

Биспектр пуассоновского процесса, как модели $1/f$ шума, построенной на основе ДУС в полупроводниках

М.Ю.Перов¹

*Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского
проспект Гагарина 23, Нижний Новгород 603950, Россия*

Производится исследование $1/f$ шума на основе модели ансамбля случайных телеграфных процессов (СТП), описывающих поведение дефектов полупроводников в модели двухуровневых систем (ДУС). Для исследования свойств $1/f$ шума предложено изучение биспектра шума, однако его теоретический анализ в модели СТП затруднителен. Для оценки биспектра в модели СТП построена вспомогательная модель пуассоновского процесса. Получено выражение для биспектра $1/f$ шума в модели пуассоновского процесса, характеризующее негауссовость процесса. На основе спектров осуществлено сравнение моделей, осуществлена корректировка выражения для биспектра пуассоновского процесса.

1. Введение

У полупроводниковых приборов на низких частотах наблюдается $1/f$ шум, который, вероятно, обусловлен подвижными дефектами. Обнаружено [1], что нулевая гипотеза (о гауссовости и стационарности) для $1/f$ шума полупроводников не выполняется. Предполагалось, что $1/f$ шум является стационарным, но негауссовым.

Спектральные характеристики шума высокого порядка, такие как биспектр, функция бикогерентности и выше, отражают характер негауссовости процесса. Естественнo ожидать, что изучение спектров высших порядков позволит обнаружить новые свойства $1/f$ шума и выявить особенности поведения дефектов полупроводников.

Существует модель двухуровневых систем, согласно которой дефект может находиться в одном из двух метастабильных состояний. Переход из одного состояния в другое происходит достаточно быстро, по сравнению со временем пребывания в одном из состояний. Таким образом, перемещение дефекта из одного состояния в другое и обратно может быть представлено случайным телеграфным процессом (СТП). В полупроводнике количество дефектов велико, и шум образуется суперпозицией (ансамблем) СТП. Для данной модели определен спектр одного СТП, имеющей лоренцев характер, и спектр ансамбля СТП, который имеет $1/f$ вид. Определить высшие спектральные характеристики $1/f$ шума в этой модели, в частности, биспектр, представляется весьма затруднительным.

Для теоретической оценки биспектра $1/f$ шума в модели СТП построена вспомогательная модель $1/f$ шума на основе ансамбля пуассоновских процессов. Ансамбль пуассоновских процессов эквивалентен ансамблю СТП в модели ДУС, который дает спектр вида $1/f$. Отдельно взятый пуассоновский процесс используется для моделирования элементарного СТП, соответствующего одному подвижному дефек-

¹ Тел.: +7-8312-656153; Fax: +7-8312-656416; E-mail: perov@rf.unn.ru

ту. При моделировании данного пуассоновского процесса произведено сравнение его спектра и спектра элементарного СТП.

2. Модель 1/f шума на основе ансамбля СТП

Спектр случайного телеграфного процесса, образованного одним подвижным дефектом

Рассмотрим случайный стационарный телеграфный процесс (СТП) $x_1(t)$, описывающий поведение одного дефекта. Пример реализации процесса изображен на рис.1. В случайные моменты времени процесс переключается между значениями “ноль” и “единица”, формируя импульсы с амплитудой a .

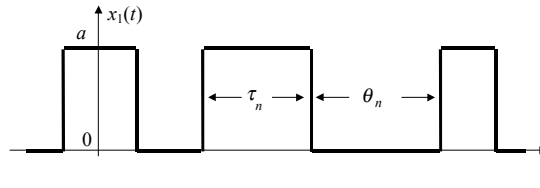


Рис.1

Пусть длительности импульсов и пауз распределены по закону Больцмана и имеют средние длительности, соответственно, равные τ_0 и θ_0 :

$$W_{\tau_n}(\tau) = (1/\tau_0) \exp(-\tau/\tau_0); W_{\theta_n}(\theta) = (1/\theta_0) \exp(-\theta/\theta_0). \quad (1)$$

Допустим для простоты, что отношение средних длительностей паузы и импульса в СТП является постоянной величиной:

$$\theta_0 = k \tau_0, \quad k \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Принимая во внимание результаты, полученные в [2], найдем, что спектр данного СТП имеет лоренцев вид:

$$S_{x1}(\omega | \tau_0) = \frac{2\omega_c \sigma_{x1}^2}{\omega_c^2 + \omega^2}. \quad (3)$$

Здесь ω_c – “характерная” или угловая частота среза спектра:

$$\omega_c = (\tau_0 + \theta_0) / (\tau_0 \theta_0) = (k+1)/(k\tau_0), \quad (4)$$

а дисперсия процесса равна:

$$\sigma_{x1}^2 = a^2 k / (k+1)^2. \quad (5)$$

Рассмотрим симметричный СТП с одинаковыми средними длительностями импульсов и пауз ($\tau_0 = \theta_0$, $k=1$), обладающий размахом “ a ” (рис.1). Угловая частота спектра такого процесса равна $\omega_c = 2/\tau_0$, дисперсия процесса есть $\sigma_{x1}^2 = a^2/4$.

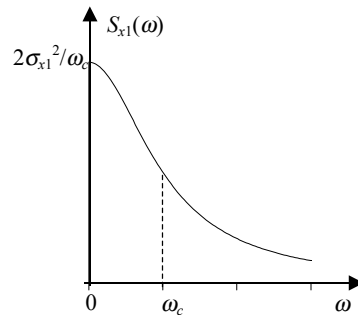


Рис.2

Синтез спектра 1/f шума в модели ансамбля СТП

В данной работе используется модель Ван дер Зила – Дю Пре, где рассматриваются ансамбль процессов с лоренцевыми спектрами, который образует спектр вида 1/f [3]. Спектр одного элементарного СТП в модели ДУС также имеет лоренцев вид. Для того чтобы получить спектр 1/f типа в модели ансамбля СТП, необходимо иметь распределение средних длительностей импульса такое же, как и в модели Ван дер Зила – Дю Пре:

$$W_{\tau_0}(\tau) = \frac{1}{\tau \ln(\tau_{high} / \tau_{low})}, \quad \tau_{low} \leq \tau \leq \tau_{high}. \quad (6)$$

Спектр ансамбля СТП может быть представлен следующим выражением:

$$S_x(\omega) = N_d \langle S_{x1}(\omega | \tau_0) \rangle_{\tau_0}, \quad (7)$$

где N_d – число дефектов в образце (количество элементарных СТП в ансамбле).

После усреднения выражения для спектра элементарного СТП (3) по всем τ_0 при помощи распределения (6), получим выражение для спектра ансамбля СТП:

$$S_x(\omega) = \frac{\pi \sigma_x^2}{\ln(\omega_{high} / \omega_{low})} \cdot \frac{1}{\omega} \quad (8)$$

Здесь $\sigma_x^2 = a^2 N_d k / (k+1)^2$ – дисперсия ансамбля СТП, $\omega_{high} = (k+1) / (k \tau_{low})$, $\omega_{low} = (k+1) / (k \tau_{high})$ – верхняя и нижняя частоты перегиба, которые определяются частотами срезов граничных лоренцианов.

3. Моделирование 1/f шума ансамблем пуассоновских процессовМоделирование поведения одного дефекта пуассоновской последовательностью монополярных импульсов

Для моделирования элементарного СТП, описывающего поведение ДУС или одного подвижного дефекта, воспользуемся пуассоновской последовательностью монополярных импульсов. Элементарный СТП является телеграфным процессом, (рис.1), поэтому в качестве элементарного импульса выберем прямоугольный импульс, приведенный на рис.3. Достоинством пуассоновской модели является возможность вычисления ее спектральных характеристик.

Спектр пуассоновского процесса, моделирующего поведение одного дефекта

Согласно результатам Л.П.Зачепиской [4], кумулянтная функция n -го порядка пуассоновского процесса имеет следующий вид:

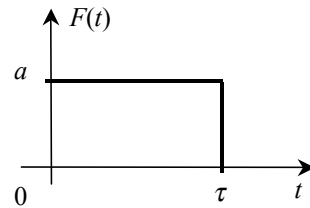


Рис.3

$$K_n(0, \tau_2, \dots, \tau_n) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(t) F(t + \tau_2) \cdot \dots \cdot F(t + \tau_n) dt. \quad (9)$$

Здесь λ – среднее число импульсов, возникающих в единицу времени.

Спектр пуассоновской последовательности импульсов с фиксированной длительностью τ является Фурье-преобразованием корреляционной функции (кумулянтной функции второго порядка), см. (9), и имеет следующий вид:

$$S(\omega | \tau) = \lambda X_F(\omega | \tau) X_F^*(\omega | \tau). \quad (10)$$

Фурье-преобразование данного импульса имеет вид:

$$X_F(\omega | \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{2a \exp(-j\omega\tau/2)}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2}. \quad (11)$$

Следовательно, спектр пуассоновской последовательности импульсов фиксированной длительности τ имеет вид (рис.4):

$$S(\omega | \tau) = \lambda a^2 \tau^2 \frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2}. \quad (12)$$

Рассмотрим суперпозицию пуассоновских последовательностей монополярных импульсов с разными случайными длительностями импульсов от последовательности к последовательности. Пусть среднее время пребывания дефекта в состоянии “1” (или средняя длительность импульсов τ_0) распределено по закону Больцмана (1). Усредняя по всем временам пребывания дефекта в состоянии “1”, получим выражение для спектра данного пуассоновского процесса:

$$S_{x1}(\omega | \tau_0) = \frac{2\lambda a^2 \tau_0^2}{1 + (\omega/\omega_c)^2}. \quad (13)$$

Здесь $\omega_c = 1/\tau_0$ – угловая частота (среза) данной кривой Лоренца.

Примем во внимание, что дефект может находиться в состоянии “0”, и его среднее время пребывания в этом состоянии (или средняя длительность пауз θ_0) также распределено по закону Больцмана (1). Учтем, что средняя длительность паузы и импульса в СТП связаны соотношением (2): $\theta_0 = k \tau_0$.

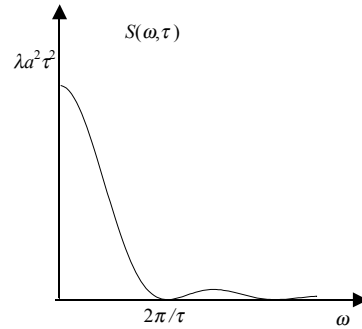


Рис.4

В качестве частоты появления импульсов λ возьмем величину, которая эквивалентна обратному среднему периоду импульса в СТП:

$$\lambda = \frac{1}{\tau_0 + \theta_0} = \frac{1}{\tau_0(k+1)}. \quad (14)$$

В результате приходим к выражению (3) для спектра СТП. Отличие от ранее полученного спектра заключается в величине дисперсии $\sigma_{x1}^2 = a^2/(k+1)$ и частоты среза $\omega_c = 1/\tau_0$.

Синтез спектра 1/f шума в модели пуассоновской последовательности монополярных импульсов

Спектр ансамбля пуассоновских процессов, моделирующих поведение N_d дефектов, имеет вид, как и для ансамбля СТП (7): $S_x(\omega) = N_d \langle S_{x1}(\omega|\tau_0) \rangle_{\tau_0}$. Распределение средних длительностей импульса в ансамбле пуассоновских процессов выбрано, как и для ансамбля СТП (6). После усреднения выражения для спектра $S_{x1}(\omega|\tau_0)$ по всем средним длительностям элементарного импульса τ_0 найдем спектр ансамбля пуассоновских процессов:

$$S(\omega) \approx \frac{\pi \langle a^2 \rangle N_d}{(k+1) \ln(\tau_{high}/\tau_{low})} \quad (15)$$

Здесь использовано приближение: $\tau_{high}^{-1} \ll \omega \ll \tau_{low}^{-1}$. Тогда спектр ансамбля пуассоновских процессов, описывающих ансамбль СТП в модели ДУС, имеет вид 1/f, (8), с дисперсией $\sigma_x^2 = a^2 N_d / (k+1)$, верхней и нижней частотами перегиба $\omega_{high} = 1/\tau_{low}$, $\omega_{low} = 1/\tau_{high}$, определяемыми частотами срезов граничных лоренцианов.

Биспектр пуассоновского процесса, моделирующего поведение одного дефекта

Рассмотрим биспектр пуассоновского процесса, моделирующего одну ДУС. Найдем выражение для биспектра пуассоновского процесса, состоящего из прямоугольных импульсов постоянной длительности τ . Принимая во внимание выражение Фурье-образа элементарного прямоугольного импульса (14), получим следующее выражение для биспектра пуассоновской последовательности прямоугольных импульсов фиксированной длительности:

$$\begin{aligned} S_{x1}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{8\lambda \langle a^3 \rangle}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2)} \sin\left(\frac{\omega_1 \tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_2 \tau}{2}\right) \sin\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2) \tau}{2}\right) = \\ &= \frac{2\lambda \langle a^3 \rangle}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2)} \left[\sin\left(\frac{\omega_1 \tau}{2}\right) + \sin\left(\frac{\omega_2 \tau}{2}\right) - \sin\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2) \tau}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Учтем, что длительность прямоугольного импульса в СТП распределена по закону Больцмана (1). Усредним выражение для биспектра по всем длительностям

импульса. После усреднения получим следующее выражение для биспектра пуассоновского процесса, моделирующего поведение одного дефекта:

$$S_{x1}(\omega_1, \omega_2 | \tau_0) = \frac{2\lambda \langle a^3 \rangle}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2)} \left(\frac{\omega_1 \tau_0}{1 + (\omega_1 \tau_0)^2} + \frac{\omega_2 \tau_0}{1 + (\omega_2 \tau_0)^2} - \frac{(\omega_1 + \omega_2) \tau_0}{1 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \tau_0^2} \right) \quad (17)$$

Здесь τ_0 – средняя длительность прямоугольных импульсов данного пуассоновского процесса или среднее время пребывания дефекта в состоянии, условно обозначаемым “1”.

Биспектр 1/f шума в модели пуассоновского процесса, моделирующего ансамбль СТП

В данной части работы проводится вывод выражения для биспектра 1/f шума в модели пуассоновского процесса, образованного ансамблем дефектов. В выражении для биспектра пуассоновского процесса (17), моделирующего одну ДУС, учтем, что частота возникновения импульсов обратно пропорциональна сумме средних времен пребывания дефекта в состояниях, условно обозначаемых “0” и “1”. Примем во внимание связь между длительностями импульса и паузы, $\lambda = 1/(\theta_0 + \tau_0) = 1/[(k+1)\tau_0]$.

Усредняя выражение для биспектра одного дефекта по всем длительностям импульса, см. распределение длительности в (9), получим выражение для биспектра пуассоновского процесса, описывающего ансамбль дефектов:

$$S_x(\omega_1, \omega_2) = \frac{2a^3 N_d}{(k+1) \ln(\tau_{high} / \tau_{low}) (\omega_1 + \omega_2)} \left(\frac{\ln(1 + \omega_1 / \omega_2)}{\omega_1} + \frac{\ln(1 + \omega_2 / \omega_1)}{\omega_2} \right) \quad (18)$$

При выводе данного выражения использовано приближение: $\tau_{high}^{-1} \ll \omega \ll \tau_{low}^{-1}$. Вид поверхности биспектра приведен на рис.5. На биссектрисе частотной плоскости, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, биспектр обратно пропорционален квадрату частоты, $S(\omega, \omega) \sim 1/\omega^2$. Из выражения (18) следует, что 1/f шум является негауссовым.

Сводка полученных результатов приведена в таблице.

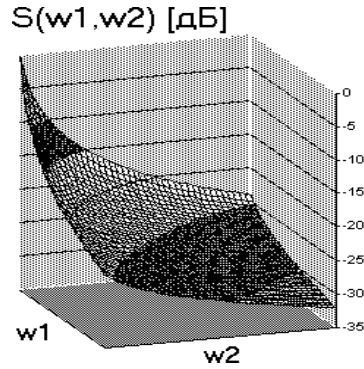


Рис.5

Биспектр 1/f шума, моделируемого пуассоновским процессом

Процесс	Выражения для спектра (модель для одного дефекта)	
СТП	$S_{x1}(\omega \tau_0) = \frac{2\omega_c \sigma_{x1}^2}{\omega_c^2 + \omega^2}$	$\sigma_{x1}^2 = a^2 \frac{k}{(k+1)^2}; \quad \omega_c = \frac{k+1}{k} \frac{1}{\tau_0}$
Пуассоновский		$\sigma_{x1}^2 = a^2 \frac{1}{(k+1)}; \quad \omega_c = \frac{1}{\tau_0}$
	Выражения для спектра (модель для ансамбля дефектов)	
СТП	$S_x(\omega) = \frac{\pi \sigma_x^2}{\ln(\omega_{high} / \omega_{low})} \cdot \frac{1}{\omega}$	$\sigma_x^2 = a^2 N_d \frac{k}{(k+1)^2}$
Пуассоновский		$\sigma_x^2 = a^2 N_d \frac{1}{(k+1)}$
	Выражения для биспектра (модель для одного дефекта)	
Пуассоновский	$S_{x1}(\omega_1, \omega_2 \tau_0) = \frac{2a^3}{(k+1)\omega_1\omega_2(\omega_1 + \omega_2)} \cdot \left(\frac{\omega_1}{1 + (\omega_1\tau_0)^2} + \frac{\omega_2}{1 + (\omega_2\tau_0)^2} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{1 + (\omega_1 + \omega_2)^2 \tau_0^2} \right)$	
	Выражения для биспектра (модель для ансамбля дефектов)	
Пуассоновский	$S_x(\omega_1, \omega_2) = \frac{2a^3 N_d}{(k+1) \ln(\tau_{high} / \tau_{low})(\omega_1 + \omega_2)} \left(\frac{\ln(1 + \omega_1 / \omega_2)}{\omega_1} + \frac{\ln(1 + \omega_2 / \omega_1)}{\omega_2} \right)$	

Сравнивая полученные выражения для спектра процессов, моделирующих поведение одного дефекта, можно заметить, что дисперсия и частота среза лоренциана у пуассоновского процесса и СТП отличаются на коэффициент $k/(k+1)$. Различие обусловлено тем фактом, что в пуассоновском процессе статистика пребывания дефекта в состоянии “0” или статистика пауз учтена частично, лишь в частоте появления импульсов, и нарушается по сравнению с СТП из-за перекрытия импульсов. Для выравнивания дисперсии и частот среза лоренцианов в биспектре пуассоновского процесса, моделирующего один дефект, добавим корректирующий множитель $k/(k+1)$. Тогда выражение для биспектра пуассоновского процесса, моделирующего поведение ансамбля дефектов с учетом статистики пауз, примет вид:

$$S(\omega_1, \omega_2) = \frac{2a^3 N_d k}{(k+1)^2 \ln(\omega_{high} / \omega_{low})(\omega_1 + \omega_2)} \left(\frac{\ln(1 + \omega_1 / \omega_2)}{\omega_1} + \frac{\ln(1 + \omega_2 / \omega_1)}{\omega_2} \right) \quad (19)$$

Граничные частоты здесь, как и для СТП, $\omega_{high} = (k+1)/(k\tau_{low})$, $\omega_{low} = (k+1)/(k\tau_{high})$.

Полученное выражение для биспектра практически совпадает с биспектром 1/f шума в модели Халфорда [5] и может быть использовано для определения концентрации подвижных дефектов структуры.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 00-15-96620, № 01-02-16666, № 02-02-06298 и Отделения Науки НАТО, Программа “Наука для Мира”, грант SfP-973799 Semiconductors.

Литература

- [1] Макаров С.В., Медведев С.Ю., Якимов А.В., Феррантэ Г., Мичели В., Принчипато Ф. Влияние негауссовости на погрешность измерения интенсивности фильтрованного фликкерного шума // Известия ВУЗов. Радиофизика. 1999
- [2] Левин Б.Р. Теоретические основы радиотехники. –Москва: Сов. радио, 1969, Кн.1. Гл.11.
- [3] Ван дер Зил А. Шумы в полупроводниковых приборах и лазерах //Пер. с англ.–ТИИЭР. 1970. Т.58, №8. С.5-34
- [4] Зачепиская Л.П. О возможной некорректности замены асимптотически нормальных случайных процессов строго нормальными при инерционном линейном преобразовании //Радиотехника и электроника. 1971. Т.16, № 4. С.627–630.
- [5] Перов М.Ю., Якимов А.В. Функция бикогерентности $1/f$ шума //Материалы 32 международного научно-методического семинара “Шумовые и деградационные процессы в полупроводниковых приборах”. Москва, МНТОРЭС им. А.С.Попова, 2002, с.74–79.

The bispectrum of the Poissonian process as the $1/f$ noise model constructed on the base of TLS in the semiconductors^{*)}

М.Ю.Перов¹⁾

Nizhni Novgorod State University, Gagarin Avenue 23, Nizhni Novgorod 603950, Russia

The most of semiconductor devices have the $1/f$ low frequency noise probably caused by mobile defects. The zero-hypothesis (about the Gaussianity and stationarity) for $1/f$ semiconductor noise is found to be not fulfilled. The $1/f$ noise is suggested to be stationary and non-Gaussian. The high order spectra are known to be zero for Gaussian processes. To investigate the $1/f$ noise non-Gaussianity the high order spectra are researched on the bispectrum example.

There is the TLS (Two Level System) model in semiconductors where the mobile defect can be in one of two meta-stable states. It is suggested that defect transitions between these states is very quick with comparing to time of meta-stable state. Therefore, the defect moving from one state to another one, and backwards, can be described by the random telegraph process (RTP). The quantity of defects is large in the semiconductor, and noise is created by superposition of RTPs. The spectra for the single RTP and RTP superposition have been found for the TLS model. The RTP spectrum is described by Lorentz curve, and RTP superposition spectrum has the $1/f$ type [1]. The high order spectra (among them bispectrum) of the $1/f$ noise are very hard to deduce in TLS model.

^{*)} Proc. NATO Project SfP-973799 Semiconductors 2nd Workshop. Nizhni Novgorod, 2002

¹⁾ Phone: +7-8312-656153; Fax: +7-8312-656416; E-mail: perov@rf.unn.ru

To estimate the 1/f noise bispectrum in TLS model the auxiliary model of the 1/f noise has been developed. The Poissonian process high order spectra can be found as the Fourier transform of the corresponding order cumulant function. The auxiliary model is constructed on the base of the superposition of Poissonian processes with comparing to RTP superposition. For instance, one Poissonian process is used to model the behavior of one mobile defect, and it is corresponded to single RTP. That is why the rectangle elementary pulse has been chosen for this process. The pdf of pulse duration in the modeling of one defect is of Boltzman type. To find the spectrum of the process modeling the superposition of RTPs we use the pdf of mean pulse duration which is equal to: $W_{\tau}(\tau) = 1/[\tau \ln(\tau_{high}/\tau_{low})]$, $\tau_{low} \leq \tau \leq \tau_{high}$. Here $\tau_{low,high}$ are the boundary mean pulse durations.

It was noticed after analysis of the spectra that cut frequencies and variances of RTP and Poissonian process are distinguished by factor $k/k+1$. Here k is the ratio between the mean pulse duration (time of "1" defect state) and mean interval between neighbor pulses (time of "0" defect state). The difference between these values can be explained by the fact that the statistics of intervals between pulses (the time of "0" state) was not taken into account for Poissonian process, and the pulses may be overlapped in this process.

To take into account the difference between the cut frequencies and variances the factor $k/(k+1)$ was added to the Lorentz curves of the Poissonian process bispectrum. Then, after the averaging of this expression, the bispectrum of Poissonian process superposition was obtained:

$$S(\omega_1, \omega_2) = \frac{2a^3 N_d k}{(k+1)^2 \ln(\omega_{high}/\omega_{low})(\omega_1 + \omega_2)} \left(\frac{\ln(1 + \omega_1/\omega_2)}{\omega_1} + \frac{\ln(1 + \omega_2/\omega_1)}{\omega_2} \right) \quad (19)$$

Here the boundary frequencies (as for RTP) are: $\omega_{high} = (k+1)/(k\tau_{low})$, $\omega_{low} = (k+1)/(k\tau_{high})$, N_d is the number of defects.

The bispectrum (19) is almost coincided with the bispectrum of the 1/f noise obtained for the Halford's model [5]. Equation (19) can be used to define the number of defects in researched semiconductor samples.

This work was supported by grants of RFBR Nos. 00-15-96620, 01-02-16666, 02-02-06298 and NATO Science Division, Program "Science for Peace", Project SfP-973799 Semiconductors.