

Точность цифровой оценки спектра сигнала

С.Ю.Медведев, М.Ю.Перов, А.В.Якимов*

*Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского
проспект Гагарина 23, Нижний Новгород 603950, Россия*

Исследуется точность цифровой оценки спектра сигнала. Учитываются шумы квантования, вносимые аналого-цифровым преобразователем и быстрым преобразованием Фурье. Основной анализ выполнен на примере тестового гармонического сигнала. Введена характеристика отношения сигнал/шум - эффективная двоичная разрядность гармонического сигнала. Обсуждается оптимальное сочетание между разрядностью АЦП и типом используемого преобразования Фурье; даются некоторые полезные рекомендации.

1. Введение

В настоящее время для обработки сигналов широко используются цифровые методы. Основу многих методов составляет быстрое преобразование Фурье (БПФ) – алгоритм вычисления дискретного преобразования Фурье, используемый, как правило, для вычисления спектральных характеристик сигнала. Количество вычислений, используемых для вычисления БПФ, значительно меньше числа операций дискретного преобразования Фурье, что обеспечивает более высокую скорость вычисления [1].

В цифровом спектре всегда присутствует спектр шума квантования сигнала, вносимый аналого-цифровым преобразователем (АЦП). Шум квантования представляет собой разницу между значениями оцифрованного и исходного аналогового сигналов. Чем меньше разрядов используется для преобразования сигнала, тем больше шум квантования.

При цифровой оценке спектра сигнала обычно учитывается только шум квантования, вносимый АЦП, см., например, [1,2]. Следует, однако, заметить, что весовые коэффициенты преобразования Фурье представлены в ЭВМ числовыми значениями и, следовательно, имеют собственный шум квантования. Числовые операции в ЭВМ сопровождаются ошибками округления, которые также можно рассматривать как шум, однако здесь в теоретических расчетах он не принимается во внимание. Очевидно, шумы квантования коэффициентов Фурье вносят дополнительные искажения в оценку спектра сигнала. Анализ указанных дополнительных искажений и является целью настоящей статьи.

Учитывается, что для определения точности оценки спектра оцифрованного сигнала может быть использовано отношение сигнал/шум. На этой основе вводится понятие эффективной разрядности (гармонического) сигнала, учитывающей совместное влияние шумов квантования, вносимых АЦП и весовыми коэффициентами Фурье.

* Тел.: +7-8312-656153; Fax: +7-8312-656416; E-mail: yakimov@rf.unn.runnet.ru

Определяется оптимальный тип БПФ (integer – целочисленный, float – с плавающей запятой одинарной точности и double – с плавающей запятой двойной точности) в зависимости от разрядности АЦП, используемого для оцифровки исследуемого сигнала.

2. Оценка спектра оцифрованного сигнала

В настоящей работе для оценки спектра сигнала применен периодограммный метод [3]. В основе метода лежит использование дискретного преобразования Фурье, вычисление которого реализовано при помощи БПФ с основанием 2, см., например, [1].

Считаем, что анализируемый сигнал является стационарным эргодическим процессом.

Дискретное преобразование Фурье может быть представлено в следующей форме:

$$X(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_q(n) w_c(kn) - jT \sum_{n=0}^{N-1} x_q(n) w_s(kn). \quad (1)$$

Здесь j – мнимая единица, N – количество отсчетов на периоде T преобразования Фурье. Дискретная частота k связана с частотой аналогового сигнала f и частотой выборки $f_s = 1/T$ следующим соотношением: $k/N = f/f_s$.

Каждый отсчет $x_q(n)$ может быть представлен в виде суммы некантованного значения сигнала $x(n)$, взятого в момент времени $t_n = n \cdot T/N$, и шума квантования $e_x(n)$, вносимого АЦП:

$$x_q(n) = x(n) + e_x(n). \quad (2)$$

Косинусный w_c и синусный w_s весовые коэффициенты также являются суммой точного значения и шума квантования:

$$\begin{aligned} w_c(kn) &= \cos(2\pi kn/N) + e_c(kn), \\ w_s(kn) &= \sin(2\pi kn/N) + e_s(kn). \end{aligned} \quad (3)$$

Принимая во внимание определение шума квантования [1], находим средние значения и дисперсии шумов квантования сигнала и весовых коэффициентов:

$$\langle e_x(n) \rangle = \langle e_c(n) \rangle = \langle e_s(n) \rangle = 0, \quad (4)$$

$$\sigma_e^2 = h_x^2/12, \quad \sigma_{e_c}^2 = \sigma_{e_s}^2 = h_c^2/12. \quad (5)$$

Здесь h_x – шаг квантования сигнала, представляющий собой разницу между соседними уровнями АЦП; $h_c = h_s$ – шаг квантования весовых коэффициентов преобразования Фурье, определяемый разрядностью чисел, использованных для задания указанных коэффициентов.

Отсчеты шумов квантования обладают нулевой корреляцией:

$$\begin{aligned} \langle e_x(n) e_x(m) \rangle &= \langle e_c(n) e_c(m) \rangle = \\ &= \langle e_s(n) e_s(m) \rangle = 0 \text{ при } n \neq m; \end{aligned} \quad (6)$$

Оценка спектра мощности сигнала определяется следующим образом:

$$S_x(k) = \frac{1}{NT} \langle |X(k)|^2 \rangle. \quad (7)$$

Подставляя соотношения (2) и (3) в (1), найдем выражения для действительной и мнимой частей преобразования Фурье. Затем, учитывая (4)–(6), получим следующее выражение для спектра мощности произвольного сигнала:

$$S_x(k) = S_x^i(k) + S_{ex}(k) + S_{ec}(k). \quad (8)$$

Первое слагаемое в этом выражении является оценкой спектра исходного аналогового сигнала без учета шумов квантования сигнала и весовых коэффициентов.

Второе слагаемое $S_{ex}(k)$ – спектр (аддитивного) шума квантования сигнала без учета шумов преобразования Фурье. Шаг квантования весовых коэффициентов всегда значительно меньше единицы. Поэтому в приведенном ниже выражении для спектра шума квантования сигнала можно пренебречь слагаемым, которое содержит h_c :

$$S_{ex}(k) = \frac{Th_x^2}{12} \left(1 + \frac{h_c^2}{6} \right) \approx \frac{Th_x^2}{12}. \quad (9)$$

Последнее слагаемое в (8) является спектром (мультипликативного) шума квантования весовых коэффициентов:

$$S_{ec}(k) = \frac{h_c^2 T}{6N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \equiv \frac{h_c^2}{6N} E_x. \quad (10)$$

Здесь E_x – энергия обрабатываемой реализации сигнала.

Таким образом, последние два слагаемых в выражении (8) образуют полный спектр шума квантования, который равномерно распределен по частоте.

3. Спектр гармонического сигнала

Рассмотрим гармонический сигнал с амплитудой A , дискретной частотой $k_0 = Nf_0/f_s$ и начальной фазой φ , равномерно распределенной на интервале $[0; 2\pi)$:

$$x(n) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi k_0 n}{N} + \varphi\right) + e_x(n). \quad (11)$$

Без учета шумов квантования спектр сигнала $S_x^i(k)$, $0 \leq k \leq N-1$, состоит из двух компонент с амплитудами $NTA^2/4$. Основная компонента находится на частоте $k=k_0$; “зеркальная” компонента, возникающая из-за периодического продолжения спектра оцифрованного сигнала, расположена на частоте $k=N-k_0$.

Спектр полного шума квантования гармонического сигнала может быть представлен в следующем виде:

$$S_e(k) = S_{ex}(k) + S_{ec}(k) = Th_x^2/12 + Th_c^2 A^2/12. \quad (12)$$

Мощность сигнала без учета шумов квантования определяется суммированием интенсивностей его спектральных компонент:

$$S_x^i = S_x^i(k_0) + S_x^i(N-k_0) = NTA^2/2. \quad (13)$$

Из (12) находим мощность полного шума квантования гармонического сигнала:

$$S_e = \sum_{k=0}^{N-1} S_e(k) = NT \frac{h_x^2 + A^2 h_c^2}{12}. \quad (14)$$

Соотношения (13) и (14) нужны для определения отношения сигнал/шум.

4. Эффективная разрядность гармонического сигнала

Из (12) и (14) следует, что мощность шума квантования гармонического сигнала (11) есть

$$S_{ex} = NTh_x^2/12. \quad (15)$$

Учитывая (13), найдем отношение сигнал/шум для сигнала на выходе АЦП:

$$S_x^i/S_{ex} = 6A^2/h_x^2. \quad (16)$$

Свяжем данное отношение с двоичной разрядностью сигнала, которую обозначим через N_b .

Максимальный размах оцифрованного сигнала соответствует удвоенному значению его амплитуды. С другой стороны, эта величина определяется произведением шага квантования в АЦП и количества возможных значений сигнала: $2A = h_x \cdot 2^{N_b}$. Следовательно, двоичная разрядность сигнала на выходе АЦП есть

$$N_b = \log_2(2A/h_x). \quad (17)$$

На основании (16) и (17) получим связь двоичной разрядности гармонического сигнала с отношением сигнал/шум:

$$N_b = 0,5 \cdot \log_2(2S_x^i/3S_{ex}). \quad (18)$$

Определенная таким образом двоичная разрядность N_b характеризует отношение сигнал/шум, где учтен только шум квантования сигнала.

Принимая во внимание все учитываемые шумы, имеющие полную мощность S_e , см. (14), введем понятие эффективного числа двоичных разрядов или эффективной разрядности гармонического сигнала:

$$N_{eff} = 0,5 \cdot \log_2 \left(\frac{2S_x^i}{3S_e} \right) \approx \frac{10 \cdot \lg(S_x^i/S_e) - 1,761}{6,02}. \quad (19)$$

Таким образом, эффективная разрядность гармонического сигнала характеризует отношение сигнал/шум.

Здесь учитывались только шумы квантования сигнала и весовых коэффициентов. Однако в соотношении (19) может учитываться любой дополнительный шум.

Выражение $10 \cdot \lg(S_x^i/S_e)$ в (19) есть отношение сигнал/шум, выраженное в децибелах. Следовательно, один эффективный разряд гармонического сигнала соответствует, приблизительно, шести децибелам отношения сигнал/шум.

Учитывая в (19) мощность сигнала (13) и суммарную мощности шумов квантования (14), получим следующее выражение для эффективной разрядности гармонического сигнала:

$$N_{eff} = \log_2 \left(\frac{2A}{\sqrt{h_x^2 + A^2 h_c^2}} \right) \quad (20)$$

Анализируя соотношение (20), можно ввести пороговое значение амплитуды сигнала $A_0 = h_x/h_c$, соответствующее точке перегиба функции $N_{eff}(A)$. График зависимости эффективной разрядности сигнала (20) от исходной разрядности N_b , представленной выражением (18), приведен на рис. 1.

При малых амплитудах, $A \ll A_0$, эффективная разрядность совпадает с исходной разрядностью сигнала на выходе АЦП:

$$N_{eff} \approx \log_2(2A/h_x) = N_b. \quad (21)$$

В этом случае отношение сигнал/шум определяется мощностью (аддитивного) шума квантования в АЦП. Шумом квантования весовых коэффициентов можно пренебречь.

При большой амплитуде, $A \gg A_0$, эффективная разрядность стремится к постоянному значению, равному двоичной разрядности весовых коэффициентов преобразования Фурье:

$$N_{eff} \approx \log_2(2/h_c) = N_c. \quad (22)$$

Когда амплитуда существенно превышает пороговое значение, отношение сигнал/шум определяется, в основном, мультипликативным шумом квантования весовых коэффициентов. Мощность данного шума пропорциональна мощности сигнала. Следовательно, отношение сигнал/шум не зависит от амплитуды сигнала и принимает постоянное значение, которое определяется шагом квантования весовых коэффициентов. В этом случае эффективная разрядность сигнала после преобразования Фурье не зависит от амплитуды и определяется разрядностью весовых коэффициентов.

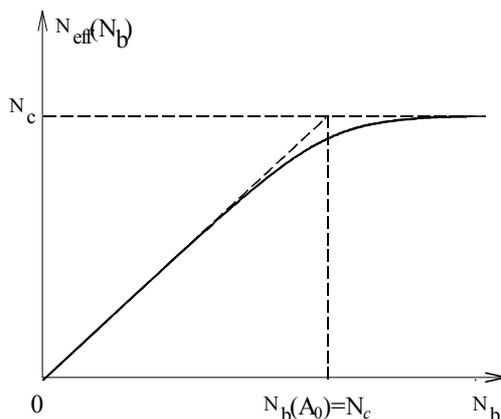


Рис. 1

5. Экспериментальные результаты

5.1. Эффективная разрядность гармонического сигнала

Оценка спектра квантованного гармонического сигнала вычислялась при помощи БПФ. Затем определялась эффективная разрядность сигнала.

На рис. 2 приведены зависимости эффективной разрядности N_{eff} гармонического сигнала от его исходной разрядности N_b . По вертикальной оси отложены значения эффективной разрядности, по горизонтальной – исходная разрядность.

Верхняя кривая получена на основе численной оценки спектра, когда гармонический сигнал квантован целой переменной типа long, и $h_x=1$, а весовые коэффициенты имеют тип float. Для уменьшения дополнительных ошибок округления применено БПФ типа double.

Из рис. 2 видно, что при малой амплитуде сигнала A (то есть при низкой разрядности оцифрованного сигнала) эффективная разрядность практически совпадает с исходной. Данная часть зависимости $N_{eff}(N_b)$ определяется шумом квантования сигнала.

При большом значении исходной разрядности (то есть при большой амплитуде сигнала) эффективная разрядность принимает постоянное значение, определяемое разрядностью весовых коэффициентов: $N_{eff} = N_c$. Зависимость от амплитуды исчезает, что обусловлено мультипликативностью шума квантования указанных коэффициентов. Отсюда можно экспериментально оценить разрядность весовых коэффициентов.

Из проведенного численного эксперимента следует, что эффективная разрядность весовых коэффициентов, квантованных переменной типа float, равна примерно 24,5. В формате переменной данного типа 24 бита отведено для мантиссы со знаком и 8 бит отведено для двоичного порядка со знаком. Значение 24 определяется количеством бит мантиссы со знаком. Половина разряда добавилась, по всей видимости, из-за усечения двоичного порядка числа.

Нижняя кривая на рис. 2 соответствует теоретической зависимости (20) для $h_x=1$ из расчета, что шаг квантования весовых коэффициентов определяется только мантиссой числа, $h_c=2^{-23}$, то есть $N_c=24$.

5.2. Разрядность весовых коэффициентов БПФ

Значение целочисленной переменной типа integer лежит в диапазоне: $[-2^{15}, +2^{15}-1]$ и, следовательно, шаг квантования весовых коэффициентов этого типа равен 2^{-16} .

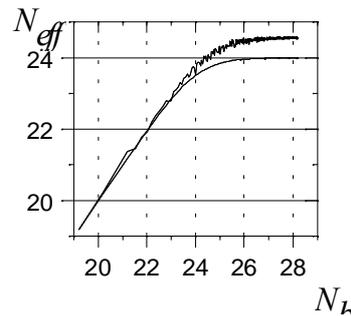


Рис. 2

В алгоритме целочисленного БПФ для устранения эффекта переполнения результата промежуточных вычислений применяется процедура усечения. Усечение осуществляется сдвигом двоичных разрядов числа и отбрасыванием младших разрядов, так чтобы полученное число укладывалось в диапазон допустимых значений переменной.

Потерю точности при промежуточных вычислениях можно интерпретировать как уменьшение разрядности весовых коэффициентов, то есть увеличение шага их квантования. Из численного эксперимента следует, что эффективная разрядность весовых коэффициентов БПФ типа integer оказывается меньше номинальной и составляет $N_c=11$.

Разрядность весовых коэффициентов, представленных переменными с плавающей запятой, определяется количеством бит мантиссы [5]. Мантиссы чисел с плавающей запятой одинарной (float) и двойной (double) точности составляют 24 и 53 бита соответственно.

При операциях над числами с плавающей запятой при переполнении мантиссы результирующего числа применяется процедура усечения. Биты, не убирающиеся в формат мантиссы, отбрасываются. При этом образуется ошибка в последнем бите мантиссы, которая накапливается при рекуррентных операциях БПФ. Поэтому, точность вычислений БПФ с числами с плавающей запятой оказывается несколько меньше мантиссы числа. Следовательно, фактическая разрядность весовых коэффициентов с плавающей запятой оказывается меньше количества бит мантиссы.

В таблице 1 приведены экспериментальные данные для двоичной разрядности коэффициентов БПФ разных типов: целочисленного (integer), с плавающей запятой одинарной (float) и двойной (double) точности. Разумеется, двоичная разрядность переменных, используемых в промежуточных вычислениях БПФ, не должна быть меньше разрядности весовых коэффициентов.

В данном численном эксперименте тип промежуточных переменных БПФ и тип соответствующих весовых коэффициентов выбраны одинаковыми.

Таблица 1

Тип БПФ	N_c
Integer	11
Float	23
Double	44

5.3. Выбор оптимального типа БПФ

Время вычисления БПФ пропорционально количеству отсчетов, равному 2^M , где M – порядок БПФ. Быстрота вычисления БПФ выбранного типа определяется размером переменной, которая применяется в преобразовании. Чем меньше двоичный размер переменной, тем быстрее могут быть выполнены математические преобразования, тем менее точным будет результат.

Из численного эксперимента, осуществленного на ПК “Pentium” с частотой центрального процессора 100МГц, получено, что при $M=12$ время вычисления БПФ типа double (112мсек) приблизительно в три раза больше, чем для целочисленного

БПФ типа integer (41мсек). Время вычисления БПФ типа float (85мсек) примерно в два раза больше, чем для integer.

Принимая во внимание полученные результаты можно определить оптимальный тип весовых коэффициентов БПФ в зависимости от разрядности АЦП, которым оцифрован сигнал (см. табл.2). Разумеется, двоичная разрядность переменных, используемых в промежуточных вычислениях БПФ, не должна быть меньше разрядности весовых коэффициентов.

Таблица 2

АЦП\БПФ	Integer	float	double
≤11	+	–	–
11-23	×	+	–
24-44	×	×	+

Здесь использованы следующие обозначения: “плюс” – рекомендуется, “минус” – не эффективно, “косой крест” – не допустимо.

Например, при оценке спектра сигнала, преобразованного 16-ти разрядным АЦП, следует использовать БПФ с весовыми коэффициентами одинарной точности (float), которое дает 23 эффективных разряда в спектре.

В системах цифровой обработки сигналов часто при 16-ти разрядном АЦП применяется целочисленное БПФ типа integer, что приводит к потере пяти разрядов сигнала и ухудшению отношения сигнал/шум в спектре. Применение в данном случае весовых коэффициентов с плавающей запятой двойной точности типа double, которые имеют не менее 44 эффективных разрядов, непрактично, поскольку, займет больше времени и не улучшит оценку спектра.

6. Выводы

- Квантование весовых коэффициентов преобразования Фурье вносит дополнительный мультипликативный шум в оценку спектра оцифрованного сигнала. Спектр шума квантования весовых коэффициентов определяется произведением энергии сигнала и дисперсии шума квантования весовых коэффициентов.
- Введено понятие эффективной разрядности на примере гармонического сигнала, позволяющее оценить отношение сигнал/шум. А именно, бдБ отношения сигнал/шум соответствует одному эффективному двоичному разряду сигнала.
- Эффективная разрядность сигнала, не может быть больше разрядности весовых коэффициентов БПФ.
- Даны рекомендации по выбору оптимального типа весовых коэффициентов для БПФ. Применение весовых коэффициентов типа integer допустимо только для сигналов, обработанных с помощью АЦП, имеющего не более 11 разрядов. При использовании 12–23 разрядных АЦП необходимо применение коэффициентов типа float. При оценке спектра сигналов, оцифрованных АЦП с большим количеством разрядов (до 44), требуется весовые коэффициенты типа double.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 00–15–96620, 01–02–16666 и Отделения Науки НАТО, программа “Наука для Мира”, грант SfP-973799 Semiconductors.

Литература

- [1] Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Справочник. Цифровая обработка сигналов. –М.: Радио и связь, 1985.
- [2] Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы. –М.: Мир, 1982.
- [3] Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. –М.: Мир, 1990.
- [4] Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. –М.: Наука, 1966.
- [5] Микропроцессорный комплект К1810. Структура, программирование, применение. Справочная книга. /Ред. Казаринов Ю.М. –М.: Высш. шк., 1990.

The accuracy of the digital spectrum estimation ^{*)}

S.Yu.Medvedev, M.Yu.Perov, A.V.Yakimov^{*)}

*Nizhni Novgorod State University, Gagarin Avenue 23,
Nizhni Novgorod 603950, Russia*

Digital methods are widely used now for the treatment of signals and noise. Many methods are based on the fast Fourier transform (FFT) – fast algorithm for the calculation of discrete Fourier transform. This algorithm is used, as a rule, for the estimation of the spectrum of a signal. The spectral characteristics such as the spectral power density (spectrum), bispectrum, and spectra of higher order are used for the investigation of noise, stochastic processes, and 1/f fluctuations.

Only the quantization noise, that is added to the signal by the analog-to-digital converter (ADC), is usually taken into account in the spectrum estimate. However, it is necessary to note that the weighting factors of FFT are presented in the computer by numerical values and, therefore, have own quantization noise. Numerical operations in the computer are accompanied by truncation errors, which also can be considered as the quantization noise. Obviously, the quantization noise adds distortions to the spectral estimate of the signal (or noise). The analysis of these additional distortions is the purpose of the present report.

We consider that the treated (noise) signal is the stationary ergodic process. The discrete Fourier transform can be presented in the following form:

$$X(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_q(n) w_c(kn) - jT \sum_{n=0}^{N-1} x_q(n) w_s(kn). \quad (1)$$

Here j is the imaginary unit, N – the number of signal readouts taken with period T .

Each readout $x_q(n)$ in (1) is the sum of $x(n)$, the magnitude of the continuous signal taken at the moment $t_n = nT/N$, and the quantization error $e_x(n)$, that is added to the signal in the ADC, see eq. (2): $x_q(n) = x(n) + e_x(n)$. The signal quantization error has the uniform

^{*)} Proc. NATO Project SfP-973799 Semiconductors 1st Workshop. Nizhni Novgorod, 2001

^{*)} Phone: +7-8312-656153, Fax: +7-8312-656416, E-mail: yakimov@rf.unn.runnet.ru

distribution over the signal quantization step h_x . The sequence of quantization errors is considered as the quantization noise.

Cosine w_c and sine w_s weighting factors evaluated in the computer are also the sum of the exact value and the quantization noise, formulas (3): $w_c(kn) = \cos(2\pi kn/N) + e_c(kn)$, $w_s(kn) = \sin(2\pi kn/N) + e_s(kn)$.

The spectrum estimate is determined as follows: $S_x(k) = \langle |X(k)|^2 \rangle / NT$. Here $\langle \dots \rangle$ means the statistical average. We take into account that the quantization errors are not mutually correlated. The average and variance of these errors are well determined. Thus, the expression for the spectrum estimate of any sampled signal (noise) is as follows:

$$S_x(k) = S_x^i(k) + S_{ex}(k) + S_{ec}(k). \quad (8)$$

The first item in the right hand part of this relation is the spectrum estimate of the initial analog signal without the quantization noise of signal and weighting factors. The second one is the spectrum of the (additive) quantization noise of the signal without the noise of Fourier transform:

$$S_{ex}(k) = Th_x^2 / 12. \quad (9)$$

The last item in (2) is the spectrum of the (multiplicative) quantization noise of weighting factors:

$$S_{ec}(k) = \frac{h_c^2 T}{6N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \equiv \frac{h_c^2}{6N} E_x. \quad (10)$$

The ergodic harmonic signal was chosen for the theoretical analysis of the spectrum estimation. The parameter of the spectral signal-to-noise ratio, "the effective number of bits of the harmonic signal" was introduced. It was obtained that this effective number of bits cannot be more than the number of bits of FFT weighting factors. This result allows us to estimate experimentally the number of bits for weighting factors having different numerical types (integer, float, double), and to suggest the optimum type of FFT depending on the bit resolution of the ADC.

Errors in intermediate FFT calculations may be interpreted as the increase of the quantization noise of weighting factors. Therefore, the experimentally found number of bits of weighting factors appears to be somewhat less than the nominal value.

On the basis of the theoretical analysis and results of numerical experiments the optimum combinations for ADC and FFT of different types were suggested. For example, it is suggested to use FFT of the float type if ADC has the resolution not more than 23 bits.

This work was supported by grants of RFBR No. 00-15-96620, 01-02-16666, and NATO SfP-973799 Semiconductors.