# Ошибки алгоритмов оценивания моментной функции случайного процесса

**А.В.Беляков**[1]

*Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского*
*проспект Гагарина 23, Нижний Новгород 603950, Россия*

В работе представлен анализ ошибок оценивания статистических моментов и кумулянтов, вычисление которых основано на усреднении. Определяется величина вычислительных ошибок, связанных с различными способами округления чисел с плавающей запятой. Сравниваются два способа вычисления среднего: статический и динамический. Приводятся результаты анализа состоятельности и смещенности оценки среднего относительно истинного значения. Вводится ограничение на максимальное число слагаемых при указанных способах усреднения.

## *1. Введение*

При исследовании случайных сигналов и их характеристик всегда приходится применять операцию усреднения. Вычисление средних величин позволяет находить оценки корреляционных, моментных и кумулянтных характеристик. При использовании усреднения в ЭВМ неизбежно появляются ошибки округления, связанные с конечной точностью представления чисел. В результате оценки могут сильно отличаться от истинных значений искомых характеристик. Известны примеры, когда результат, полученный в результате численного усреднения, не просто отличается по величине от бесконечно точного результата, а меняет знак.

Высшие кумулянты дают информацию о степени гауссовости случайных процессов [1–3]. Для гауссова процесса все кумулянты, имеющие порядок выше второго, равны нулю. Поэтому важной задачей является определение и учет величины ошибок округления в результирующих показателях. То есть необходимо знать, является ли ненулевой старший кумулянт (или коэффициент эксцесса) проявлением негауссовости исследуемого процесса или же это просто следствие ошибок, возникающих при обработке шума в ЭВМ.

В этой части работы проводится анализ причин возникновения вычислительных ошибок, накладываются ограничения на операцию усреднения, приводятся способы, позволяющие уменьшить указанные ошибки.

## *2. Теоретический анализ ошибок усреднения*

В компьютер данные поступают с аналого-цифрового преобразователя (АЦП) в целочисленном виде (например, “integer” или “long integer”). Использование указанных типов данных при вычислениях является неприемлемым, так как они, во-первых, имеют весьма ограниченный диапазон представления (при суммировании быстро наступает переполнение), во-вторых, ошибка округления или усечения (отбрасывания дробной части числа) является равномерно распределенной в диапа-

[1] Тел.: +7-8312-656153; Fax: +7-8312-656416; E-mail: belyakov@rf.unn.ru

зоне [0;1]. Эта ошибка является аддитивной и резко уменьшает точность оценки исследуемых характеристик.

Использование типов данных с плавающей запятой (“float” или “double”) при вычислениях также приводит к появлению ошибки. Это связано с тем, что числа с плавающей запятой представляются в процессоре в виде знака, порядка со знаком и мантиссы [4]. Интересующие нас ошибки возникают в наименее значимом бите мантиссы. При проведении арифметической операции операнды приводятся к одному порядку во временном формате, который может иметь большее число битов для размещения мантиссы (например, тип “extended”, имеющий 64 бита для размещения мантиссы числа), что обеспечивает более высокую точность вычислений. После арифметической операции число переводится в исходный формат (“float”). При этом происходит потеря точности из-за необходимости округления мантиссы числа, так как значащие биты мантиссы числа во временном формате не могут быть полностью перенесены в мантиссу числа типа “float”. Ошибка, вызванная округлением мантиссы, умножается на два в степени двоичного порядка числа, то есть является мультипликативной.

Итак, абсолютная ошибка при проведении арифметической операции над числами с плавающей запятой определяться значением $\Delta_i = x^* \cdot \delta_i$. Здесь $x^*$ – точное число, которое должно быть получено в результате операции, $\delta_i$ –ошибка округления мантиссы. Считаем, что эта ошибка (для чисел типа “float”) равномерно распределена в диапазоне от $-2^{-24}$ до $+2^{-24}$ при округлении мантиссы к ближайшему представимому значению относительно абсолютно точного результата арифметической операции, либо в диапазоне от 0 до $+2^{-23}$ при направленном округлении (округлении с избытком или с недостатком). Следует отметить, что согласно [4] режим округления к ближайшему представимому значению является режимом округления, используемым по умолчанию.

Рассмотрим операцию вычисления оценки среднего случайного процесса, отсчеты которого представлены в виде чисел с плавающей запятой, при условии, что используется режим округления с недостатком (округления к “–∞”)

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)\delta_i - \delta\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ , \qquad (1)$$

где $x_i$ –отсчеты исследуемого процесса, $N$ –число усредняемых отсчетов. Здесь первый член – истинная оценка среднего процесса (без учета ошибок округления), второй член определяет величину ошибок округления в результате суммирования значений отсчетов случайного процесса, третий – ошибка округления при делении накопленной суммы на общее число слагаемых.

Исходное выражение может быть представлено в следующем виде

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1} x_i \sum_{n=i-1}^{N-1}\delta_n - \delta\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ . \qquad (2)$$

Усредняя полученное выражение по ансамблю, получим:

$$\langle\tilde{\alpha}_1\rangle = \alpha_1 - \sum_{i=1}^{N}\langle x_i\rangle \frac{1}{N}\sum_{n=i-1}^{N-1}\langle\delta_n\rangle - \alpha_1\alpha_1^\delta =$$
$$= \alpha_1 - \alpha_1\sum_{i=1}^{N}\frac{N+1-i}{N}\alpha_1^\delta - \alpha_1\alpha_1^\delta = \tag{3}$$
$$= \alpha_1 - \alpha_1\alpha_1^\delta N - \alpha_1\alpha_1^\delta + \alpha_1\alpha_1^\delta\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} i - \alpha_1\alpha_1^\delta .$$

Здесь $\alpha_1$ –среднее значение исследуемого случайного процесса, $\alpha_1^\delta$ –среднее значение ошибки округления мантиссы.

Используя известное выражение для суммы арифметической прогрессии, окончательно получим среднее значение исследуемого процесса с учетом случайных вычислительных ошибок:

$$\langle\tilde{\alpha}_1\rangle = \alpha_1 - \frac{3}{4}\alpha_1\alpha_1^\delta - \alpha_1\alpha_1^\delta\frac{N}{2} . \tag{4}$$

Поскольку усредняемое число отсчетов $N$>>1, то основной вклад в накопленную в результате усреднения мультипликативную ошибку вносит третье слагаемое. Следовательно, можно записать приближенное выражение для абсолютной ошибки вычисления среднего:

$$\Delta_\Sigma \approx \alpha_1\alpha_1^\delta\frac{N}{2} . \tag{5}$$

Отметим, что это выражение получено, исходя из следующих предположений: ошибки округления мантиссы распределены равномерно; ошибки округления и значения отсчетов исследуемого случайного процесса некоррелированы; ошибки второго и высших порядков по $\delta$ пренебрежимо малы.

В случае направленного округления (с избытком или недостатком) ошибка вычисления среднего значения имеет линейную зависимость от числа суммируемых отсчетов исследуемого процесса. Эта ошибка существенна и составляет несколько процентов (для типа “float”) от реального среднего уже при числе отсчетов, используемых в усреднении, порядка $10^5$.

Если число с плавающей запятой округляется к ближайшему представимому числу, то $\alpha_1^\delta$=0. При этом ошибки, пропорциональной числу усредняемых отсчетов, не появится.

Из выражения для абсолютной ошибки вычисления среднего (5) также следует, что если исходный процесс имеет нулевое среднее $\alpha_1$=0, то ошибка, связанная с конечной точностью представления чисел в ЭВМ, как при округлении, так и при усечении мантиссы не появится.

*3. Два способа вычисления среднего*

Рассмотрим два способа вычисления среднего. Первый – “статический” – предполагает вычисление среднего для всего массива значений исследуемого случайного процесса

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ . \tag{6}$$

Второй – “динамический” – предполагает вычисление среднего на каждом шаге, то есть для каждого значения случайного процесса

$$\langle x \rangle_n = \left( \langle x \rangle_{n-1} \cdot (n-1) + x_n \right) / \, n \ , \tag{7}$$

где $<x>_n$ – среднее значение, полученное после учета $n$-го отсчета. Следует подчеркнуть, что первый способ вычисления среднего может быть использован только при наличии всего усредняемого массива данных. В этом случае точность вычисления среднего значения случайного процесса может быть повышена, например, использованием типа “double” вместо “float”. При этом время вычисления возрастает, но так как все данные уже собраны, эта проблема не является принципиальной. Второй способ может быть использован непосредственно при вводе данных с аналого-цифрового преобразователя (АЦП). В этом случае использование типа “double” вместо “float”, приводящее к увеличению времени обработки данных, может быть недопустимо для высокочастотных процессов, исследуемых в реальном времени. Кроме этого, объем данных, представленных в типе “double”, возрастает в два раза по сравнению с “float”.

*4. Смещенность и состоятельность оценки среднего*

Для исследования случайных вычислительных ошибок был проведен ряд численных экспериментов. Использовался генератор псевдослучайных чисел с равномерным распределением rand() из стандартной библиотеки языка С. В качестве априорных параметров случайного процесса задавались среднее значение и стандарт, который определялся амплитудой чисел на выходе генератора.

Были получены реализации случайного процесса, имеющее различное число отсчетов. Эти реализации усреднялись с использованием статического и динамического подхода. Результаты вычислений сравнивались с априорным средним, то есть вычислялась абсолютная и относительная ошибка.

Проведенные численные эксперименты подтверждают гипотезу о состоятельности оценки среднего, как для статического, так и для динамического способа усреднения. То есть дисперсия оценки среднего стремится к нулю при увеличении числа отсчетов, используемых в усреднении. Однако это остается справедливым, как будет показано далее, лишь до некоторого конечного числа усредняемых отсчетов.

Результаты численного эксперимента можно видеть на рисунках 1 и 2 для статического и динамического способов усреднения, соответственно.

Вычисления проводились при округлении чисел с плавающей запятой к ближайшему представимому значению. Этот видно из графиков, так как линейная зависимость ошибки вычисления среднего от числа усредняемых отсчетов не наблюдается.

Оценка среднего, вычисленная при помощи **динамического** способа усреднения, оказывается несмещенной. **Статическая** оценка среднего оказывается смещенной, причем величина смещения возрастает с увеличением числа усредняемых отсчетов случайного процесса.

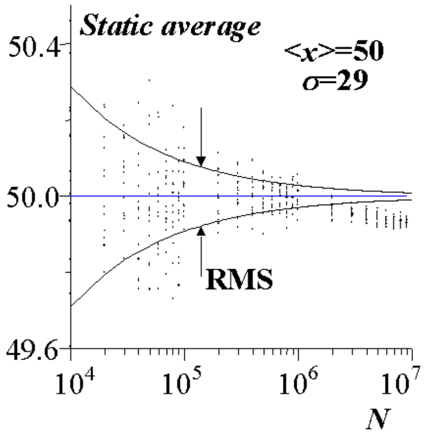


Рис. 1

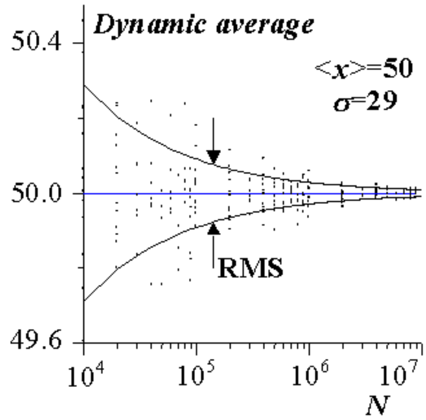


Рис. 2

Сплошными линиями “RMS” на графиках показано стандартное отклонение оценки среднего от истинного среднего исследуемого процесса. Здесь использована известная зависимость стандарта оценки среднего (в случае некоррелированности соседних отсчетов) от числа усредняемых отсчетов $N$ и стандарта исследуемого процесса:

$$\sigma_{\alpha_1} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad . \tag{8}$$

*5. Смещенность оценки при статическом усреднении*

Смещение оценки среднего непосредственно связано с числом усредняемых отсчетов $N$ и разрядностью мантиссы чисел с плавающей запятой. Также ниже будет показано, что характер роста ошибки при увеличении $N$ зависит от вида функции плотности вероятности исследуемого случайного процесса.

Мантисса числа типа float имеет 23 бита. В связи с этим влияние нового отсчета $x_{N+1}$, добавляемого в сумму $S_N$, на величину этой суммы может быть условно разделено на 3 случая.

1) Дополнительное слагаемое $x_{N+1}$ учитывается полностью, если отношение величины уже накопленной суммы к этому слагаемому $S_N/x_{N+1}$ не превышает $2^{23}$.
2) Дополнительный отсчет влияет на то, как будет округлена последняя значащая цифра дробной части числа, если $2^{23}<S_N/x_{N+1}<2^{24}$.
3) Дополнительное слагаемое не изменяет уже имеющуюся сумму, если $S_N/x_{N+1}\geq 2^{24}$.

Рассмотрим случайный процесс с ненулевым средним $\alpha_1$.

Для достаточно большого числа слагаемых $N$ при статическом способе усреднения величина суммы может быть представлена в виде $S_N=\alpha_1 N$. Чтобы ($N$+1) отсчет случайного процесса не влиял на итоговое значение среднего достаточно $S_N/x_{N+1}=2^{24}$. Таким образом, значение случайного процесса, имеющее величину $x_{N+1}=a$, не будет влиять на величину суммы, используемой в статическом способе усреднения, если число уже просуммированных отсчетов равно $N=2^{24}a/\alpha_1$.

Если рассмотреть равномерно распределенный случайный процесс от 0 до $x_{max}$, то придельное значение числа усредняемых отсчетов $N_{max}=2^{24}x_{max}/\alpha_1$. При превышении $N_{max}$ ни одно из значений случайного процесса не будет увеличивать (уменьшать) значение суммы. Но, поскольку результат суммирования по-прежнему делится на полное число слагаемых, то возникает накапливающаяся ошибка вычисления среднего и, соответственно, увеличивается смещение оценки среднего относительно истинного значения.

Указанные ошибки начинают проявляться уже при $N<N_{max}$. В качестве примера можно рассмотреть равномерно распределенный случайный процесс от 0 до 1. В этом случае $N_{max}\approx 3{,}4\cdot 10^7$, но ошибки, связанные с ограниченностью числа разрядов мантиссы, начинают сказываться раньше. Так, при $N=N_{max}/2$ в сумме уже не учитываются числа $x$<0,5, то есть в среднем теряется каждый второй отсчет.

На рисунке 3 представлены результаты численного анализа. Усреднение проводилось с использованием статического алгоритма. Данные были представлены в формате “float”. Видно, что до определенного числа слагаемых в сумме ошибки практически отсутствуют, а при достижении указанных выше значений относительное отклонение оценки среднего от истинной величины начинает резко возрастать. Точка резкого нарастания относительной ошибки вычисления оценки среднего соответствует $N\approx 3\cdot 10^7$. Это значение меньше $N_{max}$, что подтверждает утверждение о том, что указанные ошибки начинают проявляться уже при $N<N_{max}$.

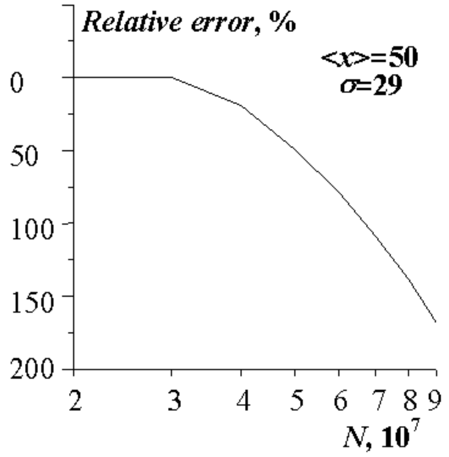


Рис.3

Степень влияния такого рода ошибок зависит от формы функции плотности вероятности исследуемого случайного процесса.

При оценке среднего любого случайного процесса следует использовать число отсчетов на несколько двоичных порядков меньшее, чем $N_{max}$. Если случайный процесс неограничен (например, гауссов случайный процесс), то для вычисления $N_{max}$ может быть выбрано некоторое эффективное значение $x_{max}$. Например, можно выбрать величину $x_{max}=8\sigma_x$, где $\sigma_x$ –стандарт гауссова шума. Если считать гауссову функцию плотности вероятности ограниченной указанным значением $x_{max}$, то ошибки вычисления среднего, стандарта, коэффициентов асимметрии и эксцесса, возникающие из-за усечения “хвостов” вероятностного распределения, можно считать пренебрежимо малыми.

Итак, для случайного процесса, имеющего гауссово распределение с ненулевым средним, влияние рассматриваемого эффекта практически не проявляется при $N<N_{max}/2$ и резко дает о себе знать при $N\approx N_{max}/2$. То есть для гауссова случайного процесса число усредняемых отсчетов $N\approx N_{max}/2$ неприемлемо, так как смещение оценки среднего относительно истинного значения велико.

*6. Динамическое усреднение и случай нулевого среднего*

Для случая динамического усреднения справедливы рассуждения, проделанные для статического алгоритма. Но для того, чтобы новое слагаемое не было учтено на очередном шаге динамического алгоритма, необходимо $\langle x\rangle_{N-1}(N-1)/x_i=2^{24}$. Для достаточно большого числа отсчетов $N$ можно считать, что $\langle x\rangle_{N-1}=\alpha_1$, где $\alpha_1$ – истинное среднее исследуемого процесса. Таким образом, значение случайного процесса, имеющее величину $x_{N+1}=a$, не будет влиять на среднее значение, вычисленное динамическим способом усреднения, если число уже учтенных отсчетов равно $N=2^{24}a/\alpha_1$.

При этом в отличие от статического способа усреднения, оценка среднего не станет смещенной, так как если $x_N$ отсчет не учитывается, то результат усреднения на $N$-ом шаге будет равен $\langle x\rangle_N=\langle x\rangle_{N-1}-1/N$. Так как дополнительное значение не учитываются при вычислении динамического среднего только для достаточно большого числа усредняемых отсчетов, то $1/N\ll\alpha_1$. Следовательно, при $N>N_{max}$ ни одно дополнительно учтенное значение не будет приближать оценку среднего к истинной величине среднего.

Реально, как и для статического алгоритма, указанные ошибки начинают проявляться уже при $N<N_{max}$.

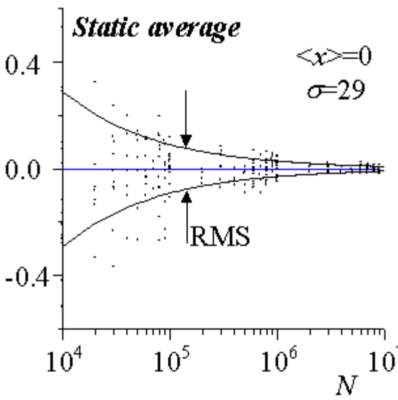


Рис.4

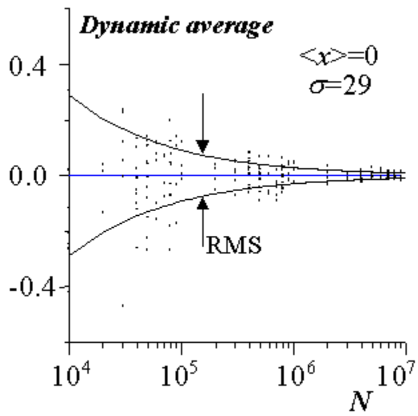


Рис.5

Очевидно, что эффект смещения оценки среднего не наблюдается и в случае нулевого среднего исследуемого процесса, поскольку в этом случае суммируются числа из окрестности нуля и нарастания суммы не происходит. При формальном вычислении $N_{max}$ в этом случае получаем бесконечность. Результаты численного эксперимента для нулевого среднего представлены на рисунках 4 и 5. Сплошными линиями на графиках показан стандарт оценки среднего в зависимости от числа усредняемых отсчетов. Из графиков видно, что в данном случае оценка среднего является состоятельной и несмещенной, как для динамического, так и для статического способа усреднения.

*7. Определение нижнего предела стандарта оценки среднего*

Итак, для статического и динамического алгоритмов можно указать предельное число усредняемых отсчетов, превышение которого не может привести к увеличению точности оценки

$$N_{max}= 2^{p+1}x_{max}/\alpha_1, \tag{9}$$

где $p$ –число бит в мантиссе числа с плавающей запятой, $x_{max}$ –максимальное значение исследуемого шума (или максимальное эффективное значение), $\alpha_1$ –среднее значение исследуемого процесса.

Форматы типов данных с плавающей запятой представлены в таблице 1 [4].

Таблица 1

| | Тип данных | | |
|---|---|---|---|
| Параметр | float | double | long double |
| Число бит в мантиссе ($p$) | 23 | 52 | 64 |
| Число бит в порядке числа | 8 | 11 | 15 |
| Число бит для знака | 1 | 1 | 1 |
| Полная длина числа в битах | 32 | 64 | 80 |

Учитывая данные, представленные в таблице 1 и выражение (9), можно найти предельное число усредняемых отсчетов, которое может быть использовано в динамическом и статическом алгоритмах усреднения. Для определенности будем считать $x_{max}$=2$\alpha_1$, что соответствует, например, равномерному распределению случайной величины. Результаты расчета представлены в таблице 2.

Таблица 2

| Тип данных | Максимальное число отсчетов, улучшающих точность оценки среднего ($N_{max}$) |
|---|---|
| float | $\approx 3{,}4\cdot 10^{7}$ |
| double | $\approx 1{,}8\cdot 10^{16}$ |
| long double | $\approx 7{,}4\cdot 10^{19}$ |

Реально для получения наиболее точных результатов следует усреднять число отсчетов меньшее $N_{max}$. Используя данные таблицы 2 и формулу (8), легко показать, что стандарт оценки среднего для статического и динамического алгоритмов ограничен снизу, несмотря на возможный бесконечный рост числа усредняемых отсчетов. Нижний предел величины стандарта оценки среднего в зависимости от типа используемых данных и стандарта исследуемого процесса представлен в таблице 3.

Таблица 3

| Тип данных | Нижний предел величины стандарта оценки среднего RMS($\tilde{\alpha}_1$) |
|---|---|
| float | $\approx 1{,}8\cdot 10^{-4}\cdot\sigma_x$ |
| double | $\approx 8{,}2\cdot 10^{-9}\cdot\sigma_x$ |
| long double | $\approx 1{,}3\cdot 10^{-10}\cdot\sigma_x$ |

*8. Выводы и рекомендации*

Как было отмечено выше, определение степени негауссовости процесса путем оценивания отличия старших кумулянтов от нуля непосредственно связанно с вычислением статистических моментов исследуемого процесса. Неточности оценки моментов могут привести к серьезным ошибкам оценки кумулянтов и, как следствие, к неправильным выводам о степени негауссовости шума.

Использование динамического алгоритма для вычисления среднего предпочтительно, так как оценка среднего, полученная таким способом, является несмещенной для любого числа слагаемых. Но при числе отсчетов больше определенного количества $N_{max}$ ни один из добавляемых отсчетов не улучшит оценку среднего. Кроме этого, такой метод требует больших вычислительных затрат (число арифметических операций в три раза больше, чем для статического алгоритма). Динамическое усреднение не приводит к увеличению дисперсии оценки среднего для конкретного $N$ по сравнению со статическим способом усреднения.

При использовании методов усреднения, дающих несмещенную оценку (динамический алгоритм усреднения или статический при числе усредняемых отсчетов $N \ll N_{max}$), ошибками округления можно пренебречь, так как они имеют второй порядок малости по $\delta$. То есть точность оценки среднего при некоррелированности соседних значений определяется только стандартом исследуемого процесса и числом усредняемых отсчетов. Важно помнить, что, несмотря на соотношение (8), стандарт оценки среднего для статического и динамического алгоритмов не стремится к нулю, а имеет предел при $N \to N_{max}$. Этот предел зависит от выбранного представления данных в ЭВМ (см. таблицу 3).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 01-02-16666 и “Ведущие научные школы” № 00-15-96620, а также программы НАТО “Наука для Мира”, проект SfP–973799 Semiconductors.

*Литература*

[1] Кузовлев Ю.Е., Бочков Г.Н. //Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1983. Т.26, №3. С. 310–317.
[2] Weissman M.B. 1/f noise and other slow, nonexponential kinetics in condensed matter //Rev. Mod. Phys. 1988. V. 60, № 2. P. 537.
[3] Yakimov A.V., Hooge F.N. A simple test of the Gaussian character of noise //Physica B. 2000. V. 291. P. 97–104.
[4] IEEE Standard for binary floating-point arithmetic, ANSI/IEEE Std 754-1985.

## Errors in mean value estimation algorithms[*)]

**A.V.Belyakov**[1)]

*Nizhni Novgorod State University, Gagarin Avenue 23, Nizhni Novgorod 603950, Russia*

Averaging is inherent operation on research of the noise. It allows finding out estimations of correlation, statistical moments, and semi-invariants. Averaging by means of PC leads to rounding errors, which yield invalid estimations.

Often it is of great importance to know if the nonzero higher semi-invariant is caused by non-Gaussianity or by rounding errors on the digital noise treatment.

"Integers" or "long integers" are the types of numbers, which correspond to those provided by the ADC. Using of these types is unacceptable because of their small range and large rounding errors uniformly distributed from 0 to 1. Error mentioned is additive, and it strongly decreases the accuracy of noise characteristics estimation.

Floating-point arithmetic also leads to rounding errors. Binary floating-point number is a bit-string characterized by three components: a sign, a signed exponent, and a significand. The rounding errors occur in the least significant bit of the significand. There is a loss of accuracy on calculations due to rounding of significand. Significand rounding error, been multiplied by two to number's exponent, represents multiplicative error.

Absolute error of floating-point arithmetic operation is equal to $\Delta_i = x^* \cdot \delta_i$. Here $x^*$ – infinitely precise operation result, $\delta_i$ – random error of significand rounding. When rounding to nearest is concerned the random error is uniformly distributed ("float" type is implied) on interval from $-2^{-23}$ to $+2^{-23}$.

In the calculations we neglect by errors of higher orders of δ. Random process readouts are considered to be uncorrelated. Thus, it is possible to obtain the mean value estimate of the process including floating-point errors:

$$\langle \tilde{\alpha}_1 \rangle = \alpha_1 - \frac{3}{4}\alpha_1 \alpha_1^{\delta} - \alpha_1 \alpha_1^{\delta} \frac{N}{2}.$$

The quantity of averaged readouts is $N >> 1$. Thus, the absolute error of mean value calculation is $\Delta_\Sigma \approx \alpha_1 \alpha_1^{\delta}(N/2)$.

In the case of directed rounding (with truncation, or addition) mean value estimation error is proportional to the quantity of averaged readouts. It makes a few percent ("float" type is implied) of infinitely precise mean value at $N=10^5$. Otherwise, if rounding to nearest is used it is obvious that $\alpha_1^{\delta}=0$. The error proportional to the quantity of averaged readouts does not appear in this case. Note, that process with zero mean value also does not yield the error mentioned.

Two algorithms of mean value calculation are compared in this paper. The first one – "static" – deals with the calculation over the whole array of readouts of the process, $\langle x \rangle = (1/N)\Sigma x_i$. In the second, "dynamic", algorithm the mean value is recalculated for

*) Proc. NATO Project SfP–973799 Semiconductors 2nd Workshop. Nizhni Novgorod, 2002

1) Phone: +7-8312-656153; Fax: +7-8312-656416; E-mail: belyakov@rf.unn.ru

each readout, $\langle x\rangle_n=(\langle x\rangle_{n-1}\cdot(n-1)+x_n)/n$. Dynamic algorithm may be used simultaneously with data input from the ADC. But in this case it might be unacceptable to use type "double" instead of "float" in order to obtain more precise results for high-frequency processes treated in the real-time mode. The reason is that "double" arithmetic requires more calculation time than "float" one.

A series of numerical experiments have been made. Pseudo-random uniformly distributed numbers generator was used with preliminary set mean value $\langle x\rangle$ and root mean square $\sigma$. Obtained results are shown in figs. 1 and 2.

Mean value estimation made by dynamic algorithm is not shifted. On the contrary, static mean value estimation is shifted. More the quantity of readouts more the shift.

The mentioned shift of mean value estimation depends on the quantity of readouts $N$ and significand digit capacity of floating-point numbers.

Significand of type "float" has 23 bits. Accordingly, the influence of additional readout $x_{N+1}$ on the sum $S_N$ may be divided into three cases.

1. The full meaning of the additional item $x_{N+1}$ is taken into account if ratio of already accumulated sum and this very item $S_N/x_{N+1}$ does not exceed $2^{23}$.
2. Additional item influences on least significant bit rounding if $2^{23}<S_N/x_{N+1}<2^{24}$.
3. Additional item does not influence on existing sum if $S_N/x_{N+1}\geq 2^{24}$.

If random process uniformly distributed from 0 to $x_{max}$ is considered then maximal permitted amount of averaging readouts is $N_{max}=2^{24}x_{max}/\alpha_1$. On $N_{max}$ exceeding no one readout could be able to change sum value. But the sum is divided by full number of averaging readouts anyway. Thus, accumulated calculation error appears and, accordingly, mean value estimation shift increases (fig. 3). These errors appear already at $N<N_{max}$ and their exact influence depends on random process probability density function type.

On dynamic averaging $N_{max}$ is also exists, but there is no estimation shift effect. Because dynamic algorithm just omits any value with order number $N>N_{max}$.

The root mean square of the mean value estimation depends on the quantity of not correlated readouts in the following way $\mathrm{RMS}(\tilde{\alpha}_1)=\sigma/\sqrt{N}$. But actually $\mathrm{RMS}(\tilde{\alpha}_1)$ is limited by number depending on floating-point type because of $N$ is limited by $N_{max}$.

This work was supported by grants of RFBR 00–15–96620, 01–02–16666, and NATO Project SfP–973799 Semiconductors.