прямой волны. При наложении прямой и отраженной волн амплитуда напряжения (или тока) в узлах не равна нулю (рис. 14 и рис. 15). Наименьшая амплитуда равна разности амплитуд прямой и отраженной волн, а амплитуда в пучности равна сумме амплитуд прямой и отраженной волн

$$|E_{\min}| = |E_n| - |E_0|,$$

$$|E_{\max}| = |E_n| + |E_0|.$$

Разделив первое соотношение на второе, получим

$$\frac{|E_{\min}|}{|E_{\max}|} = \frac{|E_n| - |E_0|}{|E_n| + |E_0|} = K_{BB}.$$

Поскольку  $|\Gamma_u| = \frac{|E_0|}{|E_n|}$ , то последнее соотношение можно записать в виде

$$K_{BB} = \frac{1 - |\Gamma_u|}{1 + |\Gamma_u|}. \quad (53)$$

Коэффициент бегущей волны  $K_{BB}$  легко определяется экспериментально путем измерения напряжений в узле (точнее, в точках минимума напряжения) и в пучности. В технике почти всегда используют коэффициент стоячей волны

$$K_{CB} = \frac{1}{K_{BB}} = \frac{1 + |\Gamma_u|}{1 - |\Gamma_u|}. \quad (54)$$

Из этой формулы следует, что  $K_{CB}$  не может быть меньше единицы.

## 1.10. Вторичные параметры линии

Погонные параметры линии  $L_0$ ,  $C_0$ ,  $G_0$  и  $R_0$  называют еще первичными параметрами. Вторичными параметрами линии являются коэффициент затухания  $\alpha$ , коэффициент фазы  $\beta$  и волновое сопротивление  $\rho$ ; вторичные параметры связаны с первичными соотношениями (6) и (10). Запишем выражение (6) для  $\gamma$  в виде

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + j\omega(L_0 G_0 + R_0 C_0)} = \\ &= j\omega \sqrt{L_0 C_0} \cdot \sqrt{1 - \frac{R_0}{\omega L_0} \cdot \frac{G_0}{\omega C_0} - j \left( \frac{G_0}{\omega C_0} + \frac{R_0}{\omega L_0} \right)}. \end{aligned}$$

Начиная примерно с частоты  $f = 1$  МГц, справедливы неравенства

$$\frac{\omega L_0}{R_0} \gg 1, \quad \frac{\omega C_0}{G_0} \gg 1.$$

Первое неравенство справедливо потому, что индуктивное сопротивление  $\omega L_0$  прямо пропорционально частоте, а погонное сопротивле-

ние  $R_0$  линии пропорционально  $\sqrt{\omega}$  (вследствие скин-эффекта). Второе неравенство обусловлено тем, что погонная проводимость  $G_0$  обычно ничтожно мала.

При выполнении указанных неравенств вторым членом  $\frac{R_0}{\omega L_0} \cdot \frac{G_0}{\omega C_0}$  под знаком радикала можно сразу пренебречь по сравнению с единицей. Разложим радикал по формуле Ньютона ( $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ ), сохранив лишь члены не выше первого порядка малости. Это дает

$$\begin{aligned}\gamma &\approx j\omega \sqrt{L_0 C_0} \left[ 1 - \frac{1}{2} j \left( \frac{G_0}{\omega C_0} + \frac{R_0}{\omega L_0} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} G_0 \rho + \frac{1}{2} R_0 \cdot \frac{1}{\rho} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta.\end{aligned}$$

Как видно из этого выражения, мнимая часть постоянной распространения, как и в линии без потерь, остается в первом приближении равной  $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ , т. е. имеем дело с волнами, распространяющимися с той же скоростью  $V_\Phi = \sqrt{\frac{1}{L_0 C_0}}$ . вещественная часть постоянной распространения

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( G_0 \rho + \frac{R_0}{\rho} \right)$$

выражает затухание на единицу длины линии. Обычно первое слагаемое в последней формуле много меньше второго, поэтому

$$\alpha = \frac{R_0}{2\rho}. \quad (55)$$

Коэффициент затухания  $\alpha$  зависит от частоты, поскольку погонное сопротивление  $R_0$  зависит от частоты.

Рассмотрим формулу (10) для волнового сопротивления линии. В общем случае  $\rho$  зависит от частоты. В линии без потерь ( $G_0 = 0, R_0 = 0$ )

волновое сопротивление  $\rho = \sqrt{L_0/C_0}$  — величина чисто активная. Как

следует из этой формулы, для определения  $\rho$  необходимо знать погонные параметры  $L_0$  и  $C_0$ . Воспользуемся тем, что погонные реактивные параметры в линии связаны соотношением  $L_0 C_0 = \frac{\epsilon \mu}{c^2}$ . Подставим

$L_0 = \frac{\epsilon \mu}{C_0 c^2}$  в формулу для  $\rho$  и получим

$$\rho = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{c C_0}. \quad (56)$$

Это соотношение справедливо для любых типов линий передач с Т-волной и позволяет определить  $\rho$ , располагая лишь значением погонной емкости  $C_0$ .

В высокочастотной технике широко используются коаксиальные линии и коаксиальные кабели (фидеры). Найдем выражение для волнового сопротивления коаксиальной линии, считая, что пространство между проводниками заполнено материалом с диэлектрической постоянной  $\epsilon$  и  $\mu = 1$ . В электростатике доказывается, что погонная емкость коаксиальной линии выражается формулой

$$C_0 = \frac{24,1\epsilon}{\lg D/d} \left[ \frac{n\Phi}{m} \right], \quad (57)$$

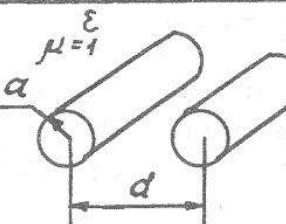
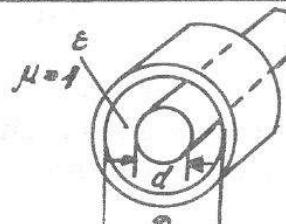
Подставив в (56)  $\mu = 1$  и  $C_0$  из (57), получим

$$\rho = \frac{\sqrt{\epsilon}}{c C_0} = \frac{\sqrt{\epsilon} \lg D/d}{3 \cdot 10^8 \cdot 24,1 \cdot \epsilon \cdot 10^{-12}} = \frac{138}{\sqrt{\epsilon}} \lg D/d = \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \ln D/d. \quad (58)$$

Стандартный коаксиальный кабель типа РК-1 выполнен из гибкой трубы в виде металлической оплетки с внутренним диаметром  $D = 4,60$  мм и коаксиальной металлической жилы диаметром  $d = 0,68$  мм; пространство между внутренним и внешним проводниками заполнено полиэтиленом с диэлектрической постоянной  $\epsilon = 2,2$ . Кабель РК-1 имеет  $\rho = 75$  Ом.

В таблице 1 приведены параметры фидеров, выполненных из меди. Данные этой таблицы полезны при решении задач, приводимых в разделе III.

Таблица 1  
Параметры фидеров, выполненных из меди

Параметр		
Погонная емкость $C_o, \frac{\text{лФ}}{\text{М}}$	$C_o = \frac{12,1 \cdot \epsilon}{\lg d/a}$	$C_o = \frac{24,1 \cdot \epsilon}{\lg R/d}$
Погонная индуктивн. $L_o, \frac{\text{МКГн}}{\text{М}}$	$L_o = 0,92 \lg d/a$	$L_o = 0,46 \lg R/d$
Погонное сопротивл. $R_o, \frac{\Omega\text{м}}{\text{М}}$	$R_o = \frac{1,44}{a \sqrt{\lambda_M}}$	$R_o = \frac{0,72}{\sqrt{\lambda_M}} \left( \frac{2}{R} + \frac{2}{d} \right)$
Волновое сопротивл. $\rho, \Omega\text{м}$	$\rho = \frac{276}{\sqrt{\epsilon}} \lg \frac{d}{a}$	$\rho = \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \ln \frac{R}{d} - \frac{138}{\sqrt{\epsilon}} \lg \frac{R}{d}$

Определим соотношение диаметров проводников коаксиальной линии, оптимальное с точки зрения обеспечения минимального затухания. Если внутренний и наружный проводники коаксиальной линии выполнены из одного и того же материала, то затухание  $\alpha$  определим по формуле

$$\alpha = \frac{R_0}{2\rho} = \frac{R_{0H} + R_{0B}}{2\rho},$$

где  $R_{0H}$  и  $R_{0B}$  — погонные сопротивления токам высокой частоты соответственно наружного и внутреннего проводников линии. Если коаксиальная линия выполнена из меди, то, как следует из таблицы 1,

$$R_{0H} = \frac{1,44}{D(\text{мм})\sqrt{\lambda(\text{м})}} \left[ \frac{\text{Ом}}{\text{м}} \right],$$

$$R_{0B} = \frac{1,44}{d(\text{мм})\sqrt{\lambda(\text{м})}} \left[ \frac{\text{Ом}}{\text{м}} \right],$$

где  $\lambda$  — рабочая длина волны. Подставив последние два соотношения в формулу для  $\alpha$  с учетом (58), получим

$$\alpha = K \cdot F\left(\frac{D}{d}\right),$$

$$\text{где } K = \frac{1,44}{120D\sqrt{\lambda}}, \quad F\left(\frac{D}{d}\right) = \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln D/d}.$$

Пусть диаметр  $D$  наружного проводника коаксиальной линии и рабочая длина волны  $\lambda$  заданы, т. е. полагаем  $K = \text{const}$ . График зависимости  $F(D/d)$  показан на рис. 16.

Как следует из графика, функция  $F(D/d)$  имеет минимальное значение при  $D/d = 3,6$ . Следовательно, при заданном диаметре наружного проводника  $D$  и при  $D/d = 3,6$  коаксиальная линия имеет минимальный коэффициент затухания  $\alpha$ . Подставив в формулу (58)  $D/d = 3,6$ , получим

$$\rho = \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \ln 3,6 = \frac{77}{\sqrt{\epsilon}} \text{ Ом}.$$

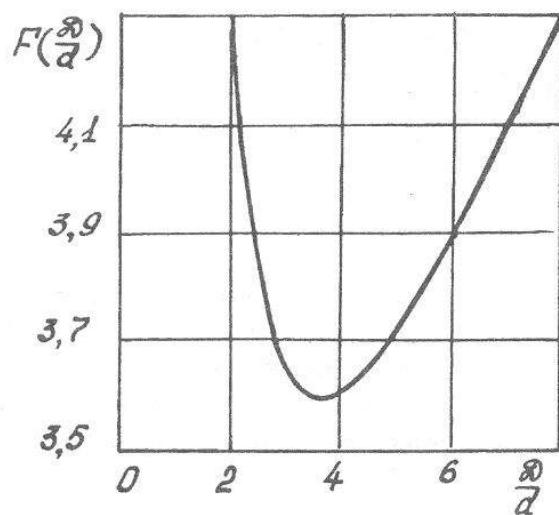


Рис. 16

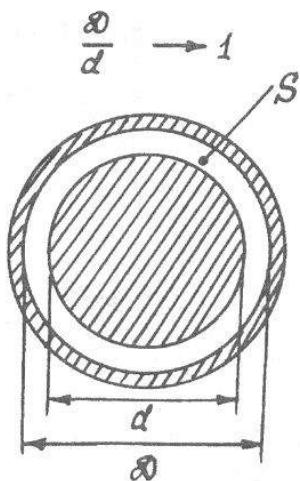


Рис. 17

Если  $\epsilon = 2,2$  (полиэтиленовая изоляция), то

$$\rho = \frac{77}{\sqrt{2,2}} = 50 \text{ } \Omega\text{m.}$$

Физическая причина существования оптимального соотношения  $D/d$  состоит в следующем. При чрезмерном сокращении диаметра  $d$  внутреннего проводника потери в нем возрастают вследствие увеличения плотности тока. Если же  $D/d \rightarrow 1$ , то погонные потери также растут из-за сокращения площади  $S$  той части поперечного сечения коаксиальной линии, по которой переносится электромагнитная энергия (рис. 17).

## РАЗДЕЛ II

# ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНИЙ С Т-ВОЛНОЙ В ТЕХНИКЕ СВЧ

Из рассмотрения свойств линий передачи с Т-волной следует, что в зависимости от характера нагрузки и соотношения между длиной линии и длиной волны линия обладает разными свойствами. Этим объясняется универсальность применений линий. Рассмотрим применение линий для согласования источника колебаний с нагрузкой и в качестве колебательных систем СВЧ.

## 2.1. Применение линий для согласования

Одной из основных проблем радиотехники является проблема согласования, т. е. создания режима, наиболее близкого к режиму бегущей волны. В этом режиме достигается максимальный КПД, наибольшая величина мощности, передаваемой от генератора в нагрузку.

Рассмотрим самый простой случай согласования на одной рабочей частоте, когда используются шлейфы — дополнительные отрезки линий, включаемые в основную линию передачи, а также четвертьволновые трансформаторы. Рассмотрим два примера.

**Пример 1.** Линию без потерь с волновым сопротивлением  $\rho = 50 \text{ Ом}$  требуется согласовать с резистивной нагрузкой  $Z_H = 75 \text{ Ом}$  с помощью короткозамкнутого шлейфа, имеющего такое же волновое сопротивление, как и линия (рис. 18). Определить минимальную длину шлейфа  $l_{Ш}$  и место его включения  $l'$ , если рабочая частота  $f = 1 \text{ ГГц}$ .

Обозначим через  $Z'$  входное сопротивление линии длиной  $l'$  с волновым сопротивлением  $\rho$ , а через  $Z_{Ш}$  — входное сопротивление короткозамкнутого на конце шлейфа. Тогда приходим к эквивалентной схеме на рис. 19. Величины  $Z_{Ш}$  и  $Z'$  определим по формулам

$$Z' = \frac{Z_H + j\rho \operatorname{tg} \beta l'}{\frac{j}{\rho} Z_H \operatorname{tg} \beta l' + 1} = Z_H \frac{1 + jm \operatorname{tg} \beta l'}{1 + j \frac{1}{m} \operatorname{tg} \beta l'},$$

где  $m = \frac{\rho}{Z_H}$ ,  $Z_W = j\rho \operatorname{tg} \beta l_W$ .

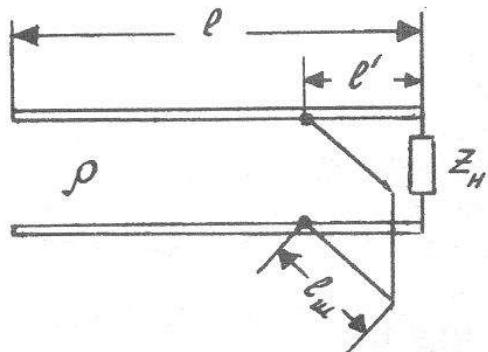


Рис. 18

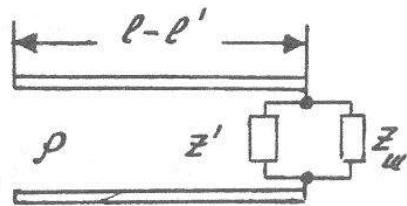


Рис. 19

Для упрощения расчетов введем проводимости

$$Y' = \frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_H} \cdot \frac{1 + j \frac{1}{m} \operatorname{tg} \beta l'}{1 + jm \operatorname{tg} \beta l'} = G' + jB',$$

$$G' = \frac{1}{Z_H} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta l'}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \beta l'},$$

$$B' = \frac{1}{Z_H} \cdot \frac{\left(\frac{1}{m} - m\right) \operatorname{tg} \beta l'}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \beta l'},$$

$$Y = \frac{1}{Z_W} = -jB,$$

$$B = \frac{1}{\rho \cdot \operatorname{tg}^2 \beta l'}.$$

Поскольку линия длиной  $(l - l')$  (рис. 19) должна быть согласована по условию задачи, то ее суммарное нагружочное сопротивление  $\frac{Z'Z_W}{(Z' + Z_W)}$  должно быть равно волновому сопротивлению линии  $\rho$ ,

$$\rho = \frac{Z'Z_W}{(Z' + Z_W)}$$

или

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{Z'} + \frac{1}{Z_W} = G' + jB' - jB.$$

Приравнивая действительные и мнимые части в последнем соотношении, получим

$$\frac{1}{\rho} = G' = \frac{1}{Z_H} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta l'}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \beta l'}, \quad (59)$$

$jB' - jB = 0$  или  $B' = B$ , откуда

$$\frac{1}{\rho \operatorname{tg} \beta l_W} = \frac{1}{Z_H} \cdot \frac{\left(\frac{1}{m} - m\right) \operatorname{tg} \beta l'}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \beta l'}. \quad (60)$$

Из соотношения (59) получим с учетом  $\frac{\rho}{Z_H} = m$ .

$$1 = m \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta l'}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 \beta l'},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \beta l' = \pm \sqrt{\frac{1}{m}},$$

$$l' = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left( \pm \sqrt{\frac{1}{m}} \right). \quad (61)$$

Подставив  $\operatorname{tg} \beta l' = \pm \sqrt{\frac{1}{m}}$  в (60), получим

$$l_{ш} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\pm \sqrt{Z_H \rho}}{Z_H - \rho}. \quad (62)$$

Выражения (61) и (62) содержат многозначные круговые функции. Это приводит к многозначности величин  $l'$  и  $l_{ш}$ . При расчете выбираем наименьшее значение  $l_{ш}$ , что обеспечивает наименьшие размеры согласующего устройства. Подставив в (62) числовые значения, получим с

$$\text{учетом значения } \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,3m} = 21 \frac{\text{рад}}{m}$$

$$l_{ш} = \frac{1}{21} \operatorname{arctg} \left( \frac{\pm \sqrt{75 \cdot 50}}{75 - 50} \right) \approx 5,5 \text{ см}.$$

Теперь находим

$$l' = \frac{1}{21} \operatorname{arctg} \left( \pm \sqrt{\frac{75}{50}} \right) \approx 4,7 \text{ см}.$$

При определении  $l_{ш}$  и  $l'$  принят знак "плюс", когда эти величины минимальны.

**Пример 2.** Линию с волновым сопротивлением  $\rho = 500 \Omega$  требуется согласовать с нагрузкой  $R_H = 5\rho$  с помощью четвертьволнового трансформатора (рис. 20). Определить волновое сопротивление  $\rho_1$  трансформатора так, чтобы в точках  $a-a$  соединения линии с трансформатором не было отражения. Полагая, что напряжение на нагрузке  $u_H = 10V$ , рабочая частота  $f = 10^8 \text{ Гц}$ , вычислить напряжение и ток в начале трансфор-

матора (сечение  $a-a$ ) и в начале линии  $u(l)$ . Построить графики распределения напряжения и тока вдоль линии и вдоль трансформатора.

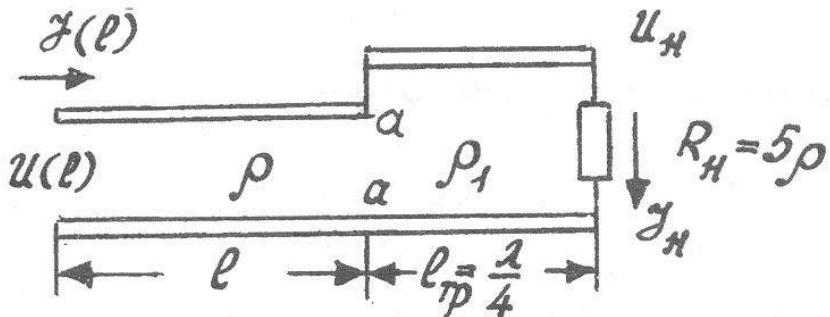


Рис. 20

*Решение:* Определим волновое сопротивление  $\rho_1$  четвертьволнового трансформатора. Находим входное сопротивление отрезка линии длиной  $l_{TP} = \lambda/4$ , нагруженного сопротивлением  $R_H$

$$Z_{ex} = \frac{R_H + j\rho_1 \operatorname{tg} \frac{2\pi l_{TP}}{\lambda}}{1 + j \frac{R_H}{\rho_1} \operatorname{tg} \frac{2\pi l_{TP}}{\lambda}} = \frac{\rho_1^2}{R_H}.$$

Здесь учтено, что  $\operatorname{tg} \frac{2\pi l_{TP}}{\lambda} = \operatorname{tg} \frac{2\pi \lambda}{4\lambda} = \infty$ . Чтобы в месте соединения линии с трансформатором (сечение  $a-a$ ) не было отражений, необходимо выполнить условие согласования  $Z_{ex} = \rho = \frac{\rho_1^2}{R_H}$ .

Отсюда находим волновое сопротивление трансформатора

$$\rho_1 = \sqrt{\rho R_H}. \quad (63)$$

Физический смысл процесса согласования с помощью четвертьволнового трансформатора состоит в том, что волны, отраженные от начала трансформатора (сечение  $a-a$ ), компенсируются волнами, отраженными от нагрузки  $R_H$ . Так как длина трансформатора равна  $\lambda/4$ , то волны, от-

раженные от начала и конца трансформатора, сдвинуты по фазе на угол  $\beta = 2\pi/2 = \pi$ , а выбор волнового сопротивления из соотношения (63) обеспечивает равенство амплитуд этих волн.

Подставив в (63) числовые значения, получим

$$\rho_1 = \sqrt{\rho_0 \rho} = \rho \sqrt{5} = 1120 \text{ } O\text{m}.$$

Вычислим напряжение  $u_{a-a}$  и ток  $J_{a-a}$  в начале трансформатора (сечение  $a-a$ ) и в начале линии  $u(l)$  и  $J(l)$ , используя выражения

$$u_{a-a} = u_H \cos \beta l_{TP} + j\rho_1 J_H \sin \beta l_{TP},$$

$$J_{a-a} = \frac{j}{\rho_1} u_H \sin \beta l_{TP} + J_H \cos \beta l_{TP}.$$

Поскольку  $\cos \beta l_{TP} = \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = 0$ ,  $\sin \beta l_{TP} = 1$ , то

$$u_{a-a} = j\rho_1 J_H = j\rho_1 \frac{u_H}{R_H}, \quad J_{a-a} = j \frac{u_H}{\rho_1},$$

откуда

$$|u_{a-a}| = \rho_1 \frac{u_H}{R_H} = 1120 \frac{10}{2500} = 4,5 \text{ } B,$$

$$|J_{a-a}| = \frac{u_H}{\rho_1} = \frac{10}{1120} = 9 \text{ } mA.$$

Поскольку линия с длиной  $l$  согласована с нагрузкой, то в ней распространяется бегущая волна напряжения и тока, поэтому в любом сечении линии амплитуды напряжения и тока имеют одинаковые значения, т.е.

$$u(l) = u_{a-a} = 4,5 \text{ } B, \quad J_l = J_{a-a} = 9 \text{ } mA.$$

Найдем распределение амплитуд напряжения и тока вдоль четвертьволнового трансформатора: имеем линию с длиной  $l_{TP} = \lambda/4$ , нагружен-

ную на сопротивление нагрузки  $R_H = 5\rho = 2500$  Ом, больше волнового сопротивления трансформатора  $\rho_1 = 1120$  Ом. Для такой линии распределение амплитуд напряжения и тока известно (рис. 15). Распределение амплитуд напряжения и тока вдоль всей системы представлено на рис. 21:

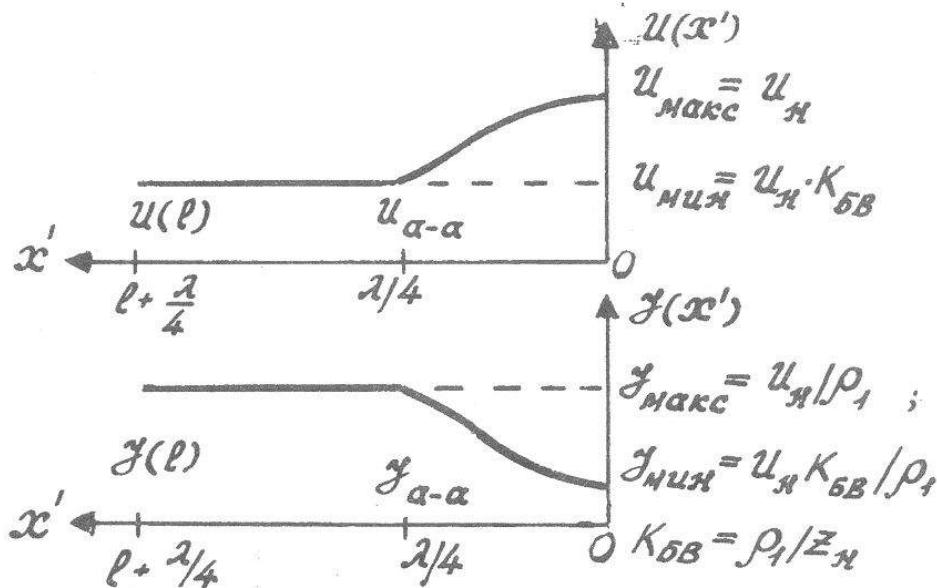


Рис. 21

здесь

$$U_{\max} = U_H = 10 \text{ В},$$

$$J_{\min} = \frac{U_H}{\rho_1} K_{BB} = \frac{U_H}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_1}{R_H} = \frac{U_H}{R_H} = \frac{10}{2500} = 4 \text{ мА}.$$

Из изложенного следует, что применение шлейфов и четвертьвольновых трансформаторов позволяет получить точное согласование только на фиксированной рабочей частоте, т. к. при изменении частоты изменится электрическая длина шлейфа (или трансформатора), что приведет к изменению входного сопротивления, т. е. согласование нарушится.

## 2.2. Применение линий в качестве колебательных систем СВЧ

### 2.2.1. Условие резонанса в к. з. линии

Рассмотрим применение короткозамкнутых на конце отрезков линий для построения колебательных систем СВЧ. Отрезки разомкнутых на конце линий для этой цели используются реже.

Пусть к. з. линия имеет воздушное заполнение ( $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ). Тогда

электрическая длина отрезка линии  $\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{\omega l}{c}$ . Входное сопротивление к. з. отрезка выражается формулой

$$Z_{ex} = j\rho \operatorname{tg} \beta l.$$

Параллельный резонанс в линии (резонанс токов) получим при

$$Z_{ex} = j\rho \operatorname{tg} \beta l = \infty,$$

т.е. при  $\beta l = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Если к. з. линия имеет фиксированную длину  $l$ , то она имеет бесчисленное множество частот параллельного резонанса  $\omega_{pn}$  (длин волн  $\lambda_{pn}$ ), определяемых из выражений

$$\omega_{pn} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \cdot \frac{c}{l}, \quad \lambda_{pn} = \frac{4l}{2n+1}. \quad (64)$$

При  $n = 0$  имеем  $\omega_{p0} = \frac{\pi c}{2l}$  ( $\lambda_{p0} = 4l$ ).

Частоту параллельного резонанса  $\omega_{p0}$  называют основным (нижним) тоном колебаний, а соответствующий колебательный контур — СВЧ-четвертьволновым резонатором.

При  $n = 1$  имеем  $\omega_{p1} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{c}{l}$  ( $\lambda_{p1} = \frac{4}{3}l$ );

при  $n = 2$  имеем  $\omega_{p2} = \frac{5\pi}{2} \cdot \frac{c}{l}$  ( $\lambda_{p2} = \frac{4}{5}l$ );

при  $n = 3$  имеем  $\omega_{p3} = \frac{7\pi}{2} \cdot \frac{c}{l}$  ( $\lambda_{p3} = \frac{4}{7}l$ ) и т.д.

Частоты параллельного резонанса  $\omega_{p1}, \omega_{p2}, \omega_{p3}, \dots, \omega_{pn}$  называют частотами первого обертона, второго обертона и т.д. Частоты параллельного резонанса относятся между собой как ряд нечетных чисел

$$\omega_{p0} : \omega_{p1} : \omega_{p2} : \omega_{p3} \dots = 1 : 3 : 5 \dots$$

Последовательный резонанс в к.з. линии (резонанс напряжений) получим, когда  $Z_{ex} = j\rho \operatorname{tg} \beta l = 0$ , т.е. при  $(\beta l)_{nosl} = n\pi, n = 1, 2, \dots$ . Частоты (длины волн) последовательного резонанса в к.з. линии находим из выражений

$$\omega_{n nosl} = n\pi \frac{c}{l}, \quad \lambda_{n nosl} = \frac{2l}{n}. \quad (65)$$

Частоты последовательного резонанса относятся между собой как ряд натуральных целых чисел

$$\omega_{0 nosl} : \omega_{1 nosl} : \omega_{2 nosl} \dots = 1 : 2 : 3 : \dots$$

Распределение амплитуд тока и напряжения вдоль к.з. линии фиксированной длины  $l = \text{const}$  на разных частотах параллельного резонанса показано на рис. 22 а-г.

Итак, при  $l = \text{const}$  линия теоретически обладает бесчисленным множеством собственных резонансных частот параллельного резонанса. Это свойство отличается от свойства простого сосредоточенного колебательного контура, имеющего лишь одну собственную резонансную частоту. Далее, говоря о резонансе в распределенной линии, будем иметь в виду параллельный резонанс (резонанс токов), ибо последовательный резонанс значительно реже используется на практике.

Пусть теперь собственная резонансная длина волны  $\lambda_0$  фиксирована ( $\lambda_0 = \text{const}$ ), а длина короткозамкнутой на конце линии изменяется.

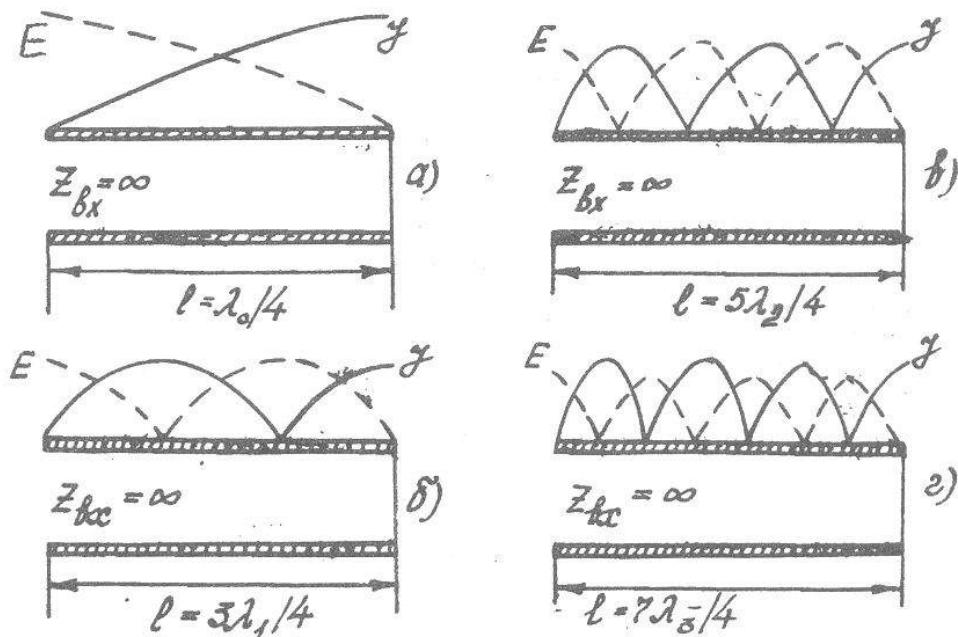


Рис. 22

Рассмотрим выражение для входного сопротивления линии

$$Z_{ex} = j\rho \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda_0}.$$

Очевидно, входное сопротивление линии не изменится, если выражение для  $Z_{ex}$  записать в виде

$$Z_{ex} = j\rho \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi l}{\lambda_0} - n\pi \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Длину волны параллельного резонанса находим из условия  $Z_{ex} = \infty$  или

$$\frac{2\pi l}{\lambda_0} - n\pi = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$l = \frac{\lambda_0}{4} + n \frac{\lambda_0}{2}.$$

Полученная формула говорит о том, что отрезок короткозамкнутой на конце линии, имеющий собственную длину волны  $\lambda_0$ , можно удли-

нять на целое число полуволн; от этого резонансная длина волны не изменится. Этим приемом пользуются на практике, когда, например, размеры резонатора на низшем тоне колебаний оказываются слишком малыми.

### 2.2.2. Резонансное сопротивление и добротность неперестраиваемого резонатора

Для определения этих параметров необходимо учитывать потери в проводниках отрезка короткозамкнутой на конце линии, которую используем в качестве колебательной системы СВЧ (или СВЧ-резонатора). С учетом потерь в токонесущих поверхностях входное сопротивление к. з. отрезка линии находим из выражения

$$Z_{ex} = \rho \operatorname{th} \gamma l = \rho \operatorname{th}(\alpha l + j\beta l) = \rho \frac{\operatorname{th} \alpha l + \operatorname{th} j\beta l}{1 - \operatorname{th} \alpha l \operatorname{th} j\beta l}.$$

Обычно потери в коротких отрезках линий, используемых для построения резонаторов, малы, т. е.  $\alpha l \ll 1$ . Поэтому можно положить  $\operatorname{th} \alpha l \approx \alpha l$  и записать выражение для  $Z_{ex}$  с учетом  $\operatorname{th} j\beta l = j \operatorname{tg} \beta l$  в виде

$$Z_{ex} \approx \rho \frac{\alpha l + j \operatorname{tg} \beta l}{1 - \alpha l j \operatorname{tg} \beta l} = R_A + jX_P,$$

где

$$R_A = \frac{\alpha l \rho (1 + \operatorname{tg}^2 \beta l)}{1 + (\alpha l)^2 \operatorname{tg}^2 \beta l}, \quad (66)$$

$$X_P = \rho \frac{\operatorname{tg} \beta l [1 - (\alpha l)^2]}{1 + (\alpha l)^2 \operatorname{tg}^2 \beta l}. \quad (67)$$

Модуль входного сопротивления

$$|Z_{ex}| = \sqrt{R_A^2 + X_P^2} = \rho \sqrt{\frac{(\alpha l)^2 + \operatorname{tg}^2 \beta l}{1 + (\alpha l)^2 \operatorname{tg}^2 \beta l}}. \quad (68)$$

Рассмотрим поведение  $|Z_{ex}|$  на частотах параллельного и последовательного резонансов. Частоты параллельного резонанса определяются

из условия  $\beta l = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; при этом  $\operatorname{tg}\beta l = \infty$  и модуль входного сопротивления

$$R_p = |Z_{ex}|_{nap} = \frac{\rho}{\alpha l}. \quad (69)$$

Подставив сюда  $\alpha = \frac{R_0}{2\rho}$ , получим

$$R_p = |Z_{ex}|_{nap} = \frac{\rho^2}{R_\Sigma}, \quad (70)$$

где  $R_\Sigma = R_0 \frac{l}{2}$  — суммарное сопротивление потерь. Заметим, что полученное выражение (70) для резонансного сопротивления по форме отличается от выражения для резонансного сопротивления  $R_{oe} = \frac{\rho^2}{r}$  простого параллельного контура с сосредоточенными параметрами тем, что вместо полного сопротивления потерь  $r$  сосредоточенного контура в рассматриваемом случае фигурирует половина полного сопротивления потерь линии. Это различие объясняется неравномерным распределением амплитуды тока по длине линии при работе в режиме стоячей волны (рис. 9в).

Выражение (70) показывает, что резонансное сопротивление СВЧ резонатора на частотах параллельного резонанса чисто активно и величина его тем больше, чем меньше затухание  $\alpha$ . Формула (70) справедлива для резонаторов длиной  $l = \frac{\lambda_0}{4}, \frac{3}{4}\lambda_1, \frac{5}{4}\lambda_2, \dots$  и т. д., причем

резонансное сопротивление максимально при  $l = \frac{\lambda_0}{4}$ , поскольку в этом

случае затухание минимально:  $R_0 \sim \sqrt{\omega_0}$ ,  $\omega_0$  — частота основного тона колебаний.

Определим поведение  $|Z_{ex}|$  на частотах последовательного резонанса, т. е. при  $\beta l = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Из (68) следует

$$|Z_{ex}|_{nosl} = \rho \cdot \alpha l = \frac{R_0 l}{2} = R_\Sigma.$$

Чтобы получить выражение для добротности СВЧ неперестраиваемого контура, выполненного на основе короткозамкнутого на конце отрезка линии, рассмотрим поведение  $|Z_{ex}|$  на частотах, близких к частотам параллельного резонанса  $\omega_{par}$ . С учетом выражения (64) представим электрическую длину  $\beta l$  отрезка линии в виде

$$\beta l = \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{(2n+1)}{4} \lambda_{pn} = \frac{\pi}{2} (2n+1) \frac{\lambda_{pn}}{\lambda} = \frac{\pi}{2} (2n+1) \frac{\omega}{\omega_{pn}}.$$

Здесь  $\omega \neq \omega_{pn}$ . Полагаем, что частоты  $\omega$  и  $\omega_{pn}$  отличаются незначительно и можно считать, что  $\omega_{pn} + \Delta\omega = \omega$ , где  $\Delta\omega \ll \omega$ ,  $\omega_{pn}$  — небольшая абсолютная расстройка частоты  $\omega$  относительно собственной резонансной частоты резонатора  $\omega_{pn}$ . Введем относительную расстройку

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\omega_{pn}} \ll 1$$

и запишем  $\beta l$  в виде

$$\beta l = \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) \cdot \frac{\omega}{\omega_{pn}} = \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) (1 + \varepsilon).$$

Представим величину  $\operatorname{tg}\beta l$  в виде

$$\operatorname{tg} \beta l = \operatorname{tg} \left[ \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) (1 + \varepsilon) \right] = - \frac{1}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) \varepsilon}.$$

Если число  $n$  (номер обертона) невелико, например,  $n \leq 5$ , то можно считать при  $\varepsilon \ll 1$ , что аргумент тангенса  $\left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) \varepsilon \ll 1$  и положить

$$\operatorname{tg} \beta l = -\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\epsilon} \approx \frac{-1}{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi\epsilon}. \quad (71)$$

Представим выражение (68) для  $|Z_{ex}|$  на частотах, близких к резонансной, в виде

$$|Z_{ex}| \approx \frac{\rho}{\alpha l} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\alpha l \operatorname{tg} \beta l}\right)^2}}.$$

Подставив сюда вместо  $\operatorname{tg} \beta l$  его выражение из (71), получим с учетом (70)

$$|Z_{ex}| = \frac{R_p}{\sqrt{1 + (n + \frac{1}{2})^2 \left(\frac{\pi}{\alpha l}\right)^2 \epsilon^2}}. \quad (72)$$

Сравним это выражение с формулой для модуля входного сопротивления простого параллельного сосредоточенного LC-контура вблизи частоты параллельного резонанса

$$|Z_{ex}| = \frac{R_{oe}}{\sqrt{1 + (2Q\epsilon)^2}}, \quad (73)$$

где  $R_{oe}$  — резонансное сопротивление,  $Q$  — добротность,

$\epsilon = \frac{\omega - \omega_p}{\omega_p} \ll 1$  — расстройка относительно резонансной частоты. Из

сравнения выражений (72) и (73) следует, что добротность СВЧ резонатора в виде отрезка короткозамкнутой на конце линии можно определить по формуле

$$2Q_p = (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{\alpha l} \quad \text{или} \quad Q_p = (2n + 1) \frac{\pi}{4\alpha l}.$$

Из условия параллельного резонанса находим

$$l = (2n + 1) \frac{\lambda_{pn}}{4};$$

подставив  $l$  в формулу для  $Q_p$ , получим

$$Q_p = \frac{(2n+1)\pi \cdot 4}{4\alpha(2n+1)\lambda_{pn}} = \frac{\pi}{\alpha\lambda_{pn}}.$$

Но  $\alpha = \frac{R_0}{2\rho}$ , поэтому

$$Q_p = \frac{2\pi\rho}{R_0\lambda_{pn}}. \quad (74)$$

Представим выражение (74) иначе. Действительно,  $\lambda_{pn} = \frac{2\pi c}{\omega_{pn}}$ .

Но  $c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ , где  $L_0, C_0$  — погонные параметры линии.

$$\text{Поэтому } \lambda_{pn} = \frac{2\pi c}{\omega_{pn}} = \frac{2\pi}{\omega_{pn}\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Подставив  $\lambda_{pn}$  в формулу (74) с учетом  $\rho = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ , получим

$$Q_p = \frac{\omega_{pn} L_0}{R_0}. \quad (75)$$

Это выражение для добротности резонатора совпадает по форме с известной формулой для добротности колебательного контура с сосредоточенными параметрами. Величина погонных потерь  $R_0$  может быть очень малой, поэтому добротность резонатора из отрезка к. з. линии может достигать значительной величины.

**Рассмотрим пример.** Определим добротность резонатора в виде четвертьволнового отрезка короткозамкнутой на конце коаксиальной линии, выполненной из меди; диаметр внутреннего проводника  $d = 5$  мм, внутренний диаметр наружного проводника  $D = 18$  мм, рабочая длина волны  $\lambda = 60$  см.

По формулам из таблицы 1 находим:  
волновое сопротивление коаксиальной линии

$$\rho = 138 \lg \frac{D}{d} = 138 \lg \frac{18}{5} = 75,9 \text{ Ом},$$

величина погонных потерь

$$R_0 = \frac{0,72}{\sqrt{\lambda(m)}} \left( \frac{2}{D(\text{мм})} + \frac{2}{d(\text{мм})} \right) = 0,47 \frac{\text{Ом}}{\text{м}},$$

По формуле (74) находим добротность резонатора

$$Q_p = \frac{2\pi\rho}{R_0\lambda} = \frac{6,28 \cdot 75,9}{0,47 \cdot 0,6} = 1690.$$

Такая величина добротности недостижима в сосредоточенных контурах, в которых обычно  $Q_{\max} \leq 75 \div 100$ .

### 2.2.3. Конструкция неперестраиваемого резонатора

Рассмотрим один из вариантов конструкции резонатора в виде отрезка короткозамкнутой на конце коаксиальной линии (рис. 23). Наружный проводник 1 резонатора представляет из себя полый металлический цилиндр с внутренним диаметром  $D$  и длиной  $l + \Delta l$ . Внутренний проводник 2 резонатора также выполнен в виде полого цилиндра с наружным диаметром  $d$  и длиной  $l$ . Внутренний проводник 2 конструктивно выполнен как единое целое вместе с короткозамыкателем 3, соединяющим внутренний 2 и наружный 1 проводники резонатора. Контакт наружного и внутреннего проводников осуществляется с помощью заостренной кромки 4 и нескольких винтов 5. Гайка 6 навинчивается на резьбу, выполненную на наружном проводнике резонатора, и вводится в конструкцию с целью обеспечения герметичности. Для связи резонатора с внешней нагрузкой можно использовать либо петлю связи 7, расположенную в пучности тока, или, что то же самое, в пучности магнитного

поля, либо емкостной штырь 8, расположенный в пучности напряжения (пучности электрического поля). Для обеспечения высокой добротности резонатора большое значение имеет надежный контакт в месте соединения наружного и внутреннего проводников; плохой контакт между проводниками может резко уменьшить расчетную добротность резонатора. Немалое значение с точки зрения получения минимума потерь в проводящих металлических поверхностях резонатора имеет чистота механической обработки этих поверхностей.

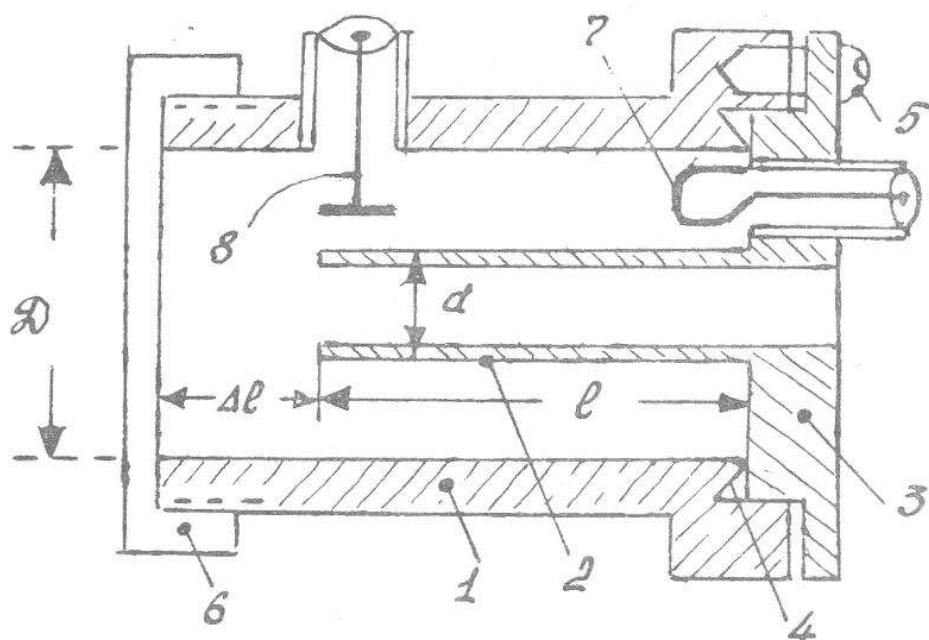


Рис. 23

#### 2.2.4. Резонаторы с емкостной перестройкой частоты

Выше рассмотрены резонаторы, выполненные с использованием короткозамкнутых на конце отрезков линий. Модель резонатора в виде короткозамкнутого на одном конце и разомкнутого на противоположном конце отрезка линии, вообще говоря, является неполной. Действительно, из-за неизбежных искажений силовых линий электрического поля в месте обрыва внутреннего проводника резонатора (рис. 24) появляется продольная составляющая электрического поля. В электродинамике доказано, что искажения электрического поля в месте обрыва

внутреннего проводника можно учесть в эквивалентной схеме резонатора введением на его разомкнутом конце так называемой краевой емкости  $C_0$  (рис. 25), величина которой определяется при использовании коаксиальных линий отношением диаметров проводников  $D$  и  $d$ . Таким образом, краевая емкость  $C_0$  является неотъемлемой частью эквивалентной схемы резонатора. Величина  $C_0$  обычно не превышает долей пикофарады ( $C_{0\max} \leq 0,5 \div 0,6 \text{ пФ}$ ).

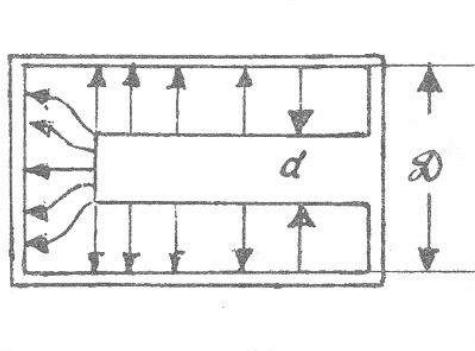


Рис. 24

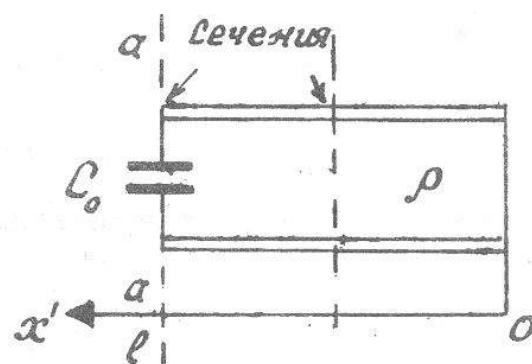


Рис. 25

Влиянием  $C_0$  на резонансную частоту резонатора можно пренебречь, если он используется на достаточно низких частотах — не выше 300 - 400 МГц. На более высоких частотах дециметрового и сантиметрового диапазонов краевая емкость может оказывать заметное влияние на собственную резонансную частоту резонатора. Получим условие резонанса резонатора на рис. 25.

Рассечем рассматриваемый резонатор произвольным сечением, положение которого характеризуется координатой  $x'$ . При этом резонатор распадается на две части: одна часть расположена слева от сечения и имеет входное сопротивление  $Z_l$ , а вторая часть расположена справа от сечения и имеет входное сопротивление  $Z_n$ . Будем считать, что потери в резонаторе отсутствуют. Это предположение оправдано при определении собственных резонансных частот резонатора. Заметим, что такое же предположение обычно делается при определении резонансной частоты простого параллельного контура; учет сопротивления потерь дает поправку на собственную резонансную частоту порядка  $1/Q^2$ , где  $Q$  — добротность контура. При отсутствии потерь входные сопротивления  $Z_l$  и  $Z_n$  будут чисто мнимыми. По аналогии с сосредоточенным параллельным LC-контуром определим условие параллельного резонанса (резо-

нанса токов) в распределенной колебательной системе с Т-волной из условия

$$Z_{\text{з}} + Z_n = 0. \quad (76)$$

Для определения условия резонанса резонатора на рис. 25 сечение *a-a* целесообразно провести в месте включения емкости  $C_0$ . Тогда для резонатора с воздушным заполнением между проводниками

$$Z_{\text{з}} = \frac{1}{j\omega C_0}$$

$$Z_n = j\rho \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c}$$

и уравнение резонанса принимает вид:

$$\frac{1}{\omega C_0} = \rho \operatorname{tg} \frac{\omega l}{c}. \quad (77)$$

Это трансцендентное уравнение. Из уравнения (77) следует, что собственная резонансная частота  $\omega$  зависит от величин трех параметров, т. е.  $\omega = F(\rho, l, C_0)$ . Следовательно, за счет изменения любого из трех параметров  $\rho$ ,  $l$  и  $C_0$  можно изменять резонансную частоту резонатора. На практике используются следующие два способа перестройки частоты резонатора:

- за счет изменения рабочей длины резонатора  $l$ ,
- за счет изменения величины емкости переменного конденсатора  $C$ , включенного на разомкнутом конце резонатора (рис. 26) или в другом произвольном сечении, находящемся на расстоянии  $l_1$  от короткозамыкателя (рис. 27).

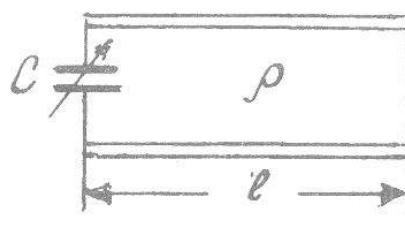


Рис. 26

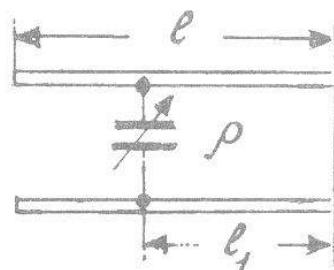


Рис. 27

Запишем уравнение (77) в нормированном виде  $\operatorname{tg}\theta = \frac{\alpha}{\theta}$ , где

$\theta = \frac{\omega l}{c}$  — электрическая длина отрезка линии (величина безразмерная),

$\alpha = \frac{l}{cC\rho}$  — безразмерный параметр.

На рис. 28 показано графическое решение уравнения  $\operatorname{tg}\theta = \frac{\alpha}{\theta}$ .

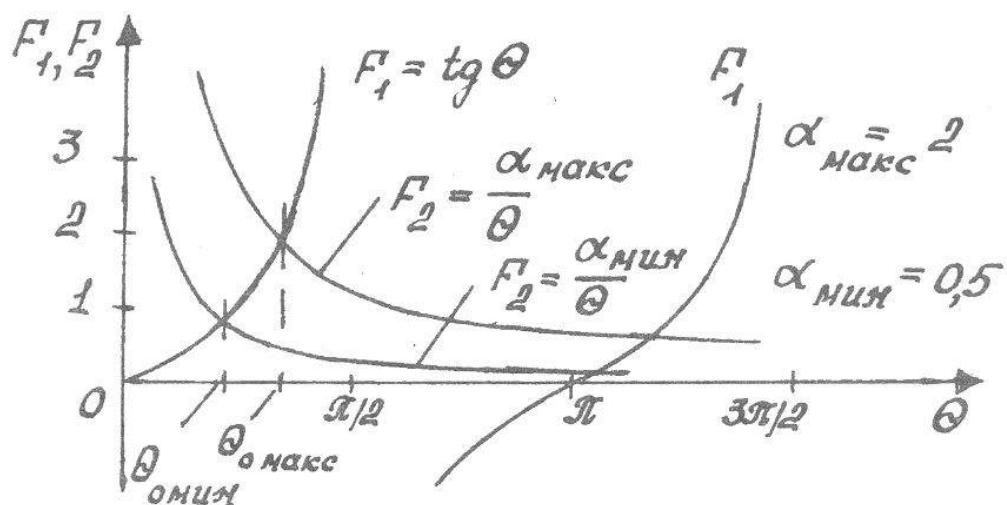


Рис. 28

Корни уравнения соответствуют точкам пересечения тангенсоиды  $F_1 = \operatorname{tg}\theta$  и гиперболоиды  $F_2 = \alpha/\theta$ . Как следует из рис. 28, за счет изменения безразмерного параметра  $\alpha$  от  $\alpha_{\max}$  до  $\alpha_{\min}$  или, что то же самое, за счет изменения емкости переменного конденсатора в пределах от  $C_{\min}$  до  $C_{\max}$  можно получить на основном tone колебаний теоретически любой коэффициент перекрытия по частоте

$$K_f = \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} = \frac{f_{\max}}{f_{\min}};$$

величина  $K_f$  зависит от коэффициента перекрытия конденсатора по емкости  $K_c = \frac{C_{\max}}{C_{\min}}$ : чем больше  $K_c$ , тем больше  $K_f$ .

**Рассмотрим пример.** Имеется резонатор, перестраиваемый конденсатором переменной емкости  $C$  (рис. 26). Требуется рассчитать параметры резонатора — его длину  $l$ , волновое сопротивление  $\rho$  и пределы изменения емкости переменного конденсатора для перекрытия на основном тоне колебаний диапазона частот 300-600 МГц.

Решение задачи начнем с выбора волнового сопротивления отрезка к. з. линии. Из конструктивных соображений, а также для получения минимального затухания  $\alpha$ , при построении колебательных систем СВЧ волновое сопротивление отрезков коаксиальных (или полосковых) линий выбирается в пределах  $\rho = 30-70$  Ом. Пусть  $\rho = 40$  Ом. Выберем длину отрезка линии так, чтобы на основном тоне колебаний, который по условию задачи является рабочим, выполнялось неравенство

$$\theta_{0\max} \leq \frac{\pi}{2} \text{ или } l \leq \frac{\lambda_{\min}}{4} .$$

Это неравенство выполняется, если выбрать  $l = 10$  см: при этом

$$l = 10 \text{ см} < \frac{\lambda_{\min}}{4} = \frac{50}{4} = 12,5 \text{ см} .$$

Находим

$$\theta_{\max} = \frac{2\pi f_{\max} l}{c} = \frac{2\pi \cdot 600 \cdot 10^6 \cdot 0,1}{3 \cdot 10^8} = 1,256 .$$

Тогда

$$\alpha_{\max} = \theta_{\max} \operatorname{tg} \theta_{\max} = 1,256 \cdot \operatorname{tg} 1,256 = 3,85 ,$$

откуда

$$C_{\min} = \frac{l}{c\rho\alpha_{\max}} = \frac{0,1}{3 \cdot 10^8 \cdot 40 \cdot 3,85} \approx 2,1 \text{ пФ} .$$

Находим теперь

$$\theta_{\min} = \frac{2\pi f_{\min} l}{c} = \frac{2\pi \cdot 300 \cdot 10^6 \cdot 0,1}{3 \cdot 10^8} = 0,628 ,$$

$$\alpha_{\min} = \theta_{\min} \operatorname{tg} \theta_{\min} = 0,628 \cdot \operatorname{tg} 0,628 = 0,45,$$

откуда

$$C_{\max} = \frac{l}{c\rho\alpha_{\min}} = \frac{0,1}{3 \cdot 10^8 \cdot 40 \cdot 0,45} \approx 18 \text{ пФ}$$

Итак, получаем резонатор со следующими параметрами:  $l = 10 \text{ см}$ ,  $\rho = 40 \text{ Ом}$ ,  $C_{\min} = 2,1 \text{ пФ}$ ,  $C_{\max} = 18 \text{ пФ}$ , (коэффициент перекрытия конденсатора по емкости  $K_C = \frac{C_{\max}}{C_{\min}} = \frac{18}{2,1} = 8,5$ ).

Существует большое разнообразие конструкций конденсаторов переменной емкости, используемых на практике для перестройки частоты СВЧ резонаторов. Переменные конденсаторы применяют в метровом и дециметровом диапазонах длин волн на частотах не выше 1-1,5 ГГц. Для целей перестройки СВЧ резонаторов широко используются переменные конденсаторы с электрической перестройкой частоты — вариакапы.

### 2.2.5. Ступенчатые резонаторы

На рис. 29а представлен ступенчатый резонатор, образованный соединением двух короткозамкнутых на конце отрезков линий с волновыми сопротивлениями  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и длинами  $l_1$ ,  $l_2$ , а на рис. 29б показана эквивалентная схема резонатора в виде каскадного соединения двух четырехполюсников с матрицами цепных параметров  $[a]_1$  и  $[a]_2$ , где

$$[a]_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta l_1 & j\rho_1 \sin \beta l_1 \\ \frac{1}{\rho_1} j \sin \beta l_1 & \cos \beta l_1 \end{bmatrix}$$

$$[a]_2 = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta l_2 & j\rho_2 \sin \beta l_2 \\ \frac{1}{\rho_2} j \sin \beta l_2 & \cos \beta l_2 \end{bmatrix}$$

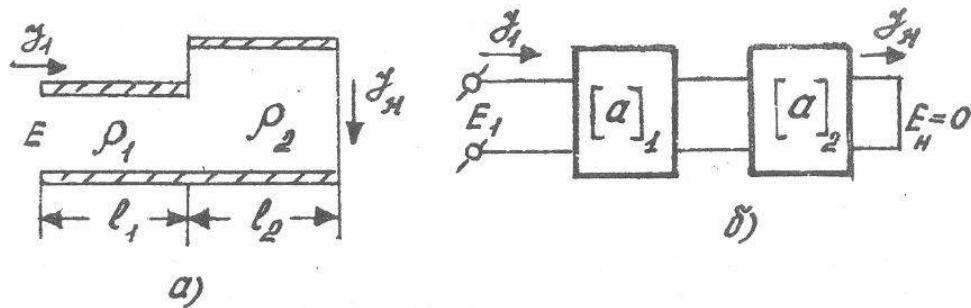


Рис. 29

Получим условие параллельного резонанса в ступенчатом резонаторе. Для этого заменим каскадное соединение двух четырехполюсников одним эквивалентным четырехполюсником с матрицей цепных параметров  $[a]$ . Для получения матрицы  $[a]$  эквивалентного четырехполюсника необходимо, как известно, перемножить матрицы цепных параметров соединяемых четырехполюсников, т.е.

$$\begin{aligned} [a] &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = [a]_1 \times [a]_2 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица  $[a]$  связывает напряжение  $E_1$  и ток  $J_1$  на входе с напряжением  $E_H = 0$  и током  $J_H$  на выходе четырехполюсника

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ J_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_H \\ J_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ J_H \end{bmatrix}.$$

Перемножив матрицы, получим  $E_1 = B J_H$ ,  $J_1 = D J_H$ , откуда входное сопротивление ступенчатой линии без потерь имеет вид:

$$Z_{ax} = \frac{E_1}{J_1} = \frac{B}{D} = \frac{A_1 B_2 + B_1 D_2}{C_1 B_2 + D_1 D_2} = j \rho_1 \frac{\operatorname{tg} \beta l_1 + M \operatorname{tg} \beta l_2}{1 - M \operatorname{tg} \beta l_1 \operatorname{tg} \beta l_2}, \quad (78)$$

где  $M = \frac{\rho_2}{\rho_1}$  — безразмерный параметр нерегулярности, характеризующий перепад волновых сопротивлений в ступенчатой линии.

Пусть длины регулярных отрезков линий равны, т. е.  $l_1 = l_2 = l$ . Тогда выражение (78) принимает вид:

$$Z_{ax} = j\rho_1 \frac{(1+M)\operatorname{tg}\beta l}{1-M\operatorname{tg}^2\beta l}. \quad (79)$$

Нули входного сопротивления (частоты последовательного резонанса) имеют место при  $\operatorname{tg}\beta l = 0$  или  $(\beta l)_{ncl} = n\pi$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а также при  $(\beta l)_{ncl} = (2n+1)\pi/2$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Частоты параллельного резонанса (полюса входного сопротивления) находим из условия равенства нулю знаменателя выражения (79)

$$1 - M \operatorname{tg}^2(\beta l)_{npl} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2(\beta l)_{npl} = \frac{1}{M}. \quad (80)$$

На рис. 30а показано графическое решение трансцендентного уравнения (80). Точки пересечения функции  $\operatorname{tg}^2\beta l$  и прямой  $1/M$  дают корни уравнения (80) — частоты параллельного резонанса. На рис. 30б,в показаны входные сопротивления ступенчатой короткозамкнутой на конце линии для  $M > 1$  (рис. 30б) и  $M < 1$  (рис. 30в). Частоты параллельного резонанса (полюса функции  $Z_{ax}$ ) помечены на этих рисунках крестиками, а частоты последовательного резонанса (нули функции  $Z_{ax}$ ) — кружками. Частоты параллельного и последовательного резонанса в ступенчатой линии без потерь чередуются. В отличие от регулярного короткозамкнутого на конце резонатора, у которого частоты параллельного резонанса относятся между собой как ряд нечетных чисел, в ступенчатом резонаторе с параметром нерегулярности  $M > 1$  это соотношение частот параллельного резонанса нарушается: частоты основного тона колебаний и первого обертона сильно разнесены (рис. 30б). Это свойство обеспечивает хорошую фильтрацию гармонических состав-

ляющих при использовании ступенчатого резонатора в качестве колебательной системы автогенератора или усилителя. На рис. 31а,б показаны варианты конструкций ступенчатого резонатора с использованием отрезков коаксиальных линий. В представленных на рис. 31а,б конструкциях параметр нерегулярности  $M > 1$ , т. е.  $\rho_1 < \rho_2$ .

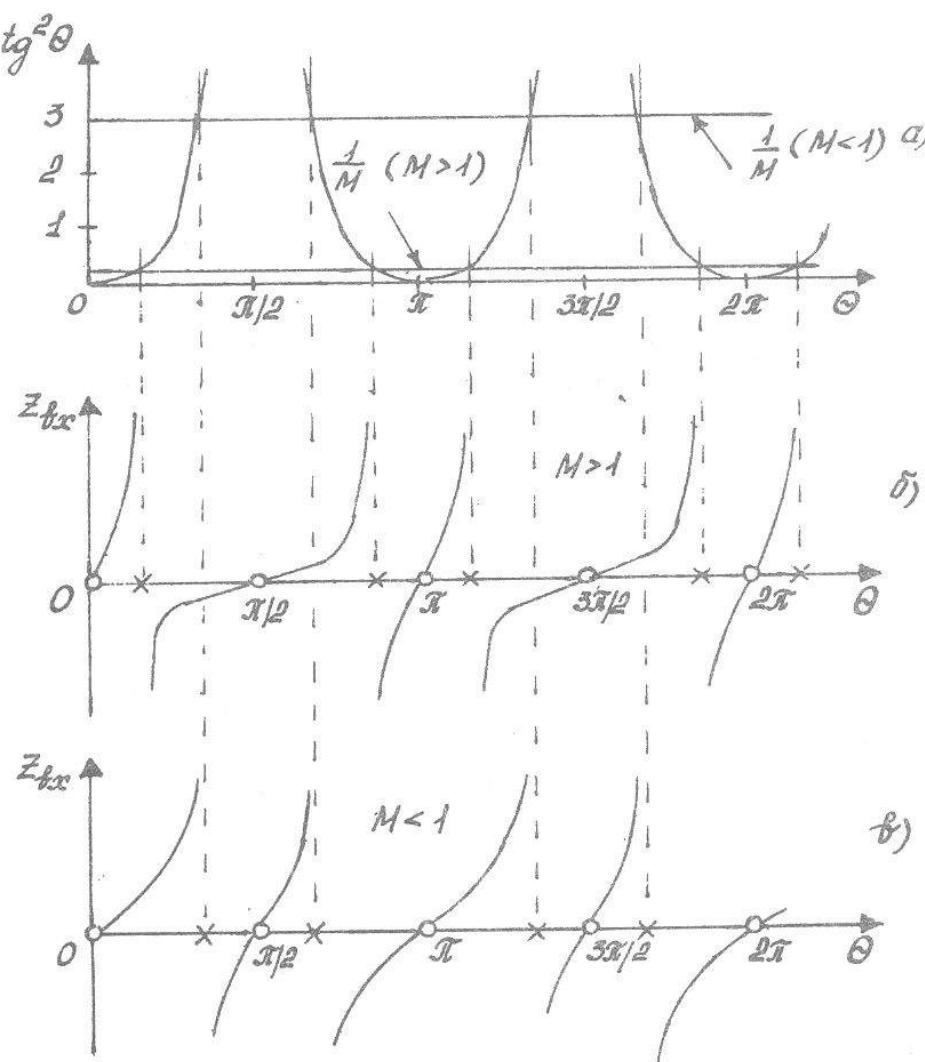


Рис. 30

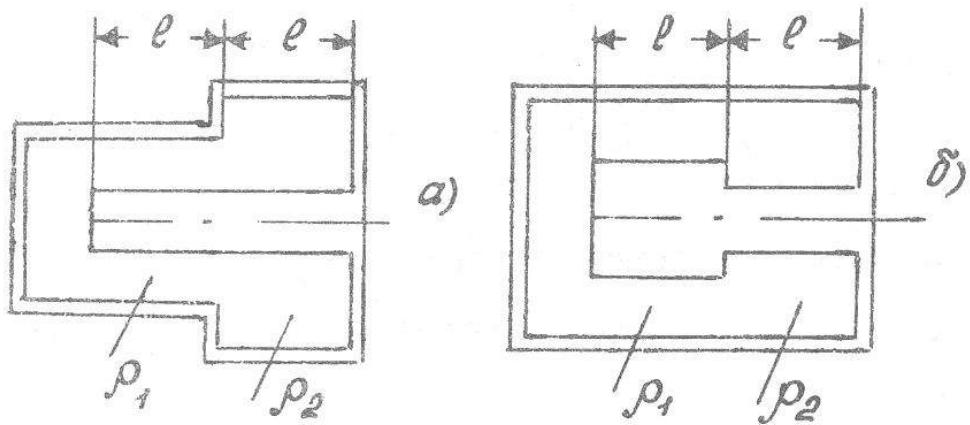


Рис. 31

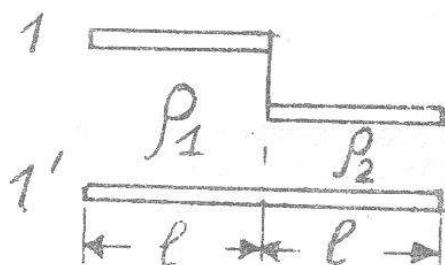


Рис. 32

Представленный на рис. 32 ступенчатый резонатор образован соединением двух разомкнутых на противоположных концах отрезков линий равной длины  $l$  с разными волновыми сопротивлениями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Можно показать (см. задачу 39), что входное сопротивление такой ступенчатой линии в точках 1-1' равно

$$Z_{ex} = j\rho_1 \frac{M_1 \operatorname{tg}^2 \beta l - 1}{(1 + M_1) \operatorname{tg} \beta l}, \quad (81)$$

где  $M_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$  параметр нерегулярности.

Найдем условия последовательного и параллельного резонансов. Нули функции  $Z_{ex}$  имеют место при  $M_1 \operatorname{tg}^2 \beta l - 1 = 0$  или

$$\operatorname{tg}^2(\beta l)_{noci} = \frac{1}{M_1}. \quad (82)$$

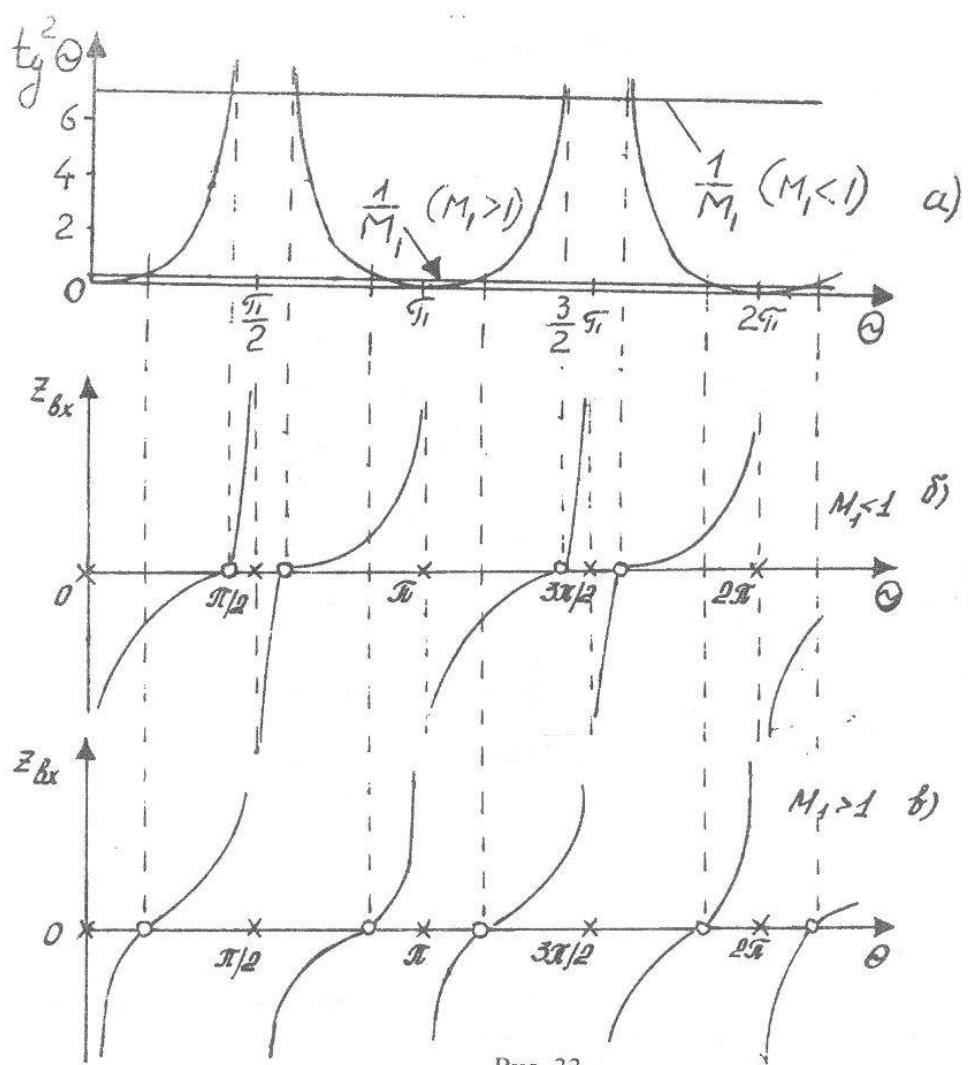


Рис. 33

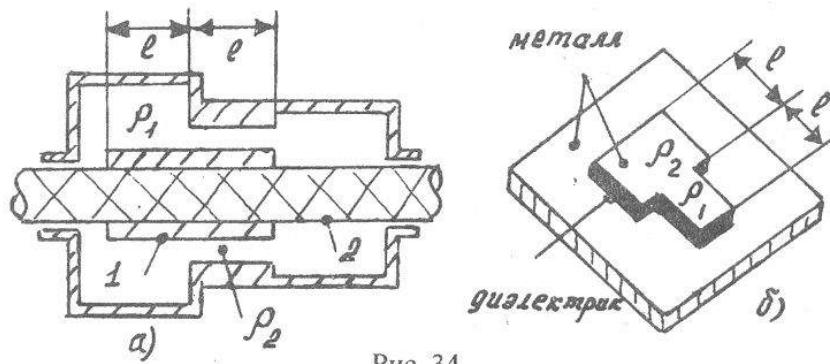


Рис. 34

Полюса функции  $Z_{ax}$  (частоты параллельного резонанса) находим из условия  $\operatorname{tg}(\beta l)_{nap} = 0$  или  $\operatorname{tg}[(\beta l)_{nap} - n\pi] = 0$ , откуда  $(\beta l)_{nap} - n\pi = \pi$  или

$$(\beta l)_{nap} = (n+1)\pi, \quad (83)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Кроме того, полюса функции  $Z_{ax}$  имеют место также при

$$(\beta l)_{nap} = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad (84),$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Условия (83) и (84) параллельного резонанса можно объединить одной формулой

$$(\beta l)_{nap} = \frac{n\pi}{2}, \quad (85)$$

где  $n = 1, 2, \dots$

Частоты параллельного резонанса в рассматриваемом ступенчатом резонаторе, как следует из формулы (85), относятся между собой как натуральный ряд целых чисел

$$f_{1nap} : f_{2nap} : f_{3nap} : \dots = 1 : 2 : 3 : \dots,$$

причем это соотношение не зависит от величины параметра нерегулярности  $M_1$ .

Величина  $M_1$  влияет на положение частот последовательного резонанса. На рис. 33а показано графическое определение частот последовательного резонанса из уравнения (82), а на рис 33б,в — входные сопротивления ступенчатого резонатора при  $M_1 \ll 1$  (рис. 33б) и  $M_1 \gg 1$  (рис. 33в).

На рис. 34а представлен вариант конструкции разомкнутого на противоположных концах ступенчатого резонатора с использованием отрезков коаксиальных линий. Для фиксации внутреннего металлического проводника 1 в конструкцию введен диэлектрический стержень 2. На рис. 34б представлен фрагмент этого же резонатора с использованием отрезков полосковых линий; на этом рисунке не показан экран, препятствующий излучению энергии электромагнитного поля в окружающее пространство.

## 2.2.6. Резонаторы с поршневой перестройкой частоты

Резонаторы с поршневой перестройкой частоты широко используются в СВЧ технике. На рис. 35 показан резонатор с подвижным короткозамыкателем (плунжером): при перемещении плунжера вдоль продольной оси изменяется длина  $l$  рабочей полости резонатора и изменяется резонансная частота, значение которой при заданных величинах  $\rho$  и  $C_0$  найдем из трансцендентного уравнения (77).

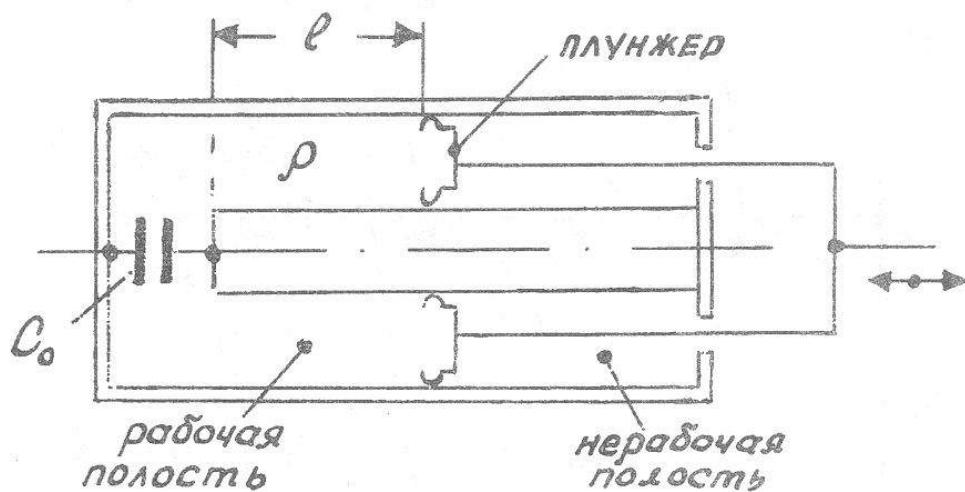


Рис. 35

На рис. 36 показан полуволновый резонатор, имеющий неподвижный короткозамыкатель 1 и подвижный короткозамыкатель 2 (плунжер), с помощью которого изменяется резонансная частота. В таком резонаторе резонансная частота определяется из простого выражения  $l = n\lambda/2$ , где  $n = 1, 2, \dots$  — номер рабочего тона колебаний.

На рис. 37 показан полуволновый резонатор, частота которого изменяется за счет изменения длины внутреннего проводника (так называемая "телескопическая" перестройка частоты). Неотъемлемой частью этого резонатора является диэлектрическая шайба, с помощью которой внутренний проводник удерживается в резонаторе. Резонансную частоту определим из соотношения  $l_{\Sigma} = n\lambda/2$ , где  $n = 1, 2, \dots$

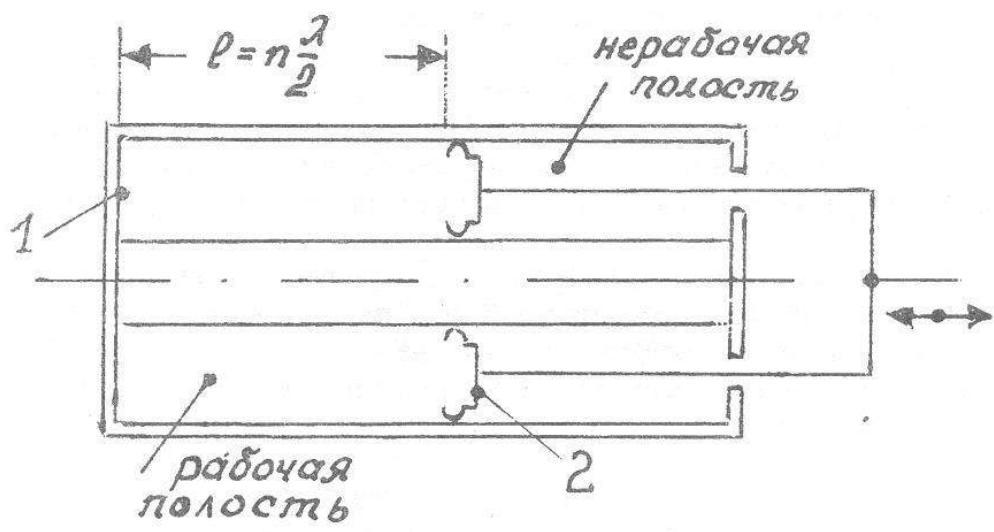


Рис. 36

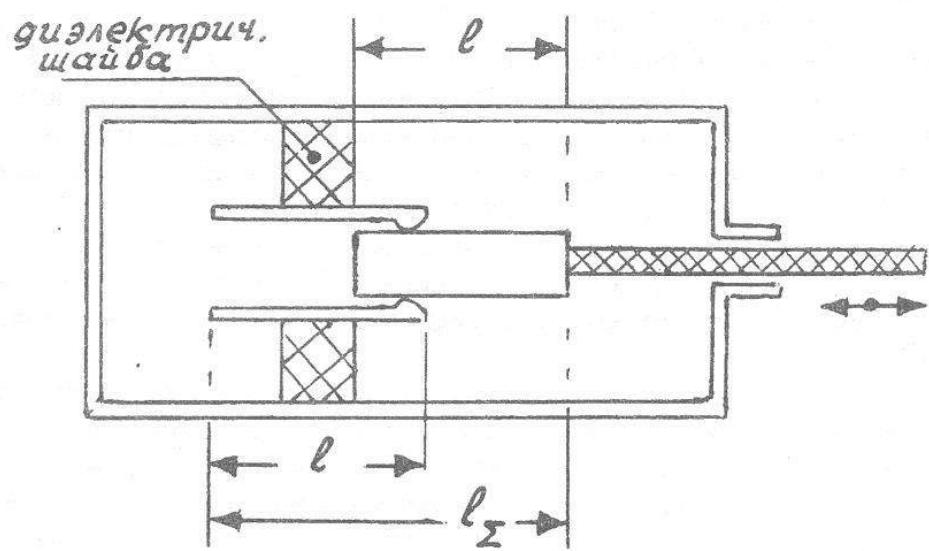


Рис. 37

Резонаторы, представленные на рис. 35 - рис. 37, имеют общий недостаток — наличие труящихся металлических контактов в процессе перестройки частоты. При многократных циклах перестройки частоты контакты изнашиваются, в резонаторах появляются дополнительные омические потери, и их добротность уменьшается. От этого недостатка свободны резонаторы с бесконтактной механической перестройкой частоты.

Рассмотрим диапазонные свойства показанного на рис. 38 коаксиального резонатора с бесконтактной перестройкой частоты поршнем в виде металлического кольца<sup>1</sup>. Поршень не имеет гальванического контакта с внутренним и наружным проводниками резонатора и отделен от них зазорами, величины которых

$$\delta_{\text{нар}} = \frac{(d - d_3)}{2}, \quad \delta_{\text{вн}} = \frac{(d_2 - d_1)}{2},$$

где  $\delta_{\text{нар}}$  — зазор между поршнем и наружным проводником,  $\delta_{\text{вн}}$  — зазор между поршнем и внутренним проводником.

Для исключения радиальных перемещений поршня внутренний или наружный зазор (или оба зазора вместе) заполняют диэлектриком, обладающим малым коэффициентом трения. В качестве такого диэлектрика обычно используют фторопласт-4 (тефлон), имеющий диэлектрическую проницаемость  $\epsilon \approx 2,2$  и обладающий малыми потерями на СВЧ. К поршню (рис. 38) прикрепляется диэлектрический стержень 2, с помощью которого осуществляется его продольное перемещение. На разомкнутом конце резонатора включена сосредоточенная емкость  $C_0$ , в качестве которой может выступать либо краевая емкость, либо междуэлектродная емкость транзистора, радиолампы или другого активного прибора.

Для перестройки резонатора по частоте на основном тоне используют обычно полный ход поршня. Это означает, что в левом крайнем положении (рис. 39а) плоскость переднего торца поршня совпадает с плоскостью обрыва внутреннего проводника, а в правом крайнем положении (рис. 40а) плоскость заднего торца поршня совпадает с плоскостью короткозамыкающей перемычки резонатора. Длина резонатора  $2l$ .

---

<sup>1</sup> Возможна перестройка резонатора кольцом, выполненным из диэлектрика.

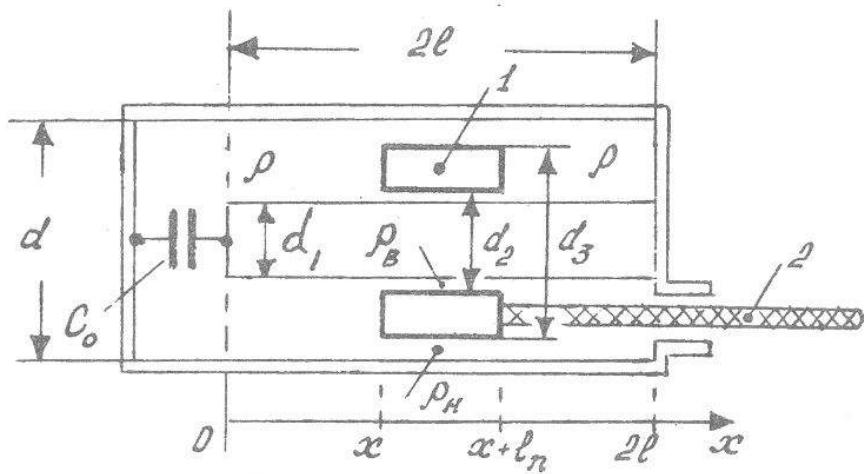


Рис. 38

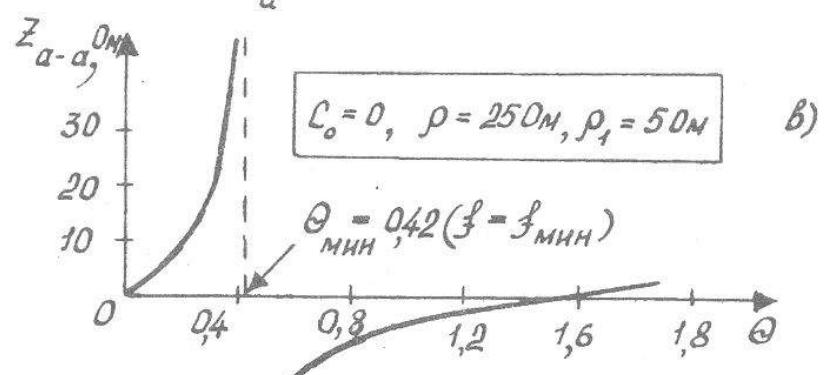
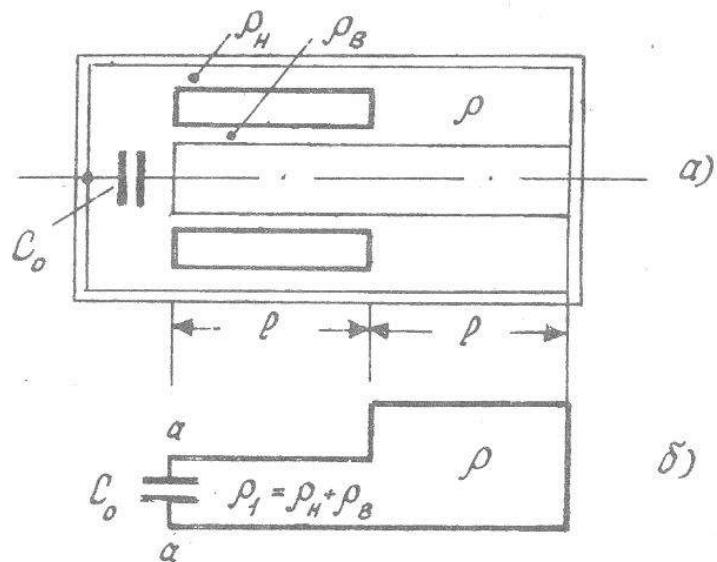


Рис. 39

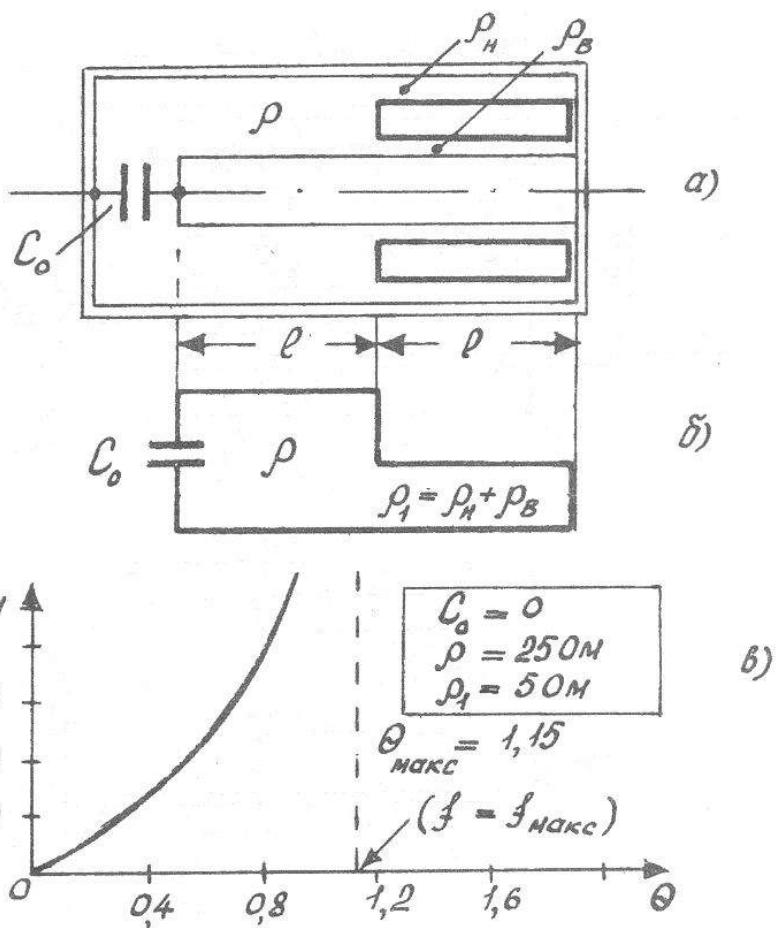


Рис. 40

Установим, какое из указанных на рис. 39а и рис. 40а положений поршня соответствует минимальной рабочей частоте и максимальной рабочей частоте на основном (нижнем) тоне колебаний. Пусть длина поршня составляет половину длины резонатора ( $l_p = l$ ) и поршень занимает в резонаторе левое крайнее положение (рис. 39а). При  $l_p = l$  эквивалентная схема резонатора имеет вид, представленный на рис. 39б: это двухступенчатая короткозамкнутая на конце линия с отрезками равной длины  $l$  и параметром нерегулярности  $M = \rho/\rho_1 > 1$ . Частоту основного тона колебаний найдем с помощью графика на рис. 39в; в этом случае величина электрической длины  $\theta_{\min} = \frac{\omega_{\min} l}{c}$  (или частоты  $\omega_{\min}$ ) тем

меньше, чем больше параметр нерегулярности  $M = \rho/\rho_1$  и емкость  $C_0$  на входе резонатора.

При правом крайнем положении поршня в резонаторе (рис. 40а) эквивалентная схема также представляется в виде двухступенчатой линии (рис. 40б), но отрезок линии с меньшим волновым сопротивлением  $\rho_1$  занимает место у короткозамыкателя; в этом случае параметр нерегулярности

$$M_1 = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1}{M} < 1,$$

а резонансная частота определяется с помощью графика на рис. 40в.

При этом электрическая длина

$$\theta_{\max} = \frac{\omega_{\max} l}{c},$$

следовательно, резонансная частота  $\omega_{\max}$  тем больше, чем меньше  $M_1$ .

Из сравнения двух графиков на рис. 39в и рис. 40в следует:

- при левом крайнем положении поршня частота основного тона колебаний минимальна, а при правом крайнем положении поршня частота основного тона колебаний максимальна;
- чем больше отличаются между собой волновые сопротивления  $\rho$  и  $\rho_1$ , тем ниже частота  $\omega_{\min}$  и тем выше частота  $\omega_{\max}$ .

При больших значениях параметра  $M$  (рис. 39а-в) справедливо неравенство

$$\theta_{\min} \ll \frac{\pi}{2}, \text{ или } \frac{2\pi l}{\lambda_{\max}} \ll \frac{\pi}{2}, \text{ откуда } l \ll \frac{\lambda_{\max}}{4}.$$

В этом случае резонатор ведет себя как сосредоточенный колебательный контур: в резонаторе можно выделить емкостную часть (участок резонатора с поршнем) и индуктивную часть — участок резонатора без поршня, расположенный около короткозамыкателя. На частоте  $\omega_{\max}$  (правое крайнее положение поршня — рис. 40а) резонатор представляет из себя типичную систему с распределенными параметрами, ибо

$$\theta_{\max} \approx \frac{\pi}{2} \text{ (при малых величинах } C_0\text{), откуда } l \approx \frac{\lambda_{\min}}{4}.$$

Таким образом, рассматриваемый резонатор относится к колебательным системам переходного типа: в низкочастотной части перекрываемого диапазона частот резонатор эквивалентен сосредоточенному контуру, а в высокочастотной части диапазона частот резонатор представляет из себя распределенную систему.

Получим уравнение резонанса резонатора для случая, когда поршень занимает в резонаторе произвольное положение, как показано на рис. 38. Резонатор включает в себя четыре отрезка линий. Два из них (на участках без поршня) имеют одинаковые волновые сопротивления  $\rho$  и длины  $x$  и  $(2l - x - l_n)$ . Два других отрезка линий на участке с поршнем имеют одинаковые геометрические длины  $l_n$  и в общем случае разные волновые сопротивления  $\rho_n$  и  $\rho_b$ . Заменив каждый из четырех отрезков эквивалентным четырехполюсником и приняв во внимание способы соединения этих четырехполюсников между собой, приходим к эквивалентной схеме резонатора, представленной на рис. 41.

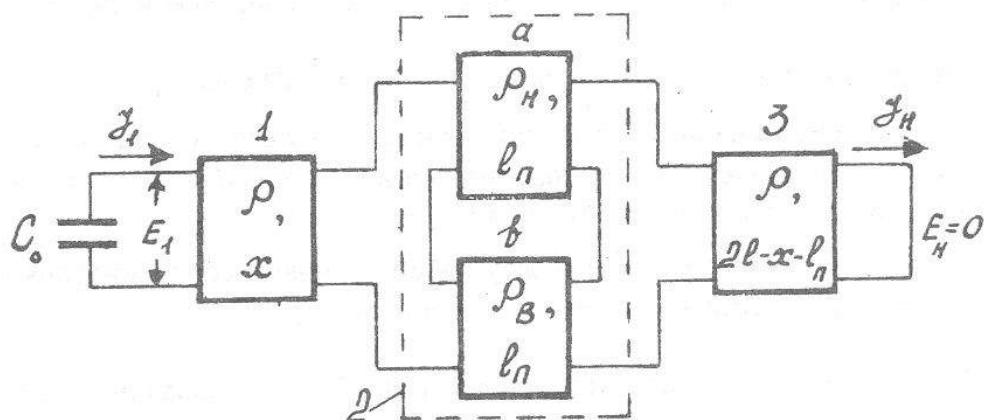


Рис. 41

Четырехполюсники  $a$  и  $b$  соединены последовательно. Чтобы заменить два последовательно соединенных четырехполюсника одним эквивалентным, необходимо сложить матрицы  $[Z]_{xx}$  соединяемых четырехполюсников, т.е.

$$[Z]_2 = [Z]_a + [Z]_b,$$

где

$$[Z]_a = -j\rho_H \frac{1}{\sin \frac{2\pi l_n}{\lambda}} \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi l_n}{\lambda} & 1 \\ 1 & \cos \frac{2\pi l_n}{\lambda} \end{bmatrix} =$$

$$= -j\rho_H \frac{1}{\sin \frac{2\pi k}{q}} \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi k}{q} & 1 \\ 1 & \cos \frac{2\pi k}{q} \end{bmatrix},$$

$$[Z]_b = -j\rho_b \frac{1}{\sin \frac{2\pi l_n}{\lambda}} \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi l_n}{\lambda} & 1 \\ 1 & \cos \frac{2\pi l_n}{\lambda} \end{bmatrix} =$$

$$= -j\rho_b \frac{1}{\sin \frac{2\pi k}{q}} \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi k}{q} & 1 \\ 1 & \cos \frac{2\pi k}{q} \end{bmatrix},$$

$q = \frac{\lambda}{l}$  — нормированная длина волны (величина безразмерная),

$k = \frac{l_n}{l}$  — нормированная длина поршня.

Сложив матрицы  $[Z]_a$  и  $[Z]_b$ , получим

$$[Z]_2 = -j\rho_1 \frac{1}{\sin \frac{2\pi k}{q}} \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi k}{q} & 1 \\ 1 & \cos \frac{2\pi k}{q} \end{bmatrix},$$

где  $\rho_1 = \rho_H + \rho_b$ .

По своей структуре матрица  $[Z]_2$  ничем не отличается от матриц  $[Z]_a$  и  $[Z]_b$ . Следовательно, два последовательно соединенных четырехполюсника, образованных регулярными отрезками линий одинаковой длины  $l_p$  и разными волновыми сопротивлениями  $\rho_H$  и  $\rho_b$ , можно заменить одним четырехполюсником, образованным отрезком линии длиной  $l_p$  и суммарным волновым сопротивлением  $\rho_1 = \rho_H + \rho_b$ . После такой замены эквивалентная схема резонатора представляется в виде каскадного соединения трех четырехполюсников (рис. 42). Для замены такого соединения одним эквивалентным четырехполюсником необходимо перемножить матрицы цепных параметров соединяемых четырехполюсников. Эти матрицы имеют вид:

$$[A]_1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{q} p & j\rho \sin \frac{2\pi}{q} p \\ \frac{j}{\rho} \sin \frac{2\pi}{q} p & \cos \frac{2\pi}{q} p \end{bmatrix}, \quad (86)$$

где  $p = \frac{x}{l}$  — нормированная координата, характеризующая положение поршня в резонаторе,

$$[A]_2 = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{q} k & j\rho_1 \sin \frac{2\pi}{q} k \\ \frac{j}{\rho_1} \sin \frac{2\pi}{q} k & \cos \frac{2\pi}{q} k \end{bmatrix}, \quad (87)$$

$$[A]_3 = \begin{bmatrix} A_3 & B_3 \\ C_3 & D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{q} (2-p-k) & j\rho \sin \frac{2\pi}{q} (2-p-k) \\ \frac{j}{\rho} \sin \frac{2\pi}{q} (2-p-k) & \cos \frac{2\pi}{q} (2-p-k) \end{bmatrix}. \quad (88)$$

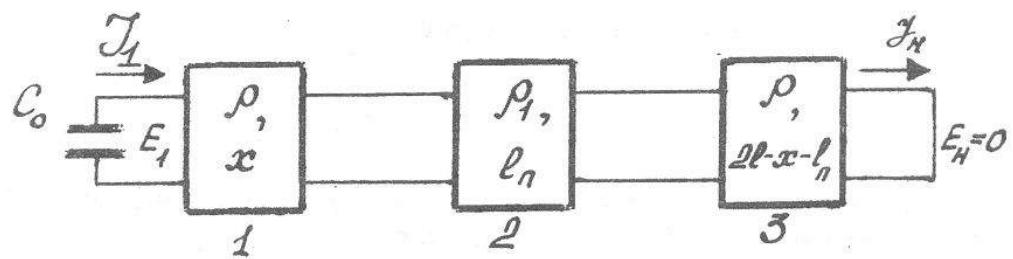


Рис. 42

Перемножив матрицы, получим матрицу цепных параметров эквивалентного четырехполюсника

$$[A] = [A]_1 [A]_2 [A]_3 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

где

$$A = A_1 A_2 A_3 + B_1 C_2 A_3 + A_1 B_2 C_3 + B_1 D_2 C_3, \quad (89)$$

$$B = A_1 A_2 B_3 + B_1 C_2 B_3 + A_1 B_2 D_3 + B_1 D_2 D_3, \quad (90)$$

$$C = C_1 A_2 A_3 + D_1 C_2 A_3 + C_1 B_2 C_3 + D_1 D_2 C_3, \quad (91)$$

$$D = C_1 A_2 B_3 + D_1 C_2 B_3 + C_1 B_2 D_3 + D_1 D_2 D_3. \quad (92)$$

Матрица  $[A]$  устанавливает связь между напряжениями и токами на входе ( $E_1, J_1$ ) и выходе ( $E_H = 0, J_H$ ) эквивалентного четырехполюсника — рис. 43:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ J_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_H \\ J_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ J_H \end{bmatrix}.$$

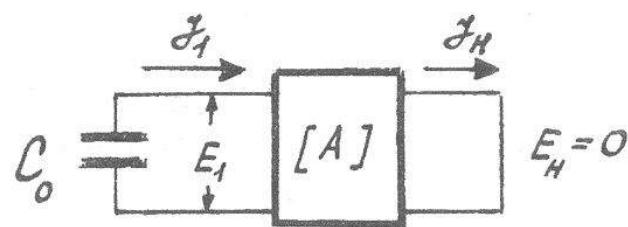


Рис. 43

Из матричного соотношения получаем

$$E_1 = BJ_H, \quad J_1 = DJ_H,$$

откуда входное сопротивление эквивалентного четырехполюсника с учетом соотношений (90) и (92) принимает вид:

$$Z_{ex} = \frac{E_1}{J_1} = \frac{B}{D} = \frac{A_1 A_2 B_3 + B_1 C_2 B_3 + A_1 B_2 D_3 + B_1 D_2 D_3}{C_1 A_2 B_3 + D_1 C_2 B_3 + C_1 B_2 D_3 + D_1 D_2 D_3}.$$

Подставив в это выражение значения элементов матриц цепных параметров (86)-(88), получим

$$Z_{ex} = j\rho Z,$$

где безразмерное выражение для  $Z$  имеет вид:

$$Z = \frac{M \operatorname{tg} \frac{2\pi}{q} p \left[ 1 - M \operatorname{tg} \frac{2\pi}{q} k \operatorname{tg} \frac{2\pi}{q} (2-p-k) \right] + \left[ \operatorname{tg} \frac{2\pi}{q} k + M \operatorname{tg} \frac{2\pi}{q} (2-p-k) \right]}{M \left[ 1 - M \operatorname{tg} \frac{2\pi}{q} k \operatorname{tg} \frac{2\pi}{q} (2-p-k) \right] - \operatorname{tg} \frac{2\pi}{q} p \left[ M \operatorname{tg} \frac{2\pi}{q} (2-p-k) + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{q} k \right]}, \quad (93)$$

$$M = \frac{\rho}{\rho_1} \text{ — параметр нерегулярности.}$$

Замечаем, что входное сопротивление каскадно соединенных четырехполюсников получилось чисто мнимым. Так и должно быть, поскольку при выводе соотношения для  $Z_{ex}$  потери в отрезках линий не учитывались. Условие параллельного резонанса резонатора записываем в виде

$$\frac{1}{j\omega C_0} + j\rho Z = 0, \text{ или } \frac{1}{\omega C_0 \rho} = Z.$$

Представим безразмерную величину  $\omega C_0 \rho$  в виде

$$\omega C_0 \rho = \frac{A}{q},$$

где

$$A = \frac{2\pi c C_0 \rho}{l} \quad (94)$$

— безразмерный параметр, величина которого пропорциональна величине емкости  $C_0$ , включенной на разомкнутом конце резонатора.

Окончательно уравнение параллельного резонанса принимает вид:

$$Z = \frac{q}{A}, \quad (95)$$

где  $Z$  определяется выражением (93). Заметим, что все величины, входящие в трансцендентное уравнение (95), записаны в безразмерном (нормированном) виде. Это удобно, поскольку представляется возможность проанализировать свойства рассматриваемого резонатора в общем виде, не прибегая к конкретным значениям его геометрических размеров.

Решить уравнение (95) — это значит определить значение нормированной длины волны  $q$  в зависимости от нормированной координаты  $p$ . Зависимость  $q = F(p)$  назовем нормированной настроечной кривой резонатора. Как видно из уравнения резонанса (95), характер нормированной настроечной кривой определяется величинами трех безразмерных параметров  $A$ ,  $k$ ,  $M$ . Для решения уравнения (95) на ЭВМ определим допустимые области изменения безразмерных параметров  $A$ ,  $k$ ,  $M$ .

Параметр нерегулярности  $M = \frac{\rho}{\rho_1 + \rho_e}$ . Обычно волновое

сопротивление на участках без поршня  $\rho \leq 30 \div 50$  Ом, а суммарное волновое сопротивление отрезков линий на участках с поршнем  $\rho \leq 2 \div 5$  Ом. Следовательно, параметр нерегулярности можно выбрать в пределах  $M = 5 \div 30$ . При  $M < 5$  невозможно получить большой коэффициент перекрытия по частоте резонатора, а большие значения параметра  $M$  ( $M > 30$ ) трудно реализовать из-за слишком малых требуемых зазоров  $\delta_{\text{пар}}$  и  $\delta_{\text{внутр}}$  (рис. 38).

Определим допустимые пределы изменения безразмерного параметра  $A = \frac{2\pi c C_0 \rho}{l}$ . Емкость  $C_0$  не превышает 10 пФ, а максимальная длина резонатора обычно не превышает 10-20 см, т. е.  $2l_{\text{макс}} = 10 \div 20$  см,  $l_{\text{макс}} = 5 \div 10$  см. С учетом того, что  $\rho_{\text{макс}} \leq 50$  Ом, получаем

$$A_{\max} = \frac{2\pi c C_0 \rho_{\max}}{l_{\min}} = \frac{6,28 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot 50}{5} \approx 20.$$

Минимальное значение  $A_{\min} = 0$ , что соответствует случаю  $C_0 = 0$ . Таким образом, параметр  $A$  изменяется в пределах  $A = 0 \div 20$ .

Допустимые пределы изменения нормированной координаты

$p = \frac{x}{l}$  определяются величиной нормированной длины поршня

$k = \frac{l_{\max}}{l}$ . Действительно, когда поршень занимает в резонаторе правое крайнее положение (рис. 40а), имеем максимальное значение нормированной координаты  $x_{\max} = 2l - l_{\max}$  или  $p_{\max} = \frac{x_{\max}}{l} = 2 - k$ . Таким

образом, нормированная координата может изменяться в пределах  $p = 0 \div (2 - k)$ . В свою очередь, максимальная нормированная величина поршня в пределе может достигать значения

$k_{\max} = \frac{l_{\max}}{l} = \frac{2l}{l} = 2$ ; в этом случае длина поршня равна длине резонатора и поршень не может перемещаться в резонаторе, т. е. перестройки по частоте не будет. Таким образом, величина  $K$  должна быть меньше двух.

Как показывают расчеты, при  $K = 1$  резонатор имеет максимальный коэффициент перекрытия по частоте при работе на основном (нижнем) тоне колебаний.

Итак, пределы изменения нормированных параметров определены. На рис. 44 представлены рассчитанные на ЭВМ нормированные настроочные кривые резонатора  $q = F(p)$  — решение уравнения (95), в котором нормированная длина поршня  $K = 1$ . Сплошными линиями на рис. 44 показаны кривые при  $A = 0$ , а пунктирными — эти же кривые при  $A = 10$ . Из рассмотрения настроочных кривых, построенных при фиксированном значении параметра  $A$ , например, при  $A = 0$ , видно, что величина минимальной нормированной длины волны  $q_{\min}$  почти не зависит от параметра нерегулярности  $M$ .

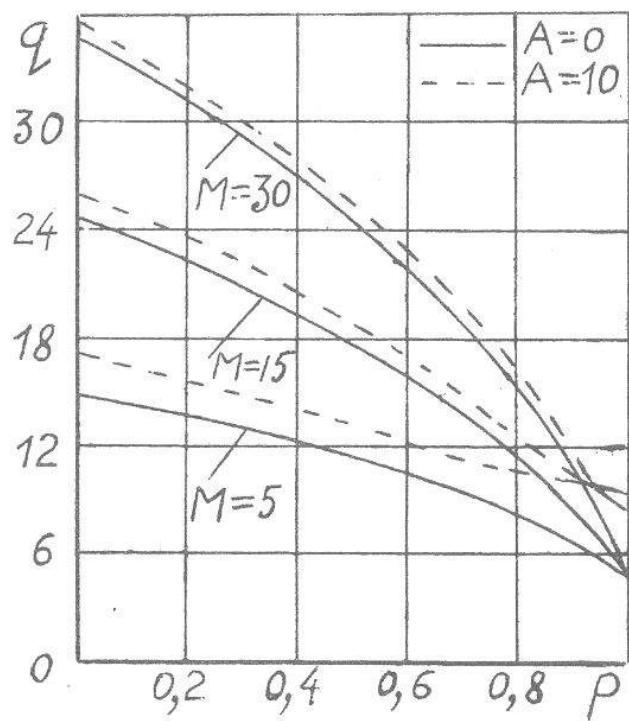


Рис. 44

**РАЗДЕЛ III**

**ЗАДАЧИ  
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО  
РЕШЕНИЯ**

1. Определить коэффициент отражения по напряжению  $\Gamma_u$  от места включения сосредоточенных активных сопротивлений  $R$  для схем на рис. 45. Учесть, что справа от неоднородностей отражений нет.

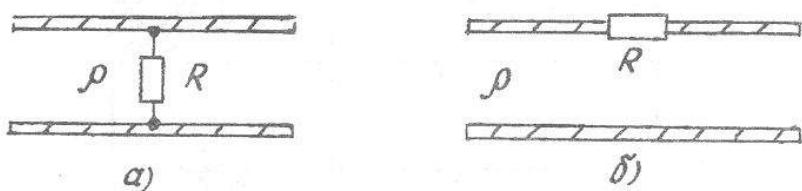


Рис. 45

2. Линия без потерь с волновым сопротивлением  $\rho$  и длиной  $l$  питается от источника напряжения  $E$  с внутренним сопротивлением  $R_i$  (рис. 46). Линия нагружена на сопротивление  $Z_H$ . Замените систему, которая питает  $Z_H$ , эквивалентным источником. Определите параметры эквивалентной схемы Тевенина.

3. Антенна питается через линию без потерь (рис. 47) с погонными параметрами  $L_0 = 0,5 \text{ мкГн/м}$ ,  $C_0 = 30 \text{ пФ/м}$ . Рабочая частота  $f = 200 \text{ МГц}$ . Найти волновое сопротивление и определить напряжение на входе линии, если мощность в нагрузке 10 Вт, длина линии  $l = 8,3 \text{ м}$ . Антенна согласована с линией.

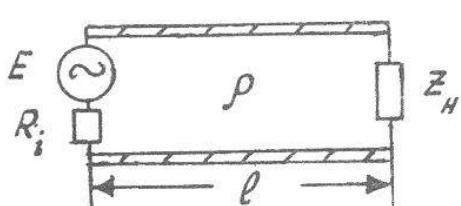


Рис. 46

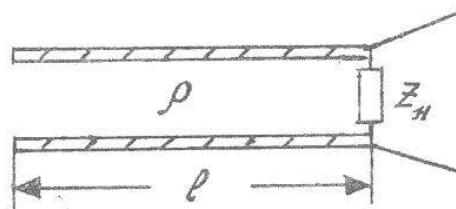


Рис. 47

4. Отрезок линии без потерь длиной  $l_1 = 8,5\lambda$ , где  $\lambda$  — рабочая длина волны, волновым сопротивлением  $\rho_1 = 100 \Omega$  нагружен на другой отрезок линии без потерь длиной  $l_2 = 4,3\lambda$  и  $\rho_2 = 50 \Omega$  (рис. 48). Последний отрезок линии нагружен сопротивлением  $Z_H$ . Определить:

a) при какой величине  $Z_H$  в линии с волновым сопротивлением  $\rho_1$  не будет стоячих волн; при этих условиях, каким является коэффициент стоячей волны в линии с волновым сопротивлением  $\rho_2$ ;

b) при какой величине  $Z_H$  не будет стоячих волн в линии с волновым сопротивлением  $\rho_2$  и каким в этом случае будет коэффициент стоячей волны в линии с волновым сопротивлением  $\rho_1$ ?

5. Нерегулярная линия (рис. 49) имеет волновое сопротивление первого участка  $\rho_1 = 80 \Omega$ , волновое сопротивление второго участка  $\rho_2 = 120 \Omega$ . Какой величины должны быть резисторы  $R_1$  и  $R_2$ , чтобы в линии была бегущая волна?

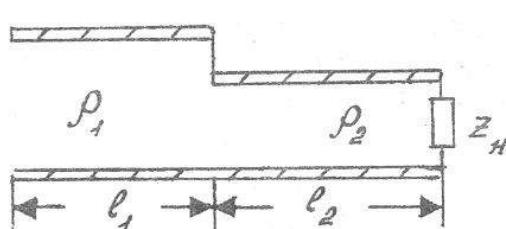


Рис. 48

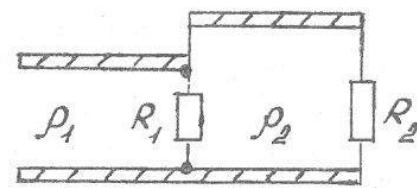


Рис. 49

6. Фидер, разомкнутый на конце, имеет волновое сопротивление  $\rho = 450 \Omega$  и подключен к генератору, частота которого  $f = 150 \text{ МГц}$ . Определить амплитуду тока в пучности и на расстоянии  $x' = 0,6 \text{ м}$  от конца фидера, если напряжение на его конце  $E_H = 180 \text{ В}$ .

7. Фидер без потерь нагружен на активное сопротивление  $R_H = 400 \Omega$ , равное волновому, и питается от генератора синусоидальных колебаний с амплитудой  $E = 600 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $R_i = 600 \Omega$ . Определить напряжение на зажимах генератора и мощность, выделяемую в нагрузке.

8. Четвертьволновый фидер без потерь с волновым сопротивлением  $\rho$  нагружен на конце емкостью  $C$ . Определить входное сопротивление фидера.

9. Фидер без потерь с волновым сопротивлением  $\rho = 600 \text{ Ом}$  нагружен на активное сопротивление  $R = 300 \text{ Ом}$ . Напряжение на нагрузке  $E_H = 1,2 \text{ кВ}$ . Чему равны ток в фидере и напряжение на фидере в точке, находящейся на расстоянии  $x' = \lambda/8$  от нагрузки, где  $\lambda$  — рабочая длина волны?

10. Какова должна быть минимальная относительная длина ( $l/\lambda$ ) короткозамкнутой на конце линии без потерь, чтобы ее входное сопротивление было индуктивным и равным по величине волновому сопротивлению линии?

11. Найти входное сопротивление линии без потерь, нагруженной на последовательно включенные сопротивление нагрузки  $Z_H$  и короткозамкнутый на конце шлейф (линия без потерь) — рис. 50. Волновые сопротивления линии и шлейфа  $\rho = 600 \text{ Ом}$ ,  $Z_H = 500 \text{ Ом}$ , длина линии  $l = 190 \text{ см}$ , длина шлейфа  $l_W = 10 \text{ см}$ , рабочая длина волны  $\lambda = 120 \text{ см}$ .

12. Генератор с рабочей длиной волны  $\lambda$  создает на входе линии без потерь напряжение  $E_1 = 10 \text{ В}$ . Линия длиной  $l = \lambda/2$  и волновым сопротивлением  $\rho = 100 \text{ Ом}$  нагружена на  $Z_H = 100 \text{ Ом}$ . В средней части линии включен короткозамкнутый на конце шлейф (линия без потерь) с тем же волновым сопротивлением  $\rho = 100 \text{ Ом}$  и длиной  $l_W = \lambda/8$  — рис. 51. Найти входное сопротивление линии и ток  $J_1$  на ее входе.

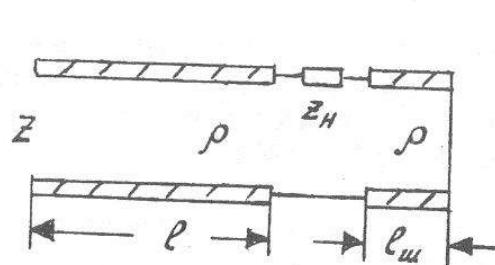


Рис. 50

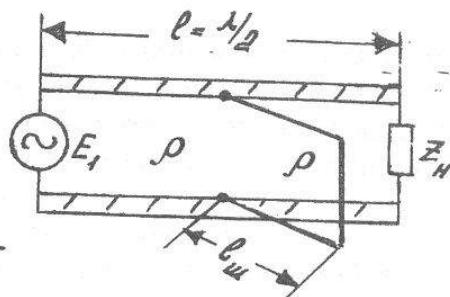


Рис. 51

13. Линия без потерь с волновым сопротивлением  $\rho = 20\pi = 62,8 \text{ Ом}$  нагружена индуктивностью  $L = 10^{-8} \text{ Гн}$ . Частота колебаний  $f = 1 \text{ ГГц}$ . Какое расстояние отделяет нагрузку от ближайшего узла стоячей волны?

14. Разомкнутая на конце линия без потерь с волновым сопротивлением  $\rho = 100 \text{ Ом}$  и длиной  $l = 0,5 \text{ м}$  работает на частоте  $f = 100 \text{ мГц}$ . Определите значение эквивалентной емкости, заменяющей эту линию.

Замкнутая на конце линия без потерь с волновым сопротивлением  $\rho = 100 \text{ Ом}$  и длиной  $l = 0,5 \text{ м}$  работает на частоте  $f = 100 \text{ мГц}$ . Определить значение эквивалентной индуктивности, заменяющей эту линию.

15. Входное сопротивление коротко-замкнутого на конце отрезка линии без потерь в сечении 1-1' (рис. 52) равно нулю. Найти минимальную длину этого отрезка. Решить эту задачу, приняв входное сопротивление в сечении 1-1' бесконечно большим.

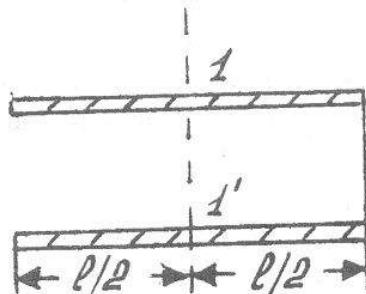


Рис. 52

16. Построить Т-образную схему замещения линии без потерь с волновым сопротивлением  $\rho = 50 \text{ Ом}$  и длиной  $l = 7,5 \text{ см}$  на рабочей частоте  $f = 1 \text{ ГГц}$ .

17. Фидер длиной  $l = 2 \text{ м}$  нагружен на активное сопротивление  $R > \rho$ . Длина волны питающего генератора  $\lambda = 1 \text{ м}$ . Определить амплитуду напряжения на входе фидера, если амплитуда напряжения на нагрузке  $E_H = 200 \text{ В}$ .

18. Линия без потерь с волновым сопротивлением  $\rho = 50 \text{ Ом}$  нагружена на резистор  $R_H = 20 \text{ Ом}$ . Определить длину отрезка линии, при которой индуктивная составляющая входного сопротивления максимальна.

19. Найти соотношение между диаметром проводов  $2a$  и расстоянием между ними  $d$  в двухпроводном медном фидере, при котором имеет место минимальное затухание  $\alpha$ .

20. Медный коаксиальный фидер, согласованный с нагрузкой, подключен к генератору, работающему на волне  $\lambda = 30 \text{ см}$ . Параметры фидера: диаметр внутреннего проводника  $d = 5 \text{ мм}$ , внутренний диаметр

наружного проводника  $D = 16$  мм, относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика  $\epsilon = 2,5$ . Определить длину фидера, если при напряжении генератора  $u_{ax} = 50$  В ток в нагрузке  $J_H = 0,5$  А.

21. В двухпроводном экранированном фидере, связывающем антенну с входом радиоприемника, существует режим бегущих волн. Параметры фидера: диаметр провода  $2a = 0,5$  мм, расстояние между проводами  $d = 2$  мм, относительная диэлектрическая проницаемость изолятора  $\epsilon = 5,3$ , длина фидера 12 м. Определить мощность, подводимую на вход радиоприемника, коэффициент полезного действия фидера, если мощность сигнала в антенне равна 1,5 мкВт. Частота принимаемых сигналов 120 МГц.

22. Антенна связана с выходом передатчика, работающего на волне 0,7 м, при помощи медного коаксиального фидера, в котором установлен режим бегущих волн. Параметры фидера: диаметр внутреннего проводника  $d = 1,3$  мм, внутренний диаметр наружного проводника  $D = 10$  мм, длина  $l = 20$  м, относительная диэлектрическая проницаемость изолятора  $\epsilon = 2,5$ . Определить ток в антенне, подводимую к антенне мощность и коэффициент полезного действия фидера, если напряжение на входе фидера 25 В.

23. Вывести формулу для расчета волнового сопротивления фидера без потерь по известным значениям входного сопротивления в режиме короткого замыкания и холостого хода.

24. Ток на входе двухпроводного воздушного фидера равен 2 А. Фидер работает в режиме бегущих волн. Чему равен ток, проходящий через нагрузку, если длина фидера  $l = 200$  м, а коэффициент затухания фидера  $\alpha = 2,61$  дБ/км.

25. Двухпроводный воздушный фидер выполнен из медных проводов диаметром  $2a = 3$  мм, расположенных на расстоянии  $d = 30$  см один от другого. Определить длину волны, при которой коэффициент затухания фидера  $\alpha = 0,002$  дБ/м.

26. Фидер с волновым сопротивлением  $\rho = 120$  Ом нагружен на активное сопротивление больше волнового. Для согласования фидера с нагрузкой используется четвертьвольновый трансформатор. Определить

волновое сопротивление трансформатора, если при его отсутствии КВВ в фидере равен 0,4. Решить эту же задачу для фидера, нагруженного на активное сопротивление меньше волнового.

27. Отношение диаметров наружного и внутреннего проводников медной короткозамкнутой на конце коаксиальной линии равно 3,6. Линия использована для построения резонатора. Определить внутренний диаметр  $D$  наружного проводника, при котором на волне  $\lambda = 35$  см можно получить добротность  $Q_p$ , равную 2400.

28. Добротность колебательного контура, элементом которого является четвертьволновый отрезок двухпроводного воздушного фидера длиной  $l = 0,5$  м, составляет  $Q = 1850$ . Определить диаметр провода, из которого выполнен фидер, если его волновое сопротивление  $\rho = 240$  Ом.

29. Четвертьволновый резонатор выполнен на основе отрезка короткозамкнутой на конце воздушной коаксиальной линии с длиной  $l$  и волновым сопротивлением  $\rho$ . Изменится ли резонансная частота резонатора при заполнении пространства между внутренним и наружным проводниками диэлектриком с  $\epsilon = 2$ ?

30. Коаксиальный четвертьволновый резонатор выполнен на основе отрезка короткозамкнутой на конце линии с длиной  $l$  и волновым сопротивлением  $\rho$  (рис. 53а). Изменится ли резонансная частота резонатора, если у его короткозамыкателя разместить диэлектрическую шайбу с  $\epsilon = 2$  и длиной  $l_{ш} \ll l$ ? Изменится ли резонансная частота, если эту же шайбу разместить у разомкнутого конца резонатора (рис. 53б)?

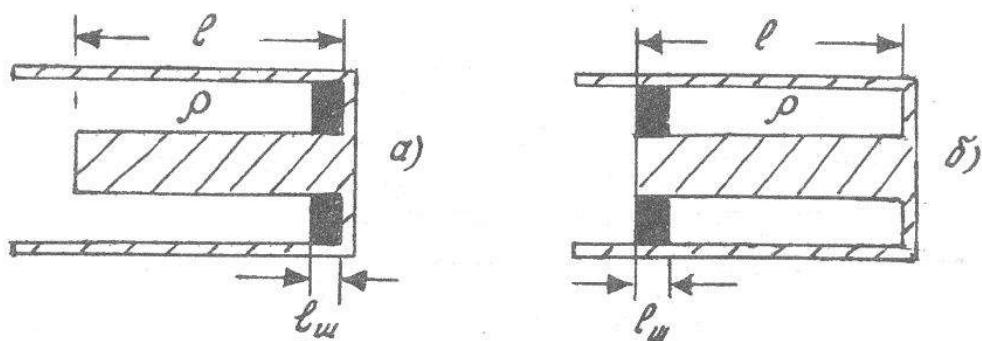


Рис. 53

31. Найти частоты, на которых выполняются условия резонанса токов и резонанса напряжений для короткозамкнутого на конце отрезка коаксиальной линии длиной  $l = 1$  м с погонными параметрами  $L_0 = 2,63 \cdot 10^{-4}$  Гн/км,  $C_0 = 46,5 \cdot 10^{-9}$  Ф/км.

32. Какой максимальный коэффициент перекрытия по частоте можно получить в резонаторе с емкостной перестройкой частоты (рис. 26) на первом обертона, если конденсатор  $C$  имеет: а) ограниченный коэффициент перекрытия по емкости; б) неограниченный коэффициент перекрытия по емкости. Решить эту же задачу в случае, когда резонатор используется на 2-м, 3-м и более высоких обертонах.

33. Найти выражение для резонансной частоты резонатора (рис. 26) при условии, что длина резонатора  $l \ll \lambda$ , где  $\lambda$  — рабочая длина волны на основном тоне колебаний.

34. При изменении управляющего напряжения емкость варикапа КВ109А изменяется от 3 пФ до 15 пФ. Какой диапазон перестройки частоты можно получить на основном тоне колебаний в резонаторе (рис. 26) с длиной  $l = 9$  см волновым сопротивлением  $\rho = 50$  Ом, на разомкнутом конце которого включен такой варикап?

35. Частота резонатора изменяется перемещающимся короткозамыкателем (плунжером) — рис. 54. Волновое сопротивление линии  $\rho = 50$  Ом. На разомкнутом конце линии включен биполярный транзистор, у которого емкость коллектор-база  $C_{KB} = 3$  пФ. Определить координаты плунжера  $l_{\min}$  и  $l_{\max}$ , при которых на основном тоне колебаний резонатор имеет  $f_{\max} = 1$  ГГц и  $f_{\min} = 0,4$  ГГц.

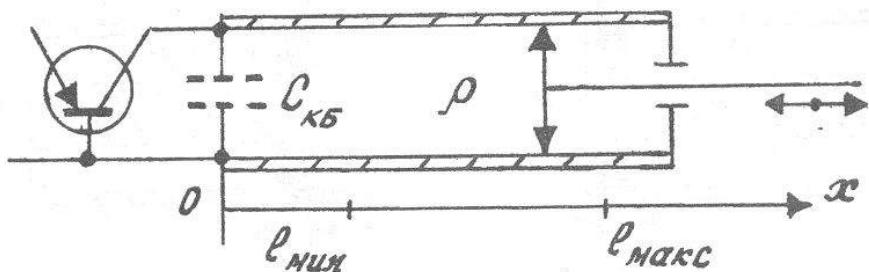


Рис. 54

36. В резонаторе на рис. 54, у которого  $C_{KB} = 3 \text{ пФ}$ ,  $\rho = 50 \text{ Ом}$ , определить координаты плунжера, при которых на первом обертона достигается диапазон перестройки частоты от 1 ГГц до 2 ГГц. Нарисовать распределение амплитуд напряжения и тока по координате на частотах  $f_{\min}$  и  $f_{\max}$ .

37. Получите приближенные выражения для частоты параллельного резонанса резонатора в виде короткозамкнутой на конце ступенчатой линии (рис. 29а), у которого параметр нерегулярности  $M \gg 1$  и  $M \ll 1$ .

38. Покажите, что в представленных на рис. 31а,б конструкциях ступенчатых резонаторов  $\rho_1 < \rho_2$ , где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — волновые сопротивления однородных отрезков линий. Предложите варианты ввода и вывода энергии электромагнитных колебаний в таких резонаторах.

39. Докажите справедливость соотношения (81).

40. С учетом потерь в токопроводящих проводниках найти модуль входного сопротивления разомкнутой на конце линии с длиной  $l$  и волновым сопротивлением  $\rho$  на частоте параллельного резонанса. Определить добротность резонатора, построенного на основе такой линии.

41. Как следует изменить конфигурацию ступенчатых резонаторов, представленных на рис. 31а, б, чтобы выполнить неравенство  $\rho_1 > \rho_2$ , где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — волновые сопротивления отрезков однородных линий?

42. Получите условие параллельного резонанса резонатора, представленного на рис. 27.

43. Волновое сопротивление медной коаксиальной линии с воздушным диэлектриком  $\rho = 75 \text{ Ом}$ . Определить, во сколько раз потери на нагрев внутреннего проводника линии больше потерь на нагрев ее наружного проводника.

44. Резонатор в виде отрезка линии, короткозамкнутого на одном конце и разомкнутого на противоположном конце, имеет длину  $l = 10 \text{ см}$  и работает на втором обертоне. Измеренное значение добротности  $Q = 1200$ . Найти резонансную длину волны и постоянную затухания  $\alpha$ .

45. Предложите схему экспериментальной установки, с помощью которой можно обнаружить в резонаторе фиксированной длины  $l$  параллельные резонансы на основном тоне колебаний и обертонах.

46. Коаксиальный фидер с волновым сопротивлением  $\rho = 75 \text{ Ом}$  нагружен на конце активным сопротивлением нагрузки  $R$ . Определить  $R$ , если: а) амплитуда напряжения одинакова вдоль фидера, б) вдоль фидера  $K_{BB} = 0,5$  и максимум напряжения приходится на нагрузку, в)  $K_{BB} = 0,5$  и максимум напряжения находится на расстоянии  $x' = \lambda/4$  от нагрузки.

47. Определить расстояние между проводами двухпроводного фидера, нагруженного на сопротивление нагрузки  $R = 200 \text{ Ом}$  и работающего в режиме бегущих волн. Диаметр проводов фидера  $2a = 3 \text{ мм}$ , относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, окружающего провода линии,  $\epsilon = 2,5$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Крылов В.В., Корсаков С.Я.* Основы теории цепей для системотехников. М.: Высш. школа, 1990.
2. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. М.: Высш. школа, 1980.
3. *Хмель В.Ф., Чаплин А.Ф., Шумлянский И.И.* Антенны и устройства СВЧ. Сборник задач. Киев: Высш. школа, 1990.
4. *Баскаков С.И.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высш. школа, 1992.
5. *Рыжаков С.М.* Анализ четырехполюсников в частотной области. Учебное пособие. Нижний Новгород: Нижегородский гос. университет, 1992.